MATEMÁTICA II / 2º BACHARELATO 08/05/2013

TEMAS 5 XEOMETRIA

TOTAL	SUMA	NOTA
10		

NOME	GRUPO

1 1. i. Definición e interpretación xeométrica do produto escalar de dous vectores libres.

1 ii. Calcular a proxección ortogonal do vector $\vec{u}=(2,-3,1)$ sobre $\vec{v}=(1,0,2)$ e o ángulo formado por ambos vectores.

i. No espazo vectorial V_3 dos vectores libres do espazo, define-se o produto escalar de dous vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e representa-se da forma $\vec{u}\cdot\vec{v}$, como o número real :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}:=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \in \mathbb{R}$$

A interpretación do produto escalar ten relación coa proxeción ortogonal dun vector sobre outro: dados os vectores libres $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sexa p a proxeción ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

É evidente que $p=|\vec{v}|\cdot cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$, e multiplicando ambos membros desa expresión por $|\vec{u}|$ obtén-se: $|\vec{u}|\cdot p=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\vec{u}\cdot\vec{v} \Leftrightarrow p=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|}$.

No caso particular de que o vector $\vec{u}$ sexa unitário, como ocorre por exemplo cos vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ da base canónica, a proxeción é $p=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{1}=\vec{u}\cdot\vec{v}$.

ii. A proxeción de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ é $p=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}=\frac{2\cdot1+(-3)\cdot0+1\cdot2}{\sqrt{1^2+0^2+2^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

Para o cálculo do ángulo faremos: $cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{4}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{70}}=\frac{4\sqrt{70}}{70}=\frac{2\sqrt{70}}{35}$,

logo $\theta(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=acos\left(\frac{2\sqrt{70}}{35}\right)$.

1	

2. i. Estudar a posición relativa dos planos $\alpha \equiv x - y + kz = 2$ e $\beta \equiv 2x + ky - 4z = 0$ dependendo do valor de k.

1	

ii. Para $k=0$ obter a ecuación do plano que contén á recta interseción de α e β e ao ponto $A(3,0,-1)$.

i. $\alpha \equiv x - y + kz = 2 \Leftrightarrow x - y + kz - 2 = 0$, logo as matrices do sistema son $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 2 & k & -4 \end{pmatrix}$ e $M^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k & -2 \\ 2 & k & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & k \end{vmatrix} = k+2$; $k+2=0 \Leftrightarrow k=-2$.

Logo se $k \neq -2$, $rang\ M = rang\ M^* = 2$ e o sistema é compatíbel indeterminado con 1 grau de liberdade, asi que os planos neste caso son secantes e determinan unha recta.

Se $k=-2$ a matriz ampliada é $M^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, polo que temos $rang\ M = 1$ e $rang\ M^* = 2$, asi que o sistema é incompatíbel e os planos son paralelos.

ii. Para $k=0$ o sistema é $\begin{cases} \alpha \equiv x - y - 2 = 0 \\ \beta \equiv 2x - 4z = 0 \end{cases}$, que son as ecuacións implícitas da recta interseción de ambos planos. Calquer outro plano que conteña a esta recta é combinación linear dos dous planos α e β (feixe de planos secantes); polo tanto, o plano pedido terá ecuación $\gamma \equiv \lambda \cdot (x - y - 2) + \mu \cdot (2x - 4z) = 0$.

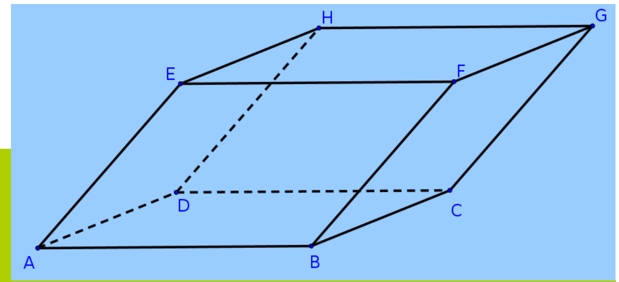
Como $A(3,0,-1) \in \gamma$, substituíndo obtemos: $\lambda + 10\mu = 0 \Leftrightarrow \lambda = -10\mu$.

Escollendo por exemplo $\mu = -1$ resulta $\lambda = 10$, asi que:

$\gamma \equiv 10 \cdot (x - y - 2) - (2x - 4z) = 0 \Leftrightarrow 8x - 10y + 4z - 20 = 0 \Leftrightarrow 4x - 5y + 2z - 10 = 0$

1.5	

3. Dados os pontos $A(0,1,1)$, $B(2,-1,0)$, $E(0,3,2)$ e $G(3,4,1)$, calcular a área da base e o volume do paralelepípedo da figura.



A área da base pode-se calcular como $S=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|$ e o volume como $V=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right]\right|$.

Logo abonda con obter o vértice D.

Vectorialmente resulta: $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CD}$ e xá que $\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{EA}=(0,-2,-1)$ e $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}=(-2,2,1)$, temos que $\overrightarrow{OD}=(3,4,1)+(0,-2,-1)+(-2,2,1)=(1,4,1)$.

$\overrightarrow{AB}=(2,-2,-1)$ e $\overrightarrow{AD}=(1,3,0)$, logo $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -2 & -1\\ 1 & 3 & 0\end{vmatrix}=3\vec{i}-\vec{j}+8\vec{k}$.

Asi $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=(3,-1,8)$ e $S=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|=\sqrt{3^2+(-1)^2+8^2}=\sqrt{74}\ u^2$.

$\overrightarrow{AE}=(0,2,1)$, e polo tanto $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right]=\begin{vmatrix}2 & -2 & -1\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=6 \Rightarrow V=6\ u^3$.

1.5	

4. Determinar a posición relativa das rectas $r \equiv \begin{cases} x-y=2 \\ x+z=1 \end{cases}$ e $s \equiv 2x=y+2=-z+1$ e obter, no caso de que sexa posíbel, o ponto interseción de ambas.

Transformando a ecuación de s en implícitas obtemos $s \equiv \begin{cases} 2x-y=2 \\ 2x+z=1 \end{cases}$, e polo tanto as matrices do sistema son $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $M^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Utilizando o método de Gauss temos:

$$M^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2-F_1 \\ F_3-2F_1 \\ F_4-2F_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_3-F_2 \\ F_4-2F_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} F_4-F_3 \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo $rang\ M = rang\ M^* = 3$ e o sistema é compatíbel determinado, asi que as rectas son secantes.

O sistema pode-se resolver proseguindo co método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2+F_3 \\ -1 \cdot F_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} F_1+F_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo o ponto interseción de ambas rectas é $P(0,-2,1)$.

1.5	

5. Obter o simétrico do ponto $P(2,-1,3)$ a respeito do plano cartesiano XY .

O plano XY ten como vector normal o vector $\vec{k}$ e a sua ecuación xeral é $z=0$.

Sexa a recta $r(P,\vec{k})$, perpendicular ao plano XY e que contén ao ponto P : $r \equiv \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \\ z=3+t \end{cases}$

A interseción $r \cap XY$ é: $3+t=0 \Leftrightarrow t=-3 \Rightarrow Q(2,-1,0)$.

Finalmente o simétrico de P a respeito do plano XY é o ponto P' tal que:

$\vec{OP'}=\vec{OP}+2\cdot\vec{PQ}=(2,-1,3)+2\cdot(0,0,-3)=(2,-1,-3)$

Asi que $P'=(2,-1,-3)$ é o simétrico.

1.5	

6. Obter os pontos da recta $r \equiv \begin{cases} 2x+z=1 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ que distan $10\ u$ do plano $\alpha \equiv y=3$.

Pasando a recta á sua forma paramétrica, con x como parámetro resulta $r \equiv \begin{cases} z=1-2x \\ y+z=x \end{cases}$.

De aquí obtemos $y=x-z=x-(1-2x)=3x-1$, logo $r \equiv \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y=3x-1 \\ z=1-2x \end{cases}$.

Calquer ponto $P \in r$ terá coordenadas $P(x, 3x-1, 1-2x)$, e a distáncia de P ao plano α é:

$$d(P,\alpha)=\frac{|3x-1-3|}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}}=|3x-4|$$

$$d(P,\alpha)=10 \iff |3x-4|=10 \iff 3x-4=\pm 10 \iff x=\frac{4\pm 10}{3}$$

Logo hai duas solucións, e substituíndo na ecuación da recta obtemos:

$$x_1=\frac{4+10}{3}=\frac{14}{3} \Rightarrow P_1\left(\frac{14}{3}, 13, -\frac{25}{3}\right) \text{ e } x_2=\frac{4-10}{3}=-2 \Rightarrow P_2(-2,-7,5).$$