MATEMÁTICA II / 2º BACHARELATO 13/12/2012

REC 1 CÁLCULO DIFERENCIAL

TOTAL	SUMA	NOTA
11		

NOME	GRUPO

1	

1. Estudar a e b para que a función $f(x)=\begin{cases} ax+b & se \quad x\leqslant 0 \\ x^2+2x+3 & se \quad x>0 \end{cases}$ sexa contínua e derivábel en todo o seu domínio.
[Nota: utilizar a definición de derivada.]

Ao ser duas expresións polinómicas, e polo tanto contínuas e derivábeis en todo o seu domínio, a función f só pode presentar discontinuidades en $x=0$.

En $x=0$ temos:

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=b$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=3$

Para que exista o límite en $x=0$ han de coincidir ambos, polo que $b=3$.

Para ser derivábel deberán coincidir as derivadas laterais en $x=0$:

- $f'(0^-)=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{ah+b-b}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{ah}{h}=a$
- $f'(0^+)=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{h^2+2h+3-b}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{h^2+2h}{h}=$

  $=\lim\limits_{h\to 0^+} h+2=2$

Logo para ser derivábel en $x=0$ terá que ser $a=2$, polo que a función será $f(x)=\begin{cases} 2x+3 & se \quad x\leqslant 0 \\ x^2+2x+3 & se \quad x>0 \end{cases}$.

2	

2. Calcular os límites:

i. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x}-x$

ii. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x\cdot e^x}$

i. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x}-x$

É un caso de indeterminación do tipo $\infty-\infty$, que resolveremos utilizando a multiplicación polo conxugado:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x}-x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}$$

ii. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x\cdot e^x}$

É un caso de indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$, que resolveremos utilizando a Regra de L'Hôpital e simplificando: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x\cdot e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{e^x+x\cdot e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1$

1	
1	

3. i. Enunciado e interpretación xeométrica do Teorema de Rolle.

   ii. Demostrar que a función $f(x)=(x^2-4)\cdot e^{sen\,x}$ ten algun ponto do seu domínio no que a tanxente á gráfica é paralela ao eixo OX e dar un intervalo no que se poda localizar ese ponto.

i. <u>Enunciado</u>

Sexa $f(x)$ unha función contínua no intervalo $[a,b]$, derivábel en (a,b) e tal que $f(a)=f(b)$; entón existe algun elemento $c \in (a,b) \ / \ f'(c)=0$.

<u>Interpretación Xeométrica</u>

Ver texto

ii. A función $f(x)$ é contínua e derivábel en $\mathbb{R}$ por ser produto de funcións contínuas e derivábeis en $\mathbb{R}$. Logo se podemos atopar un intervalo $[a,b]$ de xeito que $f(a)=f(b)$, entón polo Teorema de Rolle poderíamos asegurar a existéncia de algun elemento $c \in (a,b) \ / \ f'(c)=0$, co que teríamos un ponto $P(c,f(c))$ no que a tanxente á gráfica é paralela ao eixo OX.

É imediato observar que facendo $f(x)=0$ resulta $(x^2-4)\cdot e^{sen\,x}=0 \Leftrightarrow x^2-4=0 \Leftrightarrow x=\pm 2$.

Logo a función está nas hipóteses do teorema no intervalo $[-2,2]$, asi que $\exists\, c \in (-2,2) \ / \ f'(c)=0$.

1.5	

4. Determinar unha función polinómica de grau 3 que teña un máximo relativo en $A(1,3)$ e un ponto de inflexión en $x=0$, no que a tanxente á curva sexa paralela á recta $y=2x-3$.

Unha función polinómica de grau 3 é da forma $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

A función pasa polo ponto $A(1,3)$ e polo tanto $f(1)=3 \Leftrightarrow a+b+c+d=3$ [1]

Ademais, ao ter un extremo relativo en $A(1,3)$, a derivada de f será nula en $x=1$. Como $f'(x)=3ax^2+2bx+c$, temos $f'(1)=0 \Leftrightarrow 3a+2b+c=0$ [2]

E por ter unha inflexión en $x=0$, será $f''(0)=0$, asi que $f''(x)=6ax+2b$ e $f''(0)=2b=0 \Leftrightarrow b=0$

Finalmente, ao ser a tanxente en $x=0$ paralela á recta $y=2x-3$, a derivada de f en $x=0$ será 2: $f'(0)=2 \Leftrightarrow c=2$.

Logo substituíndo na ecuación [2] obtemos $3a+2=0 \Leftrightarrow a=-\frac{2}{3}$.

E substituíndo na ecuación [1] temos $-\frac{2}{3}+2+d=3 \Leftrightarrow d=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$.

Logo a función é $f(x)=-\frac{2}{3}x^3+2x+\frac{5}{3}$, ou tamén $f(x)=-\frac{1}{3}(2x^3-6x-5)$.

2.5	

5. Facer o estudo e a representación gráfica da función $f(x)=x^2 \cdot e^x$, indicando de forma explícita, como mínimo, os seguintes elementos:
   i.pontos de corte cos eixos
   ii.asíntotas
   iii.extremos relativos
   iv.pontos de inflexión

<u>Domínio, continuidade e derivabilidade</u>

Por ser un produto de duas funcións contínuas e derivábeis en $\mathbb{R}$, f é tamén unha función contínua e derivábel en $\mathbb{R}$.

Non presenta periodicidade, por non ser trigonométrica, e tampouco presenta simetria: $f(-x)=(-x)^2 \cdot e^{-x}=\dfrac{x^2}{e^x}\neq \pm f(x)$

<u>Cortes cos eixos e signo</u>

Eixo OX : $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$, asi que a función corta ao eixo OX no ponto $O(0,0)$, que é tamén o ponto de corte co eixo OY .

f é sempre positiva (agás en $x=0$) xá que é produto de dous factores positivos.

<u>Asíntotas</u>

Asíntotas horizontais:
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 \cdot e^x$, que é unha indeterminación do tipo $\infty \cdot 0$. Resolve-se por L'Hôpital, transformando previamente o produto en cociente:
$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 \cdot e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{e^{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{e^{-x}}=0$, logo existe unha asíntota horizontal $y=0$ en $x\to-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \cdot e^x=+\infty$, logo non hai asíntota horizontal en $x\to+\infty$.

Asíntotas verticais: non existen por ser $Dom\, f=\mathbb{R}$.

Asíntotas oblícuas:
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2 \cdot e^x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot e^x=+\infty$, logo non existen asíntotas oblícuas.

<u>Monotonia e Extremos</u>

$f'(x)=2x\cdot e^x+x^2 \cdot e^x=e^x \cdot (x^2+2x)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x \cdot (x^2+2x)=0 \Leftrightarrow x^2+2x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases}$

- $(-\infty,-2)$: $f''(-3)<0 \Rightarrow f''(x)<0 \quad \forall \; x\in(-\infty,-2)$
- $(-2,0)$: $f'(-1)<0 \Rightarrow f'(x)<0 \quad \forall \; x\in(-2,0)$
- $(0,+\infty)$: $f'(1)>0 \Rightarrow f'(x)>0 \quad \forall \; x\in(0,+\infty)$

Logo f é crecente en $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ e decrecente en $(-2,0)$, presenta un máximo relativo en $x=-2$ (ponto $P(-2,4e^{-2})$) e un mínimo relativo en $x=0$ (ponto $O(0,0)$).

__Curvatura e Pontos de Inflexión__

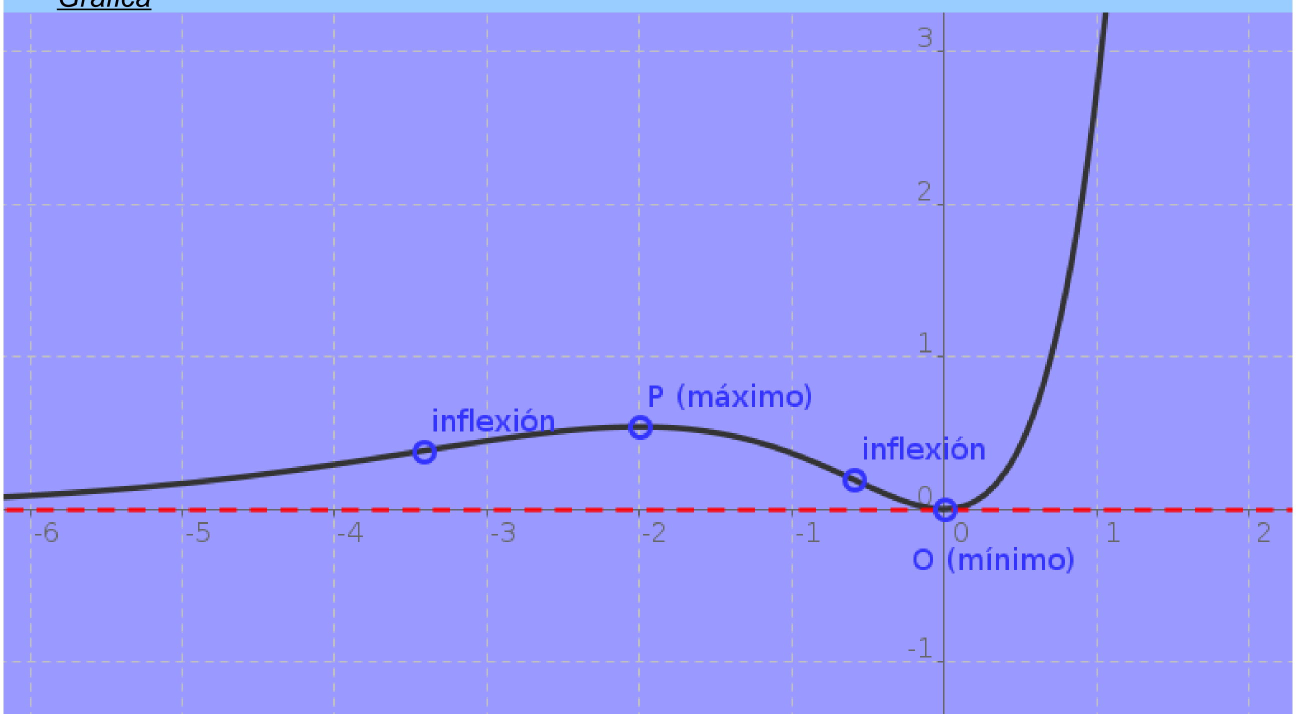
$$f''(x)=e^x\cdot(2x+2)+e^x\cdot(x^2+2x)=e^x\cdot(x^2+4x+2)$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow e^x\cdot(x^2+4x+2)=0 \Leftrightarrow x^2+4x+2=0 \Leftrightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{16-8}}{2}=-2\pm\sqrt{2}$$

- $(-\infty,-2-\sqrt{2})$: $f''(-4)>0 \Rightarrow f''(x)>0\ \forall\ x\in(-\infty,-2-\sqrt{2})$
- $(-2-\sqrt{2},-2+\sqrt{2})$: $f''(-2)<0 \Rightarrow f''(x)<0\ \forall\ x\in(-2-\sqrt{2},-2+\sqrt{2})$
- $(-2+\sqrt{2},+\infty)$: $f''(0)>0 \Rightarrow f''(x)>0\ \forall\ x\in(-2+\sqrt{2},+\infty)$

Logo f é convexa en $(-\infty,-2-\sqrt{2})\cup(-2+\sqrt{2},+\infty)$ e cóncava en $(-2-\sqrt{2},-2+\sqrt{2})$, e presenta pontos de inflexión en $x=-2\pm\sqrt{2}$.

__Gráfica__



2	

6. O custo do marco dunha xanela rectangular é de $12,5\,€$ por metro linear nos lados verticais e de $8\,€$ nos horizontais. Calcular as dimensións que há de ter unha xanela de $1\ m^2$ de superfície para que o custo do marco sexa o mínimo posíbel.

Se chamamos x á altura da xanela e y ao largo, expresadas ambas en metros, o custo do marco é:

$C(x,y)=2\cdot x\cdot 12,5+2\cdot y\cdot 8=25x+16y$ [1]

Como a área da xanela é $1\ m^2$, temos a restrición $xy=1$, equivalente a $y=\dfrac{1}{x}$.

Substituíndo en [1] obtemos a función $C(x)=25x+\dfrac{16}{x}$.

Derivando e igualando a 0 obtemos:

$$C'(x)=25-\frac{16}{x^2}=\frac{25x^2-16}{x^2}=0 \Leftrightarrow 25x^2-16=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{25}{16}}=\pm\frac{5}{4}=\pm 1.25$$

Descarta-se a solución negativa por non ser admisíbel.

Logo temos $x=1.25$ como posíbel extremo relativo.

$C''(x)=\dfrac{32}{x^3}>0 \quad \forall\ x>0$, logo $C''(1.25)>0$, asi que a función $C(x)$ presenta un mínimo relativo en $x=1.25$.

Polo tanto as dimensións da xanela serán $x=1.25\ m$ de altura, $y=0.8\ m$ de largo, e o custo mínimo do marco será $C(1.25)=25\cdot 1.25+\dfrac{16}{1.25}=31.25+12.8=44.05\ €$