MATEMÁTICA II / 2º BACHARELATO 07/03/2013

REC ☐ 1 CÁLCULO DIFERENCIAL EXS 1-6 (10 PTOS)
☐ 2 CÁLCULO INTEGRAL EXS 7-12 (9 PTOS)
☐ TODO EXCS 1, 3, 5, 6 & 7 – 11

TOTAL	SUMA	NOTA

NOTA: QUEN TEÑA QUE RECUPERAR AMBOS TEMAS DEBERÁ OBTER UN MÍNIMO DE 5 PTOS EN CADA UN DELES

NOME	GRUPO

1 | 1. i. Estudar a continuidade da función $f(x)=\frac{mx-1}{x^2-1}$ dependendo do valor de m e indicando os tipos de discontinuidade que presenta en cada caso.

0.5 | ii. Estudar se é posíbel estender o domínio de continuidade de $f(x)$.

i. A función $f(x)$ é contínua en todo o seu domínio, por ser cociente de funcións contínuas. Como $Dom\ f=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$, estudaremos en particular a continuidade en 1 e en -1 .

Para $x=1$ temos que $\lim_{x\to 1}\frac{mx-1}{x^2-1}=\frac{m-1}{0}$. Este límite será ∞ se $m\neq 1$ e será unha indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$ no caso de que $m=1$. Polo tanto se $m\neq 1$, $f(x)$ presentará unha discontinuidade de salto infinito en $x=1$.

Se $m=1$ resulta $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$, asi que $f(x)$ presentará unha discontinuidade de tipo evitábel en $x=1$.

Para $x=-1$ temos que $\lim_{x\to -1}\frac{mx-1}{x^2-1}=\frac{-m-1}{0}$. Este límite será ∞ se $m\neq -1$ e será unha indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$ no caso de que $m=-1$. Polo tanto se $m\neq -1$, $f(x)$ presentará unha discontinuidade de salto infinito en $x=-1$.

Se $m=-1$ resulta $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$, asi que $f(x)$ presentará unha discontinuidade de tipo evitábel en $x=-1$.

ii. O domínio de continuidade pode estender-se sempre que a función presente discontinuidades de tipo evitábel.
Deste xeito, se $m=1$, existe unha discontinuidade de tipo evitábel en $x=1$ que se pode evitar definindo $f(1):=\frac{1}{2}$.
De forma análoga, se $m=-1$, existe unha discontinuidade de tipo evitábel en $x=-1$ que se evita definindo $f(-1):=\frac{1}{2}$.
Se $m\neq\pm 1$ as discontinuidades en $x=1$ e $x=-1$ son de salto infinito e polo tanto non se pode estender nestes casos o domínio de continuidade.

1		2. Calcular os límites:

i. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{1-\sqrt{x+1}}$ ii. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cdot\cos x}{sen^2 x}$

i. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{1-\sqrt{x+1}}$

Substituíndo x por 0 obtemos $\frac{0}{0}$, indeterminación que podemos resolver multiplicando polo conxugado do denominador:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot(1+\sqrt{x+1})}{(1-\sqrt{x+1})\cdot(1+\sqrt{x+1})} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot(1+\sqrt{x+1})}{1-(x+1)} = \lim_{x\to 0} -\frac{x\cdot(1+\sqrt{x+1})}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} -(1+\sqrt{x+1}) = -2$$

ii. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cdot\cos x}{sen^2 x}$

Substituíndo x por 0 obtemos $\frac{0}{0}$, indeterminación que podemos resolver utilizando a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\cos x}{sen^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x\cdot sen\ x}{2\cdot sen\ x\cdot \cos x} = \frac{1}{0} = \infty$$

1		3. i. Estudar a derivabilidade de $f(x)=x^3-x+1$ en $x=2$ utilizando a definición de derivada.
1		ii. Obter a ecuación da recta tanxente á curva $f(x)$ no seu ponto de inflexión.

i. $f'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(2+h)^3-(2+h)+1-7}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{8+12h+6h^2+h^3-2-h-6}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{h^3+6h^2+11h}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h^2+6h+11 = 11$, logo $f(x)$ é derivábel en $x=2$ e $f'(2)=11$.

ii. Para obter as inflexións de $f(x)$ calcula-se a segunda derivada:

$f'(x)=3x^2-1$ e $f''(x)=6x$, e poo tanto $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x=0 \Leftrightarrow x=0$.

Ademais $f'''(x)=6\neq 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$, logo $f(x)$ presenta un ponto de inflexión en $P(0,1)$ no que a pendente é $f'(0)=-1$.

Calcularemos logo a tanxente á curva $f(x)$ en $x=0$, que será a recta $t \equiv y-1=f'(0)\cdot(x-0) \Leftrightarrow t \equiv y-1=-x \Leftrightarrow t \equiv y=1-x$

1	
0.5	

4. i. Enunciado e interpretación xeométrica do Teorema do Valor Médio do Cálculo Diferencial.
ii. Calcular o ponto ao que se refire este teorema para a función $f(x)=x^3-4x$ no intervalo $[-4,0]$.

i. Sexa unha función $f(x)$ contínua no intervalo $[a,b]$ e derivábel en (a,b); nestas circunstáncias $\exists\ c \in (a,b)\ /\ f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

A expresión $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ dá a taxa de variación méia da función no intervalo $[a,b]$, que é a pendente da recta secante que pasa polos pontos $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$, mentres que $f'(c)$ representa a taxa de variación instantánea de f en c , ou equivalentemente, a pendente da recta tanxente á curva no ponto $(c,f(c))$. A igualdade entre ambas expresións pode-se intrepretar como a existéncia de algun ponto c no intervalo (a,b) onde coinciden ambas pendentes, ou sexa, onde a secante e a tanxente son paralelas.

ii. $f'(x)=3x^2-4$, e a taxa de variación méia no intervalo $[-4,0]$ é:

$$\frac{f(0)-f(-4)}{0-(-4)}=\frac{0-(-48)}{4}=12$$

Logo igualando obtemos $3x^2-4=12 \Leftrightarrow 3x^2=16 \Leftrightarrow x^2=\frac{16}{3} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{16}{3}}=\pm\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Das duas posíbeis soluciéns a que responde ás condicións do teorema é $x_1=-\frac{4\sqrt{3}}{3} \in [-4,0]$ xá que $x_2=\frac{4\sqrt{3}}{3} \notin [-4,0]$.

2	

5. Facer o estudo e a representación gráfica da función $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$, indicando de forma explícita, como mínimo, os pontos de corte cos eixos, asíntotas, extremos relativos e pontos de inflexión.

Domínio, continuidade e derivabilidade

$Dom\ f=\mathbb{R}-\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ e f é contínua e derivábel en todo o seu domínio.

Cortes cos eixos

Corte OX : $f(x)\neq 0\ \forall\ x \in Dom\ f \Rightarrow$ f non presenta pontos de corte co eixo OX .
Corte OY : $0 \notin Dom\ f \Rightarrow$ f non presenta pontos de corte co eixo OY .

Simetria $f(-x)=\frac{(-x)^2+1}{-x}=\frac{x^2+1}{-x}=-\frac{x^2+1}{x}=-f(x) \Rightarrow f$ presenta unha simetria de xiro (simetria impar).

Asíntotas

- horizontais: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1}{x} = \infty$, logo non hai asíntotas horizontais.

- verticais: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+1}{x} = \infty$, asi que hai unha asíntota vertical en x=0, de xeito que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2+1}{x} = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+1}{x} = +\infty$.

- oblícuas:

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2} = 1$ e $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1}{x} - x = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1-x^2}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, asi que existe unha asíntota oblícua $y = x$, tanto no caso $x \to -\infty$ como no caso $x \to +\infty$.

Derivadas

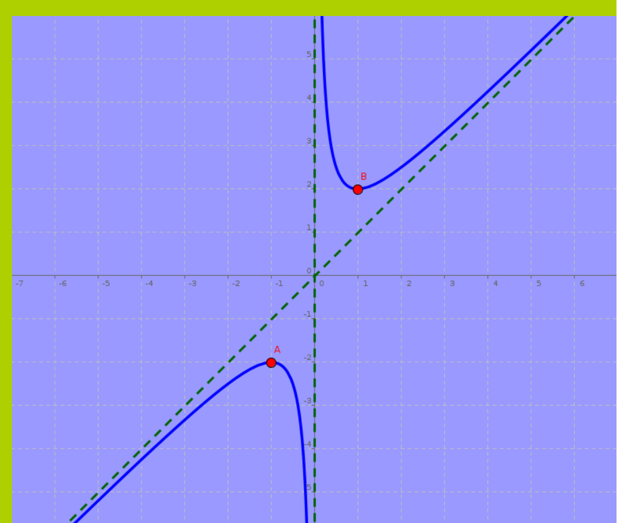
$$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2+1)}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} \; ; \; f''(x) = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2-1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

Extremos e monotonia

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$; como $f''(1) > 0$ e $f''(-1) < 0$, f presenta un mínimo relativo en $A(1,2)$ e un máximo relativo en $B(-1,-2)$.

$$f'(-2) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \;\; \forall \; x \in (-\infty, -1)$$
$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \;\; \forall \; x \in (-1, 0)$$
$$f'\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \;\; \forall \; x \in (0, 1)$$
$$f'(2) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \;\; \forall \; x \in (1, +\infty)$$

Polo tanto f é monótona crecente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ e monótona decrecente en $(-1, 0) \cup (0, 1)$.



Inflexións e curvatura

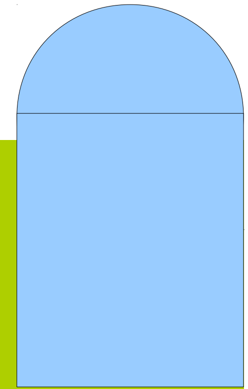
$f''(x) \neq 0 \;\; \forall \; x \in Dom\, f$; logo non presenta pontos de inflexión.

$$f''(-1) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \;\; \forall \; x \in (-\infty, 0)$$
$$f''(1) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \;\; \forall \; x \in (0, +\infty)$$

Logo f é cóncava en $(-\infty, 0)$ e convexa en $(0, +\infty)$.

2	

6. Calcular as dimensións (raio do semicírculo e altura do rectángulo) da figura sabendo que o seu perímetro é $10\ cm$ e que a súa área sexa máxima.



Se chamamos r ao raio do semicírculo e h á altura do rectángulo, resulta que o perímetro é $P(r,h)=\pi r+2(r+h)$ e a área $A(r,h)=\frac{\pi r^2}{2}+2rh$.

Como o perímetro há de ser $10\ cm$, temos que:

$P(r,h)=\pi r+2(r+h)=10 \Leftrightarrow h=\frac{10-\pi r-2r}{2}=5-\frac{\pi r}{2}-r=5-\left(\frac{\pi}{2}+1\right)r$ e asi a área resulta $A(r)=\frac{\pi r^2}{2}+2r\left(5-\left(\frac{\pi}{2}+1\right)r\right)=\frac{\pi r^2}{2}+10r-\pi r^2-2r^2=10r-\left(\frac{\pi}{2}+2\right)r^2$.

$A'(r)=10-(\pi+4)r$, e igualando a 0 obtemos: $A'(r)=10-(\pi+4)r=0 \Leftrightarrow r=\frac{10}{\pi+4}$.

$A''(r)=-(\pi+4)<0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$, logo temos un máximo da área para $r=\frac{10}{\pi+4}$.

$$h=5-\left(\frac{\pi}{2}+1\right)r=5-\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\cdot\frac{10}{\pi+4}=\frac{5\pi+20-5\pi-10}{\pi+4}=\frac{10}{\pi+4}$$

As dimensións da figura son, polo tanto, $r=\frac{10}{\pi+4}$, $h=\frac{10}{\pi+4}$ e a área máxima é:

$$A\left(\frac{10}{\pi+4}\right)=10\left(\frac{10}{\pi+4}\right)-\left(\frac{\pi}{2}+2\right)\left(\frac{10}{\pi+4}\right)^2=\frac{100\pi+400-50\pi-200}{(\pi+4)^2}=\frac{50\pi+200}{(\pi+4)^2}=\frac{50}{\pi+4}\ cm^2$$

| 1 | | 7. i. Definir os conceitos de integral definida e de función integral nun intervalo $[a,b]$, aportando algun exemplo de cada un deles.
| 1 | | ii. Enunciado do Teorema Fundamental do Cálculo Integral.
| 1 | | iii. Dada a función definida como $G(x)=\int_x^{\pi} t^5 \cos t\, dt$, calcular de xeito razonado $G(\pi)$ e $G'(\pi)$.

i. Chama-se integral definida dunha función $f(x)$ no intervalo $[a,b]$, e representa-se pola expresión $\int_a^b f(x)\,dx$, á area da rexión determinada pola curva $f(x)$ e o eixo OX no intervalo $[a,b]$. Esta área considera-se positiva se a función é positiva no intervalo $[a,b]$ e negativa se a función é negativa nese intervalo. No caso de que a función tome valores de signo positivo e negativo, a integral definida é a diferenza entre a suma das rexións positivas e as negativas.

Exemplo

A integral definida da función $f(x)=3x^2$ no intervalo $[2,5]$ é: $\int_2^5 3x^2\,dx=[x^3]_2^5=5^3-2^3=125-8=117\,u^2$.

Nota: Para obter esta área utiliza-se a Regra de Barrow.

Chama-se función integral dunha función $f(x)$ no intervalo $[a,b]$, e representa-se pola expresión $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, á función que a cada $x\in[a,b]$ asócia-lle a integral definida de $f(x)$ no intervalo $[a,x]$.

Exemplo

A función integral da función $f(x)=3x^2$ no intervalo $[2,5]$ é a función $F(x)=\int_2^x 3t^2\,dt=[t^3]_2^x=x^3-2^3=x^3-8$.

Nota: Para obter esta función utiliza-se tamén a Regra de Barrow.

ii. Dada unha función $f(x)$ contínua no intervalo $[a,b]$ a función $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, que se denomina función integral de $f(x)$ contínua no intervalo $[a,b]$, é unha primitiva de $f(x)$ en $[a,b]$, ou de outro xeito, $F'(x)=f(x)\ \forall\ x\in[a,b]$

iii. Pola própria definición da integral definida temos que $G(\pi)=\int_\pi^\pi t^5\cos t\,dt=0$.

Utilizando as propriedades da integral definida sabe-se que $G(x)=\int_x^\pi t^5\cos t\,dt=-\int_\pi^x t^5\cos t\,dt$, e polo tanto $G'(x)=-x^5\cos x$.

Asi que $G'(\pi)=-\pi^5\cdot\cos\pi=\pi^5$

1.5	

8. Calcular as integrais indefinidas:

i. $\int \frac{5\ dx}{2x^2-6x+4}$ ii. $\int x\ sen\,x\ dx$ iii. $\int x\ \sqrt{1+3x^2}\ dx$

i. Integrando por partes, fai-se $u=x$ e $dv=sen\,x\ dx$, de onde resulta $du=dx$ e $v=\int sen\,x\ dx=-cos\,x$; e substituindo temos:

$$\int x\ sen\,x\ dx = -x\cdot cos\,x - \int -cos\,x\ dx = -x\cdot cos\,x + \int cos\,x\ dx = -x\cdot cos\,x + sen\,x + C$$

ii. O polinómio $2x^2-6x+4$ descompón-se do xeito $2x^2-6x+4=2(x-1)(x-2)$, polo que $\int \frac{5\ dx}{2x^2-6x+4}=\frac{5}{2}\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)}$.

Aplicando o método de integración racional temos:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}=\frac{A\cdot(x-2)+B\cdot(x-1)}{(x-1)(x-2)} \Rightarrow 1=A\cdot(x-2)+B\cdot(x-1)$$

E obtemos os valores de A e B: $x=2 \Rightarrow B=1$ e $x=1 \Rightarrow A=-1$.

Asi que: $\int \frac{5\ dx}{2x^2-6x+4}=\frac{5}{2}\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)}=\frac{5}{2}\left(-\int \frac{dx}{x-1}+\int \frac{dx}{x-2}\right)=\frac{5}{2}ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C$

iii. É unha integral imediata (que se pode resolver como tal ou ben utilizando o método de substitución, chamando $t=1+3x^2$, de xeito que $dt=6x\ dx$).

$$\int x\ \sqrt{1+3x^2}\ dx=\frac{1}{6}\int 6x\ \sqrt{1+3x^2}\ dx=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}\cdot\sqrt{(1+3x^2)^3}+C=\frac{1}{9}\sqrt{(1+3x^2)^3}+C$$

1

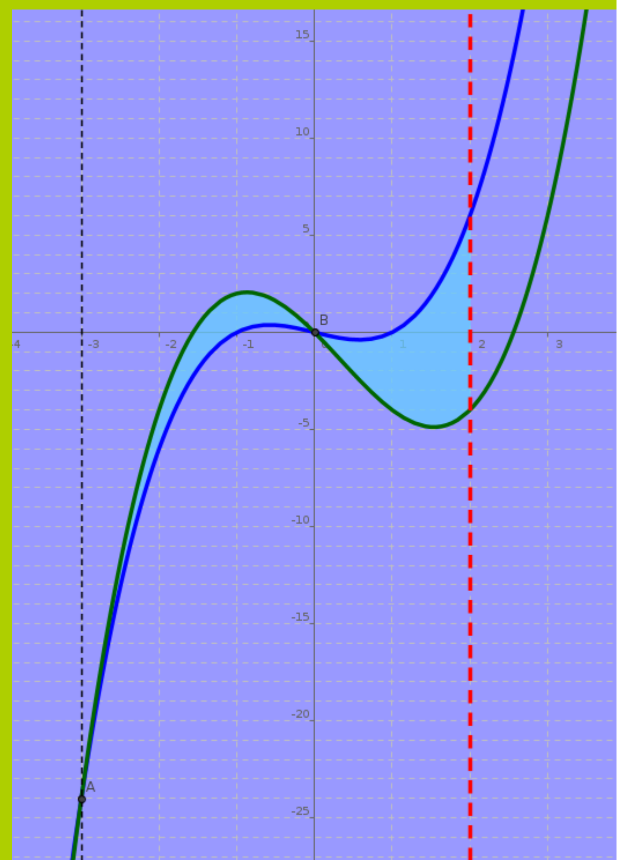
9. Calcular a área da rexión delimitada polas gráficas das funcións $f(x)=x^3-x$ e $g(x)=x^3-x^2-4x$ e a recta vertical $x=2$.

Facendo $f(x)=g(x)$ temos que $x^3-x=x^3-x^2-4x \Leftrightarrow x^2+3x=0 \Leftrightarrow x\cdot(x+3)=0$, logo as gráficas cortan-se en $x=0$ e $x=-3$.

A integral fará-se polo tanto en dous intervalos: $[-3,0]$ e $[0,2]$.

No primeiro intervalo temos que $f(-1)=0$ e $g(-1)=2$, polo que $g(-1)>f(-1) \Rightarrow g(x)\geqslant f(x)\ \forall\ x \in [-3,0]$.

No segundo intervalo $f(1)=0$ e $g(1)=-4$, polo que $f(1)>g(1) \Rightarrow f(x)\geqslant g(x)\ \forall\ x \in [0,2]$.



Asi que a área será $\int_{-3}^{0}(g(x)-f(x))\,dx+\int_{0}^{2}(f(x)-g(x))\,dx=$

$$=\int_{-3}^{0}(-x^2-3x)\,dx+\int_{0}^{2}(x^2+3x)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}\right]_{-3}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_{0}^{2}=-9+\frac{27}{2}+\frac{8}{3}+6=\frac{79}{6}\ u^2$$

1

10. Calcular o valor de $m>0$ tal que a área da rexión delimitada polas curvas $y=x^2$ e $y=mx$ sexa de $9\ u^2$.

$x^2=mx \Leftrightarrow x^2-mx=0 \Leftrightarrow x\cdot(x-m)=0$, logo as curvas cortan-se en $x=0$ e $x=m$.

Integraremos entón no intervalo $[0,m]$, onde a parábola $y=x^2$ e menor que a recta $y=mx$, asi que a área será:

$$\int_0^m (mx-x^2)\, dx=\left[\frac{mx^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^m=\frac{m^3}{2}-\frac{m^3}{3}=\frac{m^3}{6}$$

Como a área há de ser $9\ u^2$, resulta $\frac{m^3}{6}=9 \Leftrightarrow m^3=54 \Leftrightarrow m=\sqrt[3]{54}=3\sqrt[3]{2}$.

1

11. Obter unha primitiva $F(x)$ da función $f(x)=-\frac{2}{x^3}$ tal que $F(1)=1$ e calcular a área delimitada pola curva $F(x)$ no intervalo $[1,+\infty)$.

As primitivas de $f(x)$ son da forma $F(x)=\int -\frac{2}{x^3}dx=\frac{1}{x^2}+C$.

Logo $F(1)=1+C=1 \Leftrightarrow C=0$, e a primitiva buscada é $F(x)=\frac{1}{x^2}$.

Como a función é positiva en $(0,+\infty)$, a área debe entender-se como o límite de $\int_1^\lambda \frac{1}{x^2}dx$ cando $\lambda\rightarrow+\infty$, ou sexa:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx=\lim_{\lambda\rightarrow+\infty}\int_1^\lambda \frac{1}{x^2}dx=\lim_{\lambda\rightarrow+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^\lambda=\lim_{\lambda\rightarrow+\infty}\frac{-1}{\lambda}+1=1$$, asi que a área será $S=1\ u^2$.

1	
0.5	

12. i.Enunciado e interpretación xeométrica do Teorema do Valor Médio do Cálculo Integral.
ii.Calcular o valor ao que se refire o teorema para a función $y=x^2+1$ no intervalo $[-2,3]$.

i.Dada unha función f contínua no intervalo $[a,b]$, $\exists\ c \in (a,b)\ /\ \int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)$.

A expresión $\int_a^b f(x)\,dx$ representa a área da rexión delimitada pola gráfica de f co eixo OX no intervalo $[a,b]$ e $f(c)\cdot(b-a)$ representa a área dun rectángulo de base $b-a$ e altura $f(c)$. A igualdade entre ambas expresións equivale a afirmar que a área delimitada pola curva é igual á area do rectángulo de base o intervalo $[a,b]$ e certa altura $f(c)$, ou o que é o mesmo, que é posíbel "cuadrar" a área determinada pola curva.

ii. $\int_{-2}^{3}(x^2+1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{-2}^{3} = 12-\left(-\frac{8}{3}-2\right) = \frac{50}{3}$

Logo $\exists\ c \in (-3,2)\ /\ (c^2+1)\cdot 5=\frac{50}{3} \Leftrightarrow c^2+1=\frac{10}{3} \Leftrightarrow c^2=\frac{7}{3} \Leftrightarrow c=\pm\sqrt{\frac{7}{3}}$

Son válidas as solucións porque ambas pertencen ao intervalo $(-2,3)$.