MATEMÁTICA II / 2º BACHARELATO 15/01/2013
TEMA 2 CÁLCULO INTEGRAL

TOTAL	SUMA	NOTA
11		

NOME	GRUPO

1	

1. i. Definir os conceitos de primitiva e de integral indefinida dunha función, aportando algun exemplo de cada un deles.

0.5	

ii. Obter unha primitiva $F(x)$ da función $f(x)=x^3-2+\cos x$ tal que $F(0)=-2$.

i. Chama-se primitiva dunha función $f(x)$ a outra función $F(x)$ tal que $F'(x)=f(x)\ \forall\ x \in Dom\, f$.

Exemplo

A función $F(x)=x^3+4$ é unha primitiva de $f(x)=3x^2$ porque $F'(x)=3x^2$ en todo o domínio de $f(x)$, que neste caso é $\mathbb{R}$.

Chama-se integral indefinida dunha función $f(x)$, e representa-se pola expresión $\int f(x)\,dx$, ao conxunto formado por todas as primitivas de $f(x)$:

$$\int f(x)\,dx = \{F(x)\ /\ F'(x)=f(x)\ \forall\ x \in Dom\, f\}$$

Exemplo

A integral indefinida da función $f(x)=3x^2$ representa-se da forma $\int 3x^2\,dx$ e é o conxunto $\{F(x)=x^3+4+C\ /\ C \in \mathbb{R}\}$, ou de xeito reducido, o conxunto das funcións tais que $F(x)=x^3+4+C$, $C \in \mathbb{R}$.

ii. As primitivas de $f(x)$ son da forma $F(x) = \int (x^3-2+\cos x)\,dx = \frac{x^4}{4}-2x+\operatorname{sen} x+C$.

Como $F(0)=-2$ e $F(0) = \frac{0^4}{4}-2\cdot 0+\operatorname{sen} 0+C = C$, igualando obtemos $C=-2$, asi que a primitiva buscada é $F(x) = \frac{x^4}{4}-2x+\operatorname{sen} x-2$.

1.5	

2. Calcular as integrais indefinidas:

i. $\int x \ln x \, dx$ ii. $\int \frac{dx}{3x^2-12}$ iii. $\int x^3 e^{3x^4-2} \, dx$

i. Integrando por partes, fai-se $u=\ln x$ e $dv=x\,dx$, de onde resulta $du=\frac{1}{x}\,dx$ e $v=\int x\,dx=\frac{x^2}{2}$; e substituindo temos:

$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\int \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\frac{x^2}{4}+C =$$

$$=\frac{x^2}{4}\cdot(2\ln x-1)+C$$

ii. O polinómio $3x^2-12$ descompón-se do xeito $3x^2-12=3(x+2)(x-2)$, polo que $\int \frac{dx}{3x^2-12} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x+2)(x-2)}$.

Aplicando o método de integración racional temos:

$$\frac{1}{(x+2)(x-2)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}=\frac{A\cdot(x-2)+B\cdot(x+2)}{(x+2)(x-2)} \Rightarrow 1=A\cdot(x-2)+B\cdot(x+2)$$

E obtemos os valores de A e B :

$x=2 \Rightarrow 1=4B \Rightarrow B=\frac{1}{4}$

$x=-2 \Rightarrow 1=-4A \Rightarrow A=-\frac{1}{4}$

Asi que:

$$\int \frac{dx}{3x^2-12}=\frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x+2)(x-2)}=\frac{1}{3}\int \left(\frac{-\frac{1}{4}}{x+2}+\frac{\frac{1}{4}}{x-2}\right)dx=\frac{1}{12}\int \left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{12}(\ln|x-2|-\ln|x+2|)+C=\frac{1}{12}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$$

iii. É unha integral imediata (que se pode resolver como tal ou ben utilizando o método de substitución, chamando $t=3x^4-2$, de xeito que $dt=12x^3\,dx$).

$$\int x^3 e^{3x^4-2}\,dx = \frac{1}{12}\int e^t\,dt = \frac{1}{12}e^t+C = \frac{1}{12}e^{3x^4-2}+C$$

| 1 | | 3. i. Definir os conceitos de integral definida e de función integral nun intervalo $[a,b]$, aportando algun exemplo de cada un deles.

| 1 | | ii. Enunciado do Teorema Fundamental do Cálculo Integral.

| 1 | | iii. Dada a función definida como $G(x)=\int_x^0 t^5 \operatorname{sen} t\, dt$, calcular de xeito razonado $G(0)$ e $G'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

i. Chama-se integral definida dunha función $f(x)$ no intervalo $[a,b]$, e representa-se pola expresión $\int_a^b f(x)\, dx$, á area da rexión determinada pola curva $f(x)$ e o eixo OX no intervalo $[a,b]$. Esta área considera-se positiva se a función é positiva no intervalo $[a,b]$ e negativa se a función é negativa nese intervalo. No caso de que a función tome valores de signo positivo e negativo, a integral definida é a diferenza entre a suma das rexións positivas e as negativas.

Exemplo

A integral definida da función $f(x)=3x^2$ no intervalo $[2,5]$ é: $\int_2^5 3x^2\, dx = [x^3]_2^5 = 5^3-2^3=125-8=117\, u^2$.

Nota: Para obter esta área utiliza-se a Regra de Barrow.

Chama-se función integral dunha función $f(x)$ no intervalo $[a,b]$, e representa-se pola expresión $F(x)=\int_a^x f(t)\, dt$, á función que a cada $x \in [a,b]$ asócia-lle a integral definida de $f(x)$ no intervalo $[a,x]$.

Exemplo

A función integral da función $f(x)=3x^2$ no intervalo $[2,5]$ é a función $F(x)=\int_2^x 3t^2\, dt = [t^3]_2^x = x^3-2^3=x^3-8$.

Nota: Para obter esta función utiliza-se tamén a Regra de Barrow.

ii. Dada unha función $f(x)$ contínua no intervalo $[a,b]$ a función $F(x)=\int_a^x f(t)\, dt$, que se denomina función integral de $f(x)$ contínua no intervalo $[a,b]$, é unha primitiva de $f(x)$ en $[a,b]$, ou de outro xeito, $F'(x)=f(x)\ \forall\ x \in [a,b]$

iii. Pola própria definición da integral definida temos que $G(0)=\int_0^0 t^5 \operatorname{sen} t\, dt=0$.

Utilizando as propriedades da integral definida sabe-se que $G(x)=\int_x^0 t^5 \operatorname{sen} t\, dt = -\int_0^x t^5 \operatorname{sen} t\, dt$, e polo tanto $G'(x)=-x^5 \operatorname{sen} x$.

Asi que $G'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\left(\frac{\pi}{2}\right)^5 \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi^5}{32}$

2	

4. Calcular a área do recinto plano delimitado polas gráficas das funcións $f(x)=2x^3+x-5$ e $g(x)=-4x^2+7x-5$.

Igualando as duas expresións obteñen-se os pontos de corte de ambas gráficas:

$$2x^3+x-5=-4x^2+7x-5 \Leftrightarrow 2x^3+4x^2-6x=0 \Leftrightarrow 2x(x^2+2x-3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-3 \end{cases}$$

Asi que haberá que integrar nos intervalos $[-3,0]$ e $[0,1]$.

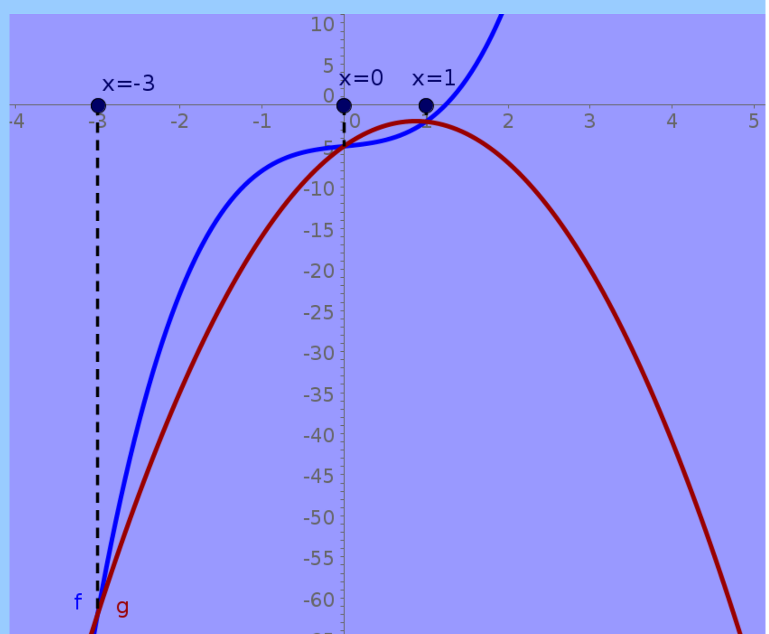
En $x=-1$ temos que $f(-1)=-8$ e $g(-1)=-16$, logo pola continuidade das funcións:

$$f(-1)>g(-1) \Rightarrow f(x)>g(x) \ \forall \ x \in [-3,0]$$

Facendo o mesmo para $x=\frac{1}{2}$ temos que $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{17}{4}$ e $g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{2}$, logo:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)<g\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f(x)<g(x) \ \forall \ x \in [0,1]$$

Polo tanto no intervalo $[-3,0]$ calcularemos $\int_{-3}^{0}(f(x)-g(x))\,dx$ e no intervalo $[0,1]$ calcularemos $\int_{0}^{1}(g(x)-f(x))\,dx$.



A área será entón:

$$S=\int_{-3}^{0}(f(x)-g(x))\,dx+\int_{0}^{1}(g(x)-f(x))\,dx=$$

$$=\int_{-3}^{0}(2x^3+4x^2-6x)\,dx+\int_{0}^{1}(-2x^3-4x^2+6x)\,dx=$$

$$=\left[\frac{2x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}-3x^2\right]_{-3}^{0}+\left[-\frac{2x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}+3x^2\right]_{0}^{1}=-\left(\frac{81}{2}-36-27\right)+\left(-\frac{1}{2}-\frac{4}{3}+3\right)=$$

$$=\frac{45}{2}+\frac{7}{6}=\frac{142}{6}=\frac{71}{3}\ u^2$$

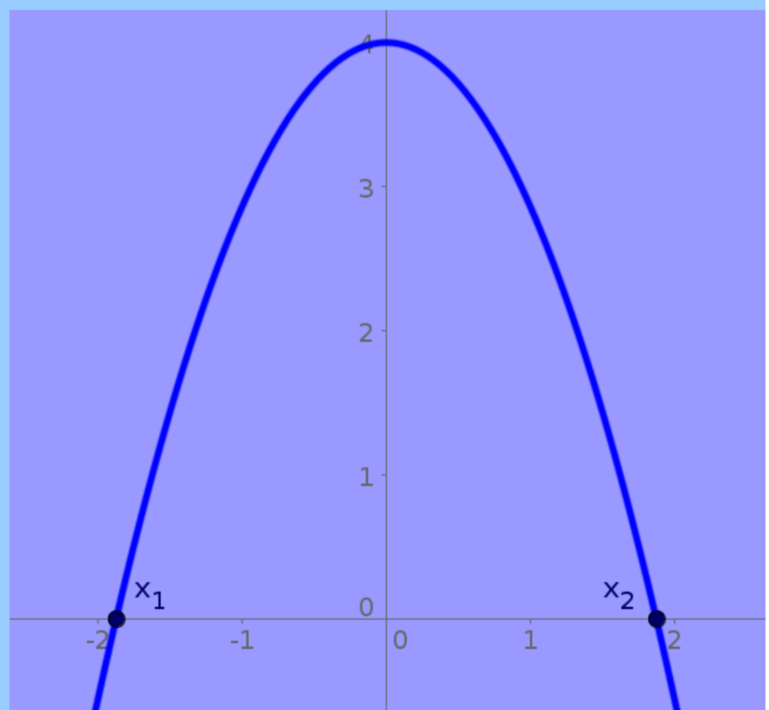
2	

5. Calcular o valor de $a<0$ tal que a área do recinto determinado pola gráfica da función $f(x)=ax^2+4$ co eixo OX sexa de 10 unidades.

Por ser $a<0$, $f(x)=ax^2+4$ é unha parábola cóncava de vértice $V(0,4)$ e que presenta ademais unha simetria par. Os seus pontos de corte co eixo OX son:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow ax^2+4=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{-\frac{4}{a}}$$

Se, por comodidade, chamamos $x_1=-\sqrt{-\frac{4}{a}}$ e $x_2=\sqrt{-\frac{4}{a}}$, a área será a integral $\int_{x_1}^{x_2}(ax^2+4)\,dx$ ou tamén, pola simetria, $S=\int_{x_1}^{x_2}(ax^2+4)\,dx=2\cdot\int_0^{x_2}(ax^2+4)\,dx$.



Logo:

$$S=2\cdot\int_0^{x_2}(ax^2+4)\,dx=2\cdot\left[\frac{ax^3}{3}+4x\right]_0^{x_2}=2\cdot\left(\frac{a\left(\sqrt{-\frac{4}{a}}\right)^3}{3}+4\cdot\sqrt{-\frac{4}{a}}\right)=2\cdot\left(-\frac{4}{3}\cdot\sqrt{-\frac{4}{a}}+4\cdot\sqrt{-\frac{4}{a}}\right)=$$

$$=\frac{16}{3}\cdot\sqrt{-\frac{4}{a}}$$

Como esta área há de ser $10,$ resulta que:

$$S=\frac{16}{3}\cdot\sqrt{-\frac{4}{a}}=10 \Leftrightarrow \sqrt{-\frac{4}{a}}=\frac{30}{16}=\frac{15}{8} \Rightarrow -\frac{4}{a}=\frac{225}{64} \Rightarrow a=-\frac{256}{225}.$$

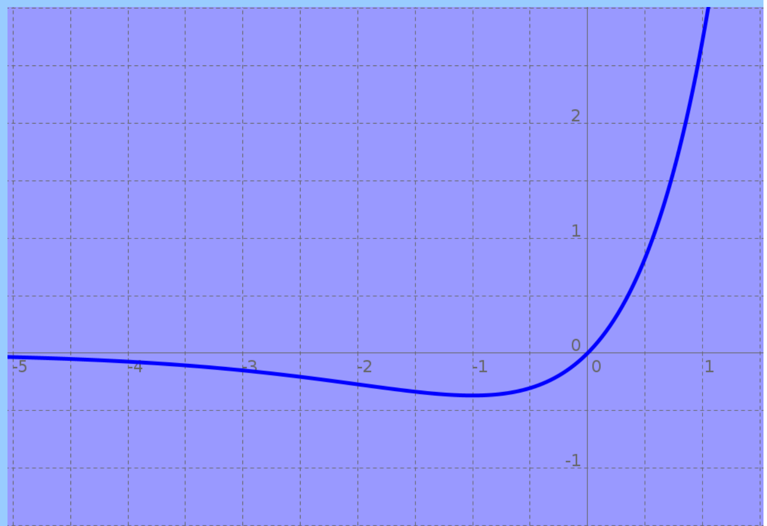
Finalmente a parábola que obtemos é $f(x)=-\frac{256}{225}x^2+4=\frac{900-256x^2}{225}$.

1	

6. Obter de forma razonada a integral definida $\int_{-\infty}^{0} x \cdot e^x \, dx$.

Esta integral debe entender-se como o límite de $\int_{\lambda}^{0} x \cdot e^x \, dx$ cando $\lambda \to -\infty$, ou sexa:

$$\int_{-\infty}^{0} x \cdot e^x \, dx = \lim_{\lambda \to -\infty} \int_{\lambda}^{0} x \cdot e^x \, dx$$



Integrando por partes, con $u = x$ e $dv = e^x \, dx$ obtemos $du = dx$ e $v = \int e^x \, dx = e^x$, asi que:

$$\int x \cdot e^x \, dx = x \cdot e^x - \int e^x \, dx = (x-1) \cdot e^x + C$$

Logo $\int_{-\infty}^{0} x \cdot e^x \, dx = \lim_{\lambda \to -\infty} \int_{\lambda}^{0} x \cdot e^x \, dx = \lim_{\lambda \to -\infty} \left[(x-1) \cdot e^x\right]_{\lambda}^{0} = \lim_{\lambda \to -\infty} -1 - (\lambda - 1) \cdot e^{\lambda} = -1$

Nota: $\lim_{\lambda \to -\infty} (\lambda - 1) \cdot e^{\lambda} = \lim_{\lambda \to -\infty} \frac{\lambda - 1}{e^{-\lambda}}$ é unha indeterminación do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, que se pode resolver utillizando a regra de L'Hôpital: $\lim_{\lambda \to -\infty} (\lambda - 1) \cdot e^{\lambda} = \lim_{\lambda \to -\infty} \frac{\lambda - 1}{e^{-\lambda}} = \lim_{\lambda \to -\infty} \frac{1}{-e^{-\lambda}} = 0$.