MATEMÁTICA II / 2º BACHARELATO 18/03/2013

TEMAS 3 MATRICES E SISTEMAS LINEARES

4 DETERMINANTES E SISTEMAS LINEARES

TOTAL	SUMA	NOTA
11		

NOME	GRUPO

1	

1. i. Dar a definición de independéncia linear dun conxunto e aportar un exemplo de conxunto linearmente dependente e outro de conxunto linearmente independente.

1	

ii. Estudar o rango do conxunto $W=\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\-1\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}\right\}\subset M_{3,1}(\mathbb{R})$.

i. Nun espazo vectorial V, di-se que un subconxunto W é linearmente independente $:\Leftrightarrow$ a única combinación linear dos vectores de W que dá como resultado o vector nulo (elemento neutro da suma) é aquela que ten nulos todos os seus escalares.

O conxunto $W=\{(2,-1),(0,1)\}\subset\mathbb{R}^2$ é linearmente independente xá que $\alpha\cdot(2,-1)+\beta\cdot(0,1)=(0,0)\Leftrightarrow\alpha=\beta=0$.

O conxunto $W'=\{(2,-1,3),(0,1,-2),(2,1,-1)\}\subset\mathbb{R}^3$ é linearmente dependente xá que $\alpha\cdot(2,-1,3)+\beta\cdot(0,1,-2)+\gamma\cdot(2,1,-1)=(0,0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-\gamma\\\beta=-2\gamma\end{cases}$.

ii. Sexa $A=\begin{pmatrix}2&0&-3&-3\\-1&1&-1&2\\-1&-1&4&1\end{pmatrix}$ a matriz formada polas matrices coluna de W; asi $rang\ W=rang\ A$.

Utilizando o método de Gauss temos:

$$A=\begin{pmatrix}2&0&-3&-3\\-1&1&-1&2\\-1&-1&4&1\end{pmatrix}\begin{matrix}2F_2+F_1\\2F_3+F_1\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}2&0&-3&-3\\0&2&-5&1\\0&-2&5&-1\end{pmatrix}F_3+F_2\sim\begin{pmatrix}2&0&-3&-3\\0&2&-5&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Logo $rang\ W=rang\ A=2$.

1	

2. Calcular M^n, sabendo que $M=2I_3-A$ e que A é unha matriz cuadrada de orden 3 tal que $A^2=2A$.

$$M^2=(2I_3-A)\cdot(2I_3-A)=4I_3-4A+A^2=4I_3-4A+2A=4I_3-2A=2\cdot(2I_3-A)=2M$$

$$M^3=M^2\cdot M=2M\cdot M=2M^2=4M$$

$$M^4=M^3\cdot M=4M\cdot M=4M^2=8M$$

Asi, as poténcias anteriores, incluída a poténcia de exponente 1, ou sexa, a própria matriz M, responden á fórmula $M^n=2^{n-1}\cdot M$.

Se tomamos esta expresión e obtemos a partir dela a matriz M^{n+1} resulta:

$$M^{n+1}=M^n\cdot M=2^{n-1}\cdot M\cdot M=2^{n-1}\cdot M^2=2^{n-1}\cdot 2M=2^n\cdot M$$

Logo polo proceso de indución a fórmula $M^n=2^{n-1}\cdot M=2^{n-1}\cdot(2I_3-A)$ fica demostrada.

1	

3. i.Estudar se a matriz $B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & 4 & t\\ t & 0 & 5\end{pmatrix}$ é regular ou singular dependendo do valor de t.

1	

ii.Resolver, para $t=-1$, a ecuación matricial $BX-B=2I_3$, onde I_3 é a matriz unitária de orden 3. *[Nota: obter a inversa por determinantes.]*

i. $det\ B=\begin{vmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & 4 & t\\ t & 0 & 5\end{vmatrix}=-3t^2-8t+65$

A matriz será singular se $det\ B=0 \Leftrightarrow -3t^2-8t+65=0 \Leftrightarrow 3t^2+8t-65=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\ t=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot 3\cdot(-65)}}{6}=\frac{-8\pm\sqrt{844}}{6}=\frac{-4\pm\sqrt{211}}{3}$$

Logo B será regular $\Leftrightarrow$ $det\ B\neq 0 \Leftrightarrow t\neq\frac{-4\pm\sqrt{211}}{3}$

ii.Para $t=-1$ B é regular, asi que $\exists\ B^{-1}$, logo pode-se resolver a ecuación da forma: $BX-B=2I_3 \Leftrightarrow B\cdot(X-I_3)=2I_3 \Leftrightarrow X-I_3=B^{-1}\cdot 2I_3=2B^{-1} \Leftrightarrow X=2B^{-1}+I_3$

A inversa é $B^{-1}=\frac{1}{det\ B}\cdot Adj^t B=\frac{1}{70}\cdot\begin{pmatrix}20 & 15 & -5\\ -14 & 7 & 7\\ 4 & 3 & 13\end{pmatrix}$, logo:

$$X=2\cdot B^{-1}+I_3=\frac{2}{70}\cdot\begin{pmatrix}20 & 15 & -5\\ -14 & 7 & 7\\ 4 & 3 & 13\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{35}\cdot\left[\begin{pmatrix}20 & 15 & -5\\ -14 & 7 & 7\\ 4 & 3 & 13\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}35 & 0 & 0\\ 0 & 35 & 0\\ 0 & 0 & 35\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\frac{1}{35}\cdot\begin{pmatrix}55 & 15 & -5\\ -14 & 42 & 7\\ 4 & 3 & 48\end{pmatrix}$$

Nota: existe outra posibilidade para resolver X, que consiste en facer:

$$BX-B=2I_3 \Leftrightarrow BX=2I_3+B \Leftrightarrow X=B^{-1}\cdot(2I_3+B)=2B^{-1}+I_3$$

1	

4. i. Enunciar o Teorema de Rouché-Fröbenius.

1	

ii. Dado o sistema $\begin{cases} 2x-y+3z=5 \\ x-z=-2 \end{cases}$, engadir–lle, de xeito razonado, unha nova ecuación, de maneira que o sistema resultante sexa.

a. incompatíbel; b. compatíbel indeterminado (resolvé-lo neste caso); c. compatíbel determinado (resolvé-lo).

i. Sexa S un sistema linear e sexan M e M^* as matrices de coeficientes e ampliada do sistema; entón o sistema é compatíbel $\Leftrightarrow$ $rang\ M = rang\ M^*$. Ademais, neste caso, o sistema é determinado $\Leftrightarrow$ $rang\ M = n$ e será indeterminado $\Leftrightarrow$ $rang\ M < n$, onde n é o número de incógnitas de S . A diferenza entre o número de incógnitas e o rango de M chama-se grau de liberdade do sistema.

ii. O sistema $\begin{cases} 2x-y+3z=5 \\ x-z=-2 \end{cases}$ ten $rang\ M = rang\ M^* = 2$, asi que é un sistema compatíbel indeterminado.

Para engadir unha ecuación de xeito que resulte incompatíbel deberá ser $rang\ M = 2$ e $rang\ M^* = 3$, logo temos que engadir unha ecuación que sexa combinación linear das duas primeiras, agás os termos independentes. Por exemplo, pode ser a ecuación resultante de sumar ambas e mudar o valor do termo independente. Asi, o sistema $\begin{cases} 2x-y+3z=5 \\ x-z=-2 \\ 3x-y+2z=0 \end{cases}$ ten $rang\ M = 2$ e $rang\ M^* = 3$ e é polo tanto incompatíbel.

Para engadir unha ecuación de xeito que resulte compatíbel indeterminado deberá ser $rang\ M = 2$ e $rang\ M^* = 2$, logo temos que engadir unha ecuación que sexa combinación linear das duas primeiras, incluídos os termos independentes. Por exemplo, pode ser a ecuación resultante de sumar ambas. Asi, o sistema $\begin{cases} 2x-y+3z=5 \\ x-z=-2 \\ 3x-y+2z=3 \end{cases}$ ten $rang\ M = 2$ e $rang\ M^* = 2$, inferiores ao número de incógnitas, e polo tanto é compatíbel indeterminado con 1 grau de liberdade.

Para resolvé-lo abonda con resolver o sistema inicial, xá que a terceira ecuación é combinación linear das duas primeiras, traspoñendo previamente os termos en z ao segundo membro para aplicar a regra de Cramer: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 5-3z & -1 \\ z-2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}$ e $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 5-3z \\ 1 & z-2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}$.

Facendo os cálculos resulta $x = z-2$ e $y = 5z-9$.

Para engadir unha ecuación de xeito que resulte compatíbel determinado deberá ser $rang\ M = 3$ e $rang\ M^* = 3$, logo temos que engadir unha ecuación cuxo primeiro membro non sexa combinación linear das duas primeiras. Asi, o sistema $\begin{cases} 2x-y+3z=5 \\ x-z=-2 \\ x-y+2z=3 \end{cases}$ ten $rang\ M = 3$ e $rang\ M^* = 3$, igual ao número de incógnitas, e polo tanto é compatíbel determinado e por ser un sistema de Cramer, para resolvé-lo aplica-se a regra:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}=0\ ,\quad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}=1 \text{ e } z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}=2\ .$$

A solución é polo tanto $(0,1,2)$.

1.5 5. i.Estudar a compatibilidade do seguinte sistema en función do valor de k, indicando en que casos é un sistema de Cramer: $\begin{cases} x+ky+z=1 \\ x+y+z=k-1 \\ kx+y+2z=k \end{cases}$.

1.5 ii.Resolver o sistema anterior nos casos en que sexa posíbel, utilizando a regra de Cramer.

i.As matrices son $M=\begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $M^*=\begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k-1 \\ k & 1 & 2 & k \end{pmatrix}$.

$det\ M=\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 2 \end{vmatrix}=k^2-3k+2=(k-1)\cdot(k-2)$, logo $det\ M=0 \Leftrightarrow \begin{cases} k=1 \\ k=2 \end{cases}$.

No caso xeral ($k\neq 1$ e $k\neq 2$) temos que $rang\ M=rang\ M^*=3$, logo é un sistema compatíbel determinado e ademais é un sistema de Cramer, por ter $det\ M\neq 0$.

No caso $k=1$ a matriz ampliada é $M^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, de xeito que tomando as filas F_2 e F_3 e as colunas C_2 e C_3 temos $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1\neq 0$ e polo tanto $rang\ M=2$.

E tomando as filas F_1, F_2 e F_3 e as colunas C_2, C_3 e B temos $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$, asi que $rang\ M^*=3$, logo o sistema é incompatíbel.

Finalmente no caso $k=2$ a matriz ampliada é $M^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, e tomando as filas F_1 e F_2 e as colunas C_1 e C_2 temos $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$ e polo tanto $rang\ M=2$.

E tomando as filas F_1, F_2 e F_3 e as colunas C_1, C_2 e B temos $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0$, asi que $rang\ M^*=2$, logo o sistema é compatíbel indeterminado.

En resumo, o sistema é compatíbel determinado $\forall\ k\neq 1, k\neq 2$, compatíbel indeterminado con 1 grau de liberdade $\Leftrightarrow$ $k=2$ e incompatíbel $\Leftrightarrow$ $k=1$.

ii.A solución no caso xeral ($k\neq 1$ e $k\neq 2$) é:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & k & 1\\ k-1 & 1 & 1\\ k & 1 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & k & 1\\ 1 & 1 & 1\\ k & 1 & 2\end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & k-1 & 1\\ k & k & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & k & 1\\ 1 & 1 & 1\\ k & 1 & 2\end{vmatrix}}\ \text{e}\ z=\frac{\begin{vmatrix}1 & k & 1\\ 1 & 1 & k-1\\ k & 1 & k\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & k & 1\\ 1 & 1 & 1\\ k & 1 & 2\end{vmatrix}}.$$

Facendo os cálculos resulta $x=\frac{k}{1-k}$, $y=\frac{k-2}{1-k}$, $z=k+1$; logo a solución é:

$$\left(\frac{k}{1-k},\frac{k-2}{1-k},k+1\right)\ \forall\ k\neq 1,\ k\neq 2$$

No caso $k=2$, o determinante $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0$ indica que o sistema pode transformar-se en $\begin{cases}x+2y=1-z\\ x+y=1-z\end{cases}$, logo $x=\frac{\begin{vmatrix}1-z & 2\\ 1-z & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}}=1-z$ e $y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1-z\\ 1 & 1-z\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}}=0$ e a solución pode expresar-se da forma $(1-z,0,z)\ z\in\mathbb{R}$.

6. Razonar as seguintes afirmacións:

0.5 i. Sexa S un sistema linear homoxéneo de 4 ecuacións e 4 incógnitas e M a sua matriz de coeficientes, entón se M é singular o sistema ten algunha solución distinta da trivial.

0.5 ii. Un sistema linear con menos ecuacións que incógnitas sempre ten solución.

i. $M \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ é unha matriz singular $\Leftrightarrow$ $det\ M=0 \Rightarrow rang\ M<4$. Logo o sistema é compatíbel por ser homoxéneo e ademais é indeterminado xá que o rango é inferior ao número de incógnitas, asi que terá algunha solución ademais da trivial.

ii. É falso, xá que existen sistemas lineares con menos ecuacións que incógnitas que son incompatíbeis. Abonda con que $rang\ M<rang\ M^*$. Por exemplo o sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=-3 \end{cases}$.