MATEMÁTICA II / 2º BACHARELATO 19/11/2013

TEMA 1 CÁLCULO DIFERENCIAL

TOTAL	SUMA	NOTA
12		

NOME	GRUPO

1 1. i. Estudar a continuidade da función $f(x)=\begin{cases} a-x^2 & se \quad x\leqslant 1 \\ \dfrac{2}{x} & se \quad x>1 \end{cases}$ indicando, se é o caso, os tipos de discontinuidade que presenta.

1 ii. No caso de ser contínua en $x=1$, estudar a derivabilidade nese ponto utilizando a definición de derivada.

i. Ao ser unha función definida por intervalos, existe unha posíbel discontinuidade en $x=1$. Ademais, por ser a segunda expresión un cociente, poderia existir outra discontinuidade en $x=0$, ponto no que se anula o denominador, mas ao ser $0<1$ o ponto $x=0$ non está no domínio da expresión $\dfrac{2}{x}$, logo esta posibilidade desaparece.

En $x=1$ temos: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} a-x^2=a-1$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2}{x}=2$

Logo, f é contínua en $x=1 \Leftrightarrow a-1=2 \Leftrightarrow a=3$.

No caso de ser $a\neq 3$, f presenta unha discontinuidade de salto finito en $x=1$, xá que existen mas non coinciden os límites laterais.

ii. A derivabilidade en $x=1$ só ten sentido no caso de que f sexa contínua nese ponto, é dicer, se $a=3$. Neste caso a función é $f(x)=\begin{cases} 3-x^2 & se \quad x\leqslant 1 \\ \dfrac{2}{x} & se \quad x>1 \end{cases}$.

As derivadas laterais son:

$$f'(1^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{3-(1+h)^2-2}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{3-1-2h-h^2-2}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-2h-h^2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0^-}-2-h=-2$$

$$f'(1^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{2}{1+h}-2}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2-2-2h}{h\cdot(1+h)}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-2}{1+h}=-2$$

Logo coinciden as derivadas laterais: $f'(1^-)=f'(1^+)$.

Polo tanto, para $a=3$, a función é derivábel en $x=1$ e $f'(1)=-2$.

2

2. Calcular os límites:

i. $\lim_{x\to 0} \frac{x-\ln(x+1)}{\operatorname{sen} x}$

ii. $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{12x+4}-2\sqrt{3x-1}$

i. $\lim_{x\to 0} \frac{x-\ln(x+1)}{\operatorname{sen} x}$; é un caso de indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$, que se pode resolver utilizando a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\ln(x+1)}{\operatorname{sen} x}=\lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{1}{x+1}}{\cos x}=\lim_{x\to 0} \frac{x+1-1}{\cos x\cdot(x1)}=\lim_{x\to 0} \frac{x}{\cos x\cdot(x+1)}=0$$

ii. $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{12x+4}-2\sqrt{3x-1}$; é un caso de indeterminación do tipo $\infty-\infty$, que se pode resolver utilizando a multiplicación polo conxugado:

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{12x+4}-2\sqrt{3x-1}=\lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\sqrt{12x+4}-2\sqrt{3x-1}\right)\cdot\left(\sqrt{12x+4}+2\sqrt{3x-1}\right)}{\sqrt{12x+4}+2\sqrt{3x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty} \frac{12x+4-4\cdot(3x-1)}{\sqrt{12x+4}+2\sqrt{3x-1}}=\lim_{x\to +\infty} \frac{8}{\sqrt{12x+4}+2\sqrt{3x-1}}=0$$

1	
1	

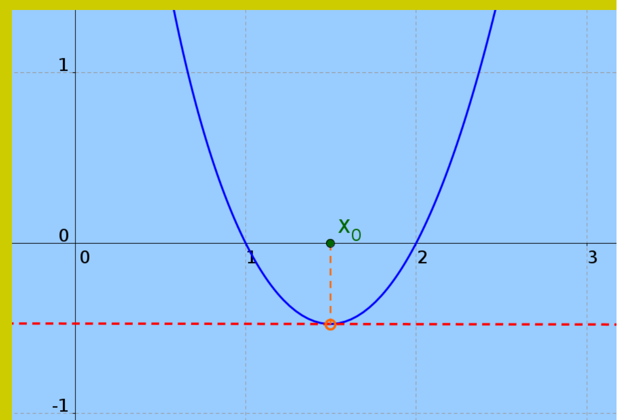
3. i. Enunciado e interpretación xeométrica do Teorema de Rolle.
   ii. Dada a función $f(x)=\ln x\cdot(2^x-4)$, demostrar que a ecuación $f'(x)=0$ ten solución e dar un intervalo no que sexa posíbel localizá-la.

i. *<u>Enunciado</u>*

Sexa $f(x)$ unha función contínua no intervalo $[a,b]$, derivábel en (a,b), e tal que $f(a)=f(b)$, entón existe algun elemento $c\in(a,b)\ /\ f'(c)=0$.

<u>Interpretación Xeométrica</u>

A continuidade e derivabilidade da función implican que ten tanxente en todos os pontos da sua gráfica no intervalo (a,b). Se ademais toma o mesmo valor nos extremos do intervalo, presentará polo menos un extremo relativo (máximo ou mínimo). Nese ponto a tanxente ten que ser horizontal, que equivale a afirmar que a pendente é nula, é dicer, que a derivada é nula.



ii. Como f é un produto de duas expresións, resulta fácil procurar dous valores para os que $f(x)=0$:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \ln x\cdot(2^x-4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x=0 \\ 2^x-4=0 \end{cases}$$

$$\ln x=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ e } 2^x-4=0 \Leftrightarrow 2^x=4 \Leftrightarrow x=2.$$

Logo no intervalo $[1,2]$ verifican-se as hipóteses do Teorema de Rolle, xá que f é contínua e derivábel en todo o seu domínio, que é $(0,+\infty)$, e ademais $f(1)=f(2)=0$.

Polo tanto $\exists c\in(1,2)\ /\ f'(c)=0$.

1.5 4. Determinar un polinómio de grau 3, con coeficiente principal 4 e que teña un ponto de inflexión en $Q(1,2)$ con tanxente en Q paralela á recta $y=-2x$.

O polinómio há de ter unha expresión do tipo $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, con $a=4$.

Por estar o ponto $Q(1,2)$ na gráfica, resulta $f(1)=2$.

Ademais, por ter en Q unha tanxente paralela á recta $y=-2x$, $f'(1)=-2$.

Finalmente, ao ser Q un ponto de inflexión, $f''(1)=0$.

Asi obtemos:

$f(1)=2 \Leftrightarrow a+b+c+d=2$

$f'(1)=-2 \Leftrightarrow 3a+2b+c=-2$

$f''(1)=0 \Leftrightarrow 6a+2b=0$

E como $a=4$, resulta o sistema $\begin{cases} 4+b+c+d=2 \\ 12+2b+c=-2 \\ 24+2b=0 \end{cases}$

$24+2b=0 \Leftrightarrow b=-12 \Rightarrow c=-2-12-2b=-14+24=10 \Rightarrow d=2-4-b-c=-2+12-10=0$

Logo a función será $f(x)=4x^3-12x^2+10x$.

2.5	

5. Estudar o domínio, continuidade, cortes cos eixos, asíntotas, monotonia e curvatura da función $f(x)=\frac{2x^2-8}{x}$ e realizar a sua representación gráfica.

Domínio e continuidade

Por ser cociente de dous polinómios, é unha función continua e derivábel en todo o seu domínio: $Dom\ f=\mathbb{R}-\{0\}$.

En $x=0$ temos: $\lim_{x\to 0}\frac{2x^2-8}{x}=\infty$.

Os límites laterais son: $\begin{cases}\lim_{x\to 0^-}\frac{2x^2-8}{x}=+\infty\\ \lim_{x\to 0^+}\frac{2x^2-8}{x}=-\infty\end{cases}$; logo f ten unha discontinuidade de tipo infinito en $x=0$ e polo tanto $x=0$ é unha asíntota vertical.

Cortes cos eixos e signo

Eixo OX : $f(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2-8=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$, logo a función corta ao eixo OX nos pontos $A(-2,0)$ e $B(2,0)$

Non hai corte co eixo OY debido a que $0\notin Dom\ f$.

O signo virá determinado polas discontinuidades e polos pontos de corte co eixo OX :

- En $(-\infty,-2)$: $f(-3)<0 \Rightarrow f(x)<0\ \ \forall\ x\in(-\infty,-2)$
- En $(-2,0)$: $f(-1)>0 \Rightarrow f(x)>0\ \ \forall\ x\in(-2,0)$
- En $(0,2)$: $f(1)<0 \Rightarrow f(x)<0\ \ \forall\ x\in(0,2)$
- En $(2,+\infty)$: $f(3)>0 \Rightarrow f(x)>0\ \ \forall\ x\in(2,+\infty)$

Asíntotas

Asíntotas horizontais: $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-8}{x}=\infty$, logo non existen asíntotas horizontais.

Asíntotas verticais: $x=0$.

Asíntotas oblícuas:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-8}{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-8}{x^2}=2 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-8}{x}-2x=\lim_{x\to\infty}\frac{-8}{x}=0$$

Logo existe unha asíntota oblícua de ecuación $y=2x$ tanto en $x\to+\infty$ como en $x\to-\infty$.

Monotonia e Extremos

$$f'(x)=\frac{4x^2-(2x^2-8)}{x^2}=\frac{2x^2+8}{x^2}$$

$2x^2+8\neq 0 \Rightarrow f'(x)\neq 0 \quad \forall \quad x\in Dom\ f$, logo non hai extremos relativos.

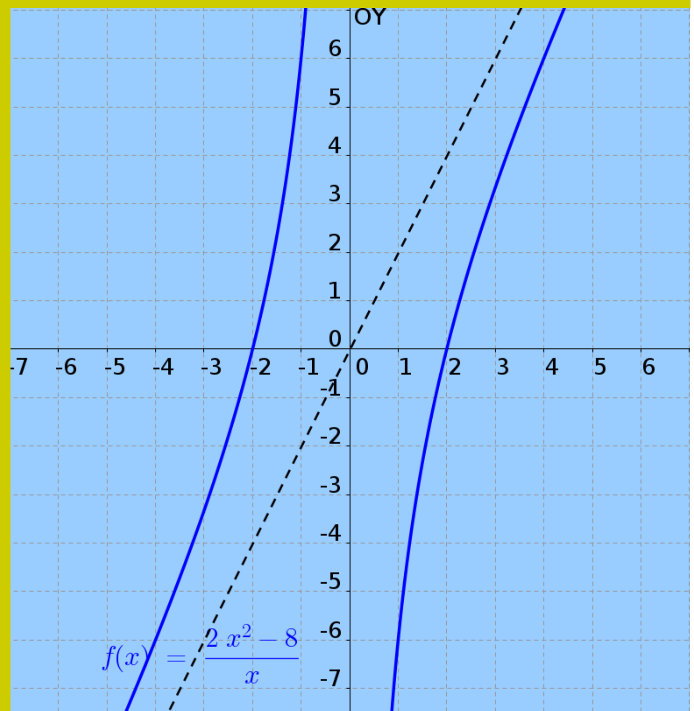
Ademais, $f'(x)>0 \quad \forall \quad x\in Dom\ f$, polo que f é monótona crecente en todo o seu domínio.

Curvatura e Pontos de Inflexión

$$f''(x)=\frac{4x^3-(2x^2+8)\cdot 2x}{x^4}=\frac{-16x}{x^4}=-\frac{16}{x^3}$$

$f''(x)\neq 0 \quad \forall \quad x\in Dom\ f$, polo que non hai pontos de inflexión.

Ademais $f''(x)>0 \quad \forall \quad x\in(-\infty,0)$ e $f''(x)<0 \quad \forall \quad x\in(0,+\infty)$; logo f é convexa en $(-\infty,0)$ e cóncava en $(0,+\infty)$.



2	

6. Procurar as dimensións dun rectángulo de diagonal 10 que teña perímetro máximo.

Se chamamos x e y respectivamente á base e altura do rectángulo, o perímetro é $p=2x+2y$.

Como a diagonal é $d=\sqrt{x^2+y^2}=10$, resulta $x^2+y^2=100 \Rightarrow y=\sqrt{100-x^2}$.

Logo o perímetro pode-se expresar como función de x : $p(x)=2x+2\cdot\sqrt{100-x^2}$, que é a función a maximizar.

$$p'(x)=2+2\cdot\frac{-2x}{2\cdot\sqrt{100-x^2}}=2-\frac{2x}{\sqrt{100-x^2}}=\frac{2\cdot\sqrt{100-x^2}-2x}{\sqrt{100-x^2}}$$

Igualando a 0 obtemos:

$$p'(x)=0 \Leftrightarrow 2\cdot\sqrt{100-x^2}-2x=0 \Leftrightarrow \sqrt{100-x^2}=x \Rightarrow 100-x^2=x^2 \Leftrightarrow 2x^2=100 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2=50 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{50} .$$

Rexeita-se a solución $x=-\sqrt{50}$ polas condicións do problema e resulta un posíbel extremo relativo en $x=\sqrt{50}$.

$$p''(x)=-\frac{2\cdot\sqrt{100-x^2}-2x\cdot\frac{-2x}{2\cdot\sqrt{100-x^2}}}{100-x^2}=-\frac{2\cdot(100-x^2)+2x^2}{(100-x^2)\cdot\sqrt{100-x^2}}=-\frac{100}{\sqrt{(100-x^2)^3}}$$

A expresión $p''(x)$ é sempre negativa, asi que $p(x)$ presenta un máximo relativo en $x=\sqrt{50}$.

Daquela as dimensións do rectángulo son:

$x=\sqrt{50}$ e $y=\sqrt{100-x^2}=\sqrt{100-(\sqrt{50})^2}=\sqrt{100-50}=\sqrt{50}$

Obtemos polo tanto un cuadrado de lado $\sqrt{50}$ e o seu perímetro é:

$$p(\sqrt{50})=2\sqrt{50}+2\sqrt{50}=4\sqrt{50}=20\sqrt{2}$$