MATEMÁTICA II / 2º BACHARELATO 05/12/2013

REC 1 CÁLCULO DIFERENCIAL

TOTAL	SUMA	NOTA
12		

NOME	GRUPO

1 | 1. i. Estudar a continuidade da función $f(x)=\frac{kx^2-8}{x-2}$ dependendo do valor de k, indicando os tipos de discontinuidade que presenta.

1 | ii. Estudar se é posíbel estender a continuidade da función e nese caso, estudar a derivabilidade de f en $x=2$ utilizando a definición de derivada.

i. Ao ser un cociente de polinómios, existe unha posíbel discontinuidade cando se anule o denominador, ou sexa en $x=2$.

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{kx^2-8}{x-2}=\frac{4k-8}{0}.$$

Se $4k-8\neq 0$, este límite é ∞, logo f presenta unha discontinuidade de salto infinito en $x=2$.

No outro caso temos: $4k-8=0 \Leftrightarrow k=2$, a función é $f(x)=\frac{2x^2-8}{x-2}$ e o límite é unha indeterminación do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, que se pode resolver simplificando a fración:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-8}{x-2}=\lim_{x\to 2} 2x+4=8$$

Como $2\notin Dom\, f$, neste caso temos unha discontinuidade evitábel en $x=2$.

ii. No caso de ser $k=2$, definindo $f(2):=8$ a función pasa a ser contínua en $\mathbb{R}$.

A expresión da función estendida é $\hat{f}(x)=\begin{cases}\frac{2x^2-8}{x-2} & se \quad x\neq 2\\ 8 \quad se \quad x=2\end{cases}$ ou tamén simplificando $\hat{f}(x)=2x+4$.

A derivada en $x=2$ é:

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(2+h)+4-8}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4+2h+4-8}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h}=2$$

2 | 2. Calcular os límites:

i. $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{sen\,2x}{ln\frac{x}{\pi}}$

ii. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{x-\sqrt{3x^2-1}}$

i. $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{sen\,2x}{ln\frac{x}{\pi}}$

É un caso de indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$, xá que substituíndo obtemos $sen\,2\pi=0$ e $ln\frac{\pi}{\pi}=ln\,1=0$.

Pode-se resolver utilizando a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to \pi} \frac{sen\,2x}{ln\frac{x}{\pi}}=\lim_{x \to \pi} \frac{2\cos 2x}{\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\frac{x}{\pi}}}=\lim_{x \to \pi} \frac{2\cos 2x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x \to \pi} 2x\cos 2x=2\pi\cos 2\pi=2\pi$$

ii. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{x-\sqrt{3x^2-1}}$

O numerador tende a ∞ e o denominador é unha indeterminación do tipo $\infty-\infty$; dividindo numerador e denominador por x obtemos:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x-\sqrt{3x^2-1}}=\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{1-\sqrt{\frac{3x^2-1}{x^2}}}=\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{1-\sqrt{3-\frac{1}{x^2}}}=\frac{2}{1-\sqrt{3}}=\frac{2(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})\cdot(1+\sqrt{3})}=$$

$$=\frac{2(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})\cdot(1+\sqrt{3})}=\frac{2(1+\sqrt{3})}{1-3}=-(1+\sqrt{3})$$

1	
1	

3. i. Enunciado e interpretación xeométrica do Teorema de Lagrange.

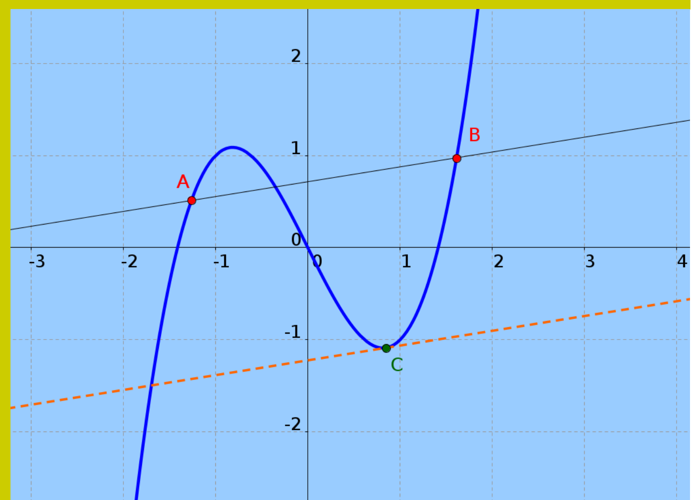
ii. Dada a función $f(x)=x^3-5x$, comprobar que está nas hipóteses do teorema no intervalo $[-2,4]$ e calcular nese caso o elemento c ao que se refire o enunciado.

i. *Enunciado*

Sexa $f(x)$ unha función contínua no intervalo $[a,b]$ e derivábel en (a,b); entón $\exists\, c \in (a,b) \;/\; f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Interpretación Xeométrica

O primeiro membro da igualdade representa a pendente da curva, que se pode identificar tamén coa taxa de variación instantánea ou coa pendente da recta tanxente á curva. O segundo membro representa a taxa de variación média no intervalo $[a,b]$. O teorema afirma que se a función é contínua e derivábel, há de existir algún ponto no que ambas coincidan, ou sexa, algún ponto no que a taxa de variación instantánea coincide coa taxa de variación média, ou tamén, onde a tanxente á curva é paralela á recta secante que pasa polos pontos $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$.



ii. $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{f(4)-f(-2)}{4-(-2)}=\dfrac{44-2}{6}=7$

Logo procuraremos un valor tal que $f'(x)=3x^2-5=7 \Leftrightarrow x^2=\dfrac{12}{3}=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$.

O elemento c ao que se refire o teorema será polo tanto $c=2\in(-2,4)$, xá que a outra posibilidade $c=-2$ fica fóra do intervalo $(-2,4)$.

1.5	

4. Obter os pontos da gráfica de $f(x)=x^3-6x-4$ nos que a recta tanxente é paralela á recta $y=6x-2$ e obter neses pontos a recta normal á curva $f(x)$.

A recta $y=6x-2$ ten pendente $m=6$, logo a condición é que $f'(x)=6$.

$f'(x)=3x^2-6=6 \Leftrightarrow 3x^2=12 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$.

$f(2)=-8$ e $f(-2)=0$, logo os pontos buscados son $A(2,-8)$ e $B(-2,0)$.

A recta normal ten como pendente a oposta da inversa da pendente de $y=6x-2$; logo será $m'=-\frac{1}{6}$.

Logo a ecuación da normal que pasa polo ponto $A(2,-8)$ é:

$$y+8=-\frac{1}{6}\cdot(x-2) \Leftrightarrow y=-\frac{1}{6}x-\frac{23}{3}$$

No caso do ponto $B(-2,0)$ resulta:

$$y=-\frac{1}{6}\cdot(x+2) \Leftrightarrow y=-\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}$$

2.5	

5. Estudar o domínio, continuidade, cortes cos eixos, asíntotas, monotonia e curvatura da función $f(x)=\frac{x^3+1}{x^3-1}$ e realizar a sua representación gráfica.

Domínio e continuidade

Por ser cociente de dous polinómios, é unha función contínua e derivábel en todo o seu domínio: $x^3-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1 \Rightarrow Dom\ f=\mathbb{R}-\{1\}$.

En $x=1$ temos $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+1}{x^3-1}=\infty$, polo que f presenta unha discontinuidade de salto infinito e corresponde-se con unha asíntota vertical de ecuación $x=1$.

Os límites laterais son: $\begin{cases}\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3+1}{x^3-1}=-\infty \\ \lim_{x\to 1^+}\frac{x^3+1}{x^3-1}=+\infty\end{cases}$.

Cortes cos eixos e signo

Eixo OX: $f(x)=0 \Leftrightarrow x^3+1=0 \Leftrightarrow x=-1$, logo a función corta ao eixo OX no ponto $A(-1,0)$.

Eixo OY: $f(0)=-1$, logo hai un corte no ponto $B(0,-1)$.

O signo virá determinado polas discontinuidades e polos pontos de corte co eixo OX:

- En $(-\infty,-1)$: $f(-2)>0 \Rightarrow f(x)>0\ \forall\ x\in(-\infty,-1)$
- En $(-1,1)$: $f(0)<0 \Rightarrow f(x)<0\ \forall\ x\in(-1,1)$
- En $(1,+\infty)$: $f(2)>0 \Rightarrow f(x)>0\ \forall\ x\in(1,+\infty)$

Asíntotas

Asíntotas horizontais: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{x^3-1}=1$, logo existe unha asíntota horizontal $y=1$ para $x\to\pm\infty$.

Asíntotas verticais: $x=1$.

Asíntotas oblícuas: non existen debido á existéncia de asíntota horizontal en $x\to\pm\infty$.

Monotonia e Extremos

$$f'(x)=\frac{3x^2\cdot(x^3-1)-(x^3+1)\cdot 3x^2}{(x^3-1)^2}=-\frac{6x^2}{(x^3-1)^2}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 6x^2=0 \Leftrightarrow x=0$, logo existe un posíbel extremo relativo en $x=0$.

Ademais, $f'(x)<0\ \forall\ x\in Dom\ f$, xá que a derivada é a oposta dunha fración na que o numerador e o denominador son positivos, polo que a función é monótona decrecente en todo o seu domínio.

Curvatura e Pontos de Inflexión

$$f''(x)=-\frac{12x\cdot(x^3-1)^2-6x^2\cdot2\cdot(x^3-1)\cdot3x^2}{(x^3-1)^4}=-\frac{12x\cdot(x^3-1)-6x^2\cdot2\cdot3x^2}{(x^3-1)^3}=\frac{24x^4+12x}{(x^3-1)^3}$$

$$f''(x)=0 \;\Leftrightarrow\; 24x^4+12x=0 \;\Leftrightarrow\; 2x^4+x=0 \;\Leftrightarrow\; x\cdot(2x^3+1)=0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x=0 \\ x=-\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}=-\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2} \end{cases}$$

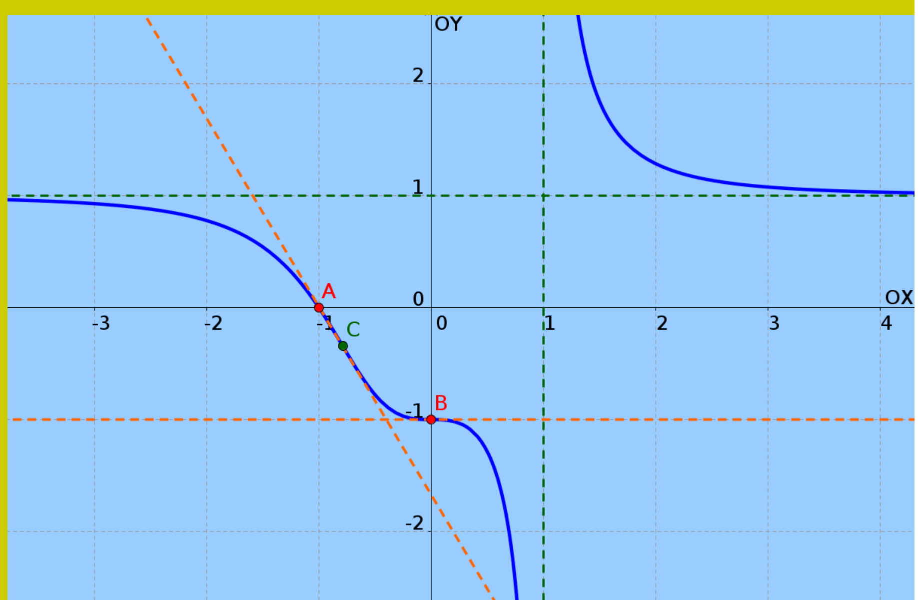
Estudando o signo de $f''(x)$, e tendo en conta que $-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\approx-0{,}79$, resulta:

- En $\left(-\infty,-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)$: $f''(-1)<0 \;\Rightarrow\; f''(x)<0 \;\; \forall\, x\in\left(-\infty,-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)$
- En $\left(-\frac{\sqrt[3]{4}}{2},0\right)$: $f''(-0.5)>0 \;\Rightarrow\; f''(x)>0 \;\; \forall\, x\in\left(-\frac{\sqrt[3]{4}}{2},0\right)$
- En $(0,1)$: $f''(0.5)<0 \;\Rightarrow\; f''(x)<0 \;\; \forall\, x\in(0,1)$
- En $(1,+\infty)$: $f''(2)>0 \;\Rightarrow\; f''(x)>0 \;\; \forall\, x\in(1,+\infty)$

Logo f é cóncava en $\left(-\infty,-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)\cup(0,1)$ e convexa en $\left(-\frac{\sqrt[3]{4}}{2},0\right)\cup(1,+\infty)$.

Isto confirma os pontos $x_1=-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ e $x_2=0$ como inflexións, xá que se produce en ambos un cámbio de curvatura. Isto implica ademais que en $x=0$ non hai extremo relativo.

$f\left(-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)=\dfrac{\left(-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)^3+1}{\left(-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)^3-1}=\dfrac{\frac{1}{2}}{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{3}$ $\quad f(0)=\frac{1}{-1}=-1$, logo as inflexións están en $P\left(-\frac{\sqrt[3]{4}}{2},-\frac{1}{3}\right)$ e $Q(0,-1)$.



2	

6. Quere-se facer un marco para un cartaz rectangular de $2\,m^2$ de superfície. O tramo horizontal do marco custa $5\,€/m$ e o vertical $8\,€/m$. Procurar as dimensións óptimas do cartaz para que o marco teña custo mínimo.

Se chamamos x e y respectivamente á base e á altura do cartaz, o custo do marco é $C=2x\cdot 5+2y\cdot 8=10x+16y$.

A área é $S=xy=2$, logo $y=\frac{2}{x}$; asi que o custo pode expresar-se como unha función de x da forma $C=10x+16y=10x+16\cdot\frac{2}{x}=10x+\frac{32}{x}$, que será a función a minimizar:

$$C(x)=10x+\frac{32}{x}=\frac{10x^2+32}{x}$$

A derivada é $C'(x)=10-\frac{32}{x^2}$, e igualando a 0 resulta:

$$C'(x)=0 \;\Leftrightarrow\; 10-\frac{32}{x^2}=0 \;\Leftrightarrow\; x^2=\frac{32}{10}=\frac{16}{5} \;\Leftrightarrow\; x=\pm\sqrt{\frac{16}{5}}=\pm\frac{4}{\sqrt{5}}=\pm\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

A solución $x=-\frac{4\sqrt{5}}{5}$ rexeita-se polas condicións do problema, co que obtemos un posíbel extremo relativo en $x=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

$C''(x)=\frac{64}{x^3}>0 \;\; \forall\; x>0$; logo $C''\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)>0$ e temos un mínimo relativo en $x=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

A altura será: $y=\frac{2}{x}=\frac{2}{\frac{4\sqrt{5}}{5}}=\frac{10}{4\sqrt{5}}=\frac{10\sqrt{5}}{20}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Logo as dimensións da xanela serán $\frac{4\sqrt{5}}{5}\approx 1{,}79\ m$ de base por $\frac{\sqrt{5}}{2}\approx 1{,}12\ m$ de altura.

O custo final do marco é $C\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)=\frac{10\cdot\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2+32}{\frac{4\sqrt{5}}{5}}=\frac{32+32}{\frac{4\sqrt{5}}{5}}=\frac{64\cdot 5}{4\sqrt{5}}=\frac{80\sqrt{5}}{5}=16\sqrt{5}\approx 35{,}78\ €$