MATEMÁTICA II / 2º BACHARELATO 22/11/2012

TEMA 1 CÁLCULO DIFERENCIAL

TOTAL	SUMA	NOTA
12.5		

NOME	GRUPO

1	

1. i. Estudar a continuidade e derivabilidade da función $f(x)=\frac{kx^2-8}{x+2}$.

1	

ii. Estudar se é posíbel estender o domínio da función de xeito que sexa derivábel en $\mathbb{R}$.

i. Ao ser un cociente de duas funcións polinómicas, e polo tanto contínuas e derivábeis en $\mathbb{R}$, a función f é tamén continua e derivábel no seu domínio, que é $\mathbb{R}-\{-2\}$.

En $x=-2$ temos: $\lim_{x\to -2} f(x) = \frac{4k-8}{0}$

Este límite é ∞ se $4k-8\neq 0 \Leftrightarrow k\neq 2$, caso no que a función f presentaria unha discontinuidade de salto infinito, e polo tanto non evitábel.

No caso de que $4k-8=0 \Leftrightarrow k=2$, o limite $\lim_{x\to -2}\frac{2x^2-8}{x+2}$ é indeterminado do tipo $\frac{0}{0}$ e pode-se resolver simplificando a fracción alxébrica:

$$\lim_{x\to -2}\frac{2x^2-8}{x+2} = \lim_{x\to -2}\frac{2(x^2-4)}{x+2} = \lim_{x\to -2}\frac{2(x-2)(x+2)}{x+2} = \lim_{x\to -2} 2(x-2) = -8$$

ii. A estensión da continuidade e derivabilidade da función require que a discontinuidade sexa de tipo evitábel, asi que ten que ser $k=2$, e a función será $f(x)=\frac{2x^2-8}{x+2}$. Para estender f a $\mathbb{R}$, abonda con definir $f(-2):=-8$ e daquela f convirte-se nunha función contínua en $\mathbb{R}$.

A función estendida é $\hat{f}(x)=\begin{cases}\frac{2x^2-8}{x+2} & se \quad x\neq -2\\ -8 \quad se \quad x=-2\end{cases}$, que tamén se pode expresar de xeito mais sintético $\ddot{f}(x)=2x-4$, que é por suposto contínua e derivábel en $\mathbb{R}$.

2	

2. Calcular os límites:

i. $\lim_{x \to 3} \frac{x-\sqrt{x+6}}{x-3}$

ii. $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x+1-e^x}$

i. $\lim_{x \to 3} \frac{x-\sqrt{x+6}}{x-3}$

É un caso de indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$, que resolveremos utilizando a multiplicación polo conxugado:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-\sqrt{x+6}}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-\sqrt{x+6})\cdot(x+\sqrt{x+6})}{(x-3)\cdot(x+\sqrt{x+6})} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2-(x+6)}{(x-3)\cdot(x+\sqrt{x+6})} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x^2-x-6}{(x-3)\cdot(x+\sqrt{x+6})} = \lim_{x \to 3} \frac{(x+2)\cdot(x-3)}{(x-3)\cdot(x+\sqrt{x+6})} = \lim_{x \to 3} \frac{x+2}{x+\sqrt{x+6}} = \frac{5}{6}$$

ii. $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x+1-e^x}$

É un caso de indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$, que resolveremos utilizando a Regra de L'Hôpital e simplificando: $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x+1-e^x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{1-e^x}$

Este límite segue a ser do tipo $\frac{0}{0}$, polo que podemos aplicar de novo L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x}{1-e^x} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{-e^x} = -2$$

1 3. i. Enunciado e interpretación xeométrica do Teorema do Valor Méio do Cálculo Diferencial.

0.5 ii. Calcular a taxa de variación méia da función $g(x)=x^3+5x$ no intervalo $[-2,3]$.

1 iii. Estudar se existe algun ponto no que a derivada da función coincida coa taxa de variación méia do apartado anterior e, en caso afirmativo, obter a ecuación da recta tanxente á curva nese ponto.

i. Enunciado

Sexa $f(x)$ unha función contínua no intervalo $[a,b]$ e derivábel en (a,b), entón existe algun elemento $c \in (a,b) \ / \ f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Interpretación Xeométrica

Ver texto

ii. A taxa de variación méia no intervalo $[-2,3]$ é:

$$TVM=\frac{g(3)-g(-2)}{3-(-2)}=\frac{42-(-18)}{5}=\frac{60}{5}=12$$

iii. A función g está nas hipóteses do teorema do Valor Méio por ser un polinómio, asi que há de existir algun elemento $c\in(-2,3)$ tal que a derivada coincide coa taxa de variación méia no intervalo $[-2,3]$.

$$g'(x)=3x^2+5=12 \Leftrightarrow 3x^2=7 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{7}{3}} \in (-2,3)$$

- En $x_1=\sqrt{\frac{7}{3}}$, $g\left(\sqrt{\frac{7}{3}}\right)=\frac{22}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}$ e o ponto da gráfica é $P_1=\left(\sqrt{\frac{7}{3}},\frac{22}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$;
- En $x_2=-\sqrt{\frac{7}{3}}$, $g\left(-\sqrt{\frac{7}{3}}\right)=-\frac{22}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}$ e o ponto da gráfica é $P_2=\left(-\sqrt{\frac{7}{3}},-\frac{22}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$.

Logo as rectas tanxentes á curva g nos pontos P_1 e P_2 son:

- En $P_1=\left(\sqrt{\frac{7}{3}},\frac{22}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$: $r_1\equiv y-\frac{22}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}=12\cdot\left(x-\sqrt{\frac{7}{3}}\right) \Leftrightarrow r_1\equiv y=12x-\frac{14}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}$
- En $P_2=\left(-\sqrt{\frac{7}{3}},-\frac{22}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$: $r_2\equiv y+\frac{22}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}=12\cdot\left(x+\sqrt{\frac{7}{3}}\right) \Leftrightarrow r_2\equiv y=12x+\frac{14}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}$

1.5 | 4. Determinar unha función polinómica de grau 3 que teña un máximo relativo en $P(0,4)$ e un ponto de inflexión en $Q(1,2)$.

Unha función polinómica de grau 3 é da forma $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

A función pasa polos pontos $P(0,4)$ e $Q(1,2)$, polo tanto:

$f(0)=4 \Leftrightarrow d=4$ [1]

$f(1)=2 \Leftrightarrow a+b+c+d=2$ [2]

Ademais, ao ter un extremo relativo en $P(0,4)$, a derivada de f será nula en $x=0$:

Como $f'(x)=3ax^2+2bx+c$, temos $f'(0)=0 \Leftrightarrow c=0$. [3]

E por ter unha inflexión en $Q(1,2)$, será $f''(1)=0$, asi que $f''(x)=6ax+2b$ e $f''(1)=6a+2b=0$. [4]

Substituindo $c=0$ e $d=4$ na ecuación [2] obtemos o sistema $\begin{cases} a+b+4=2 \\ 6a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-2 \\ 6a+2b=0 \end{cases}$

Restando á segunda ecuación o duplo da primeira resulta $4a=4 \Leftrightarrow a=1$, e polo tanto $b=-3$.

Logo a función é $f(x)=x^3-3x^2+4$.

2.5 5. Realizar o estudo completo e a representación gráfica da función $f(x)=\frac{x}{x^2-4}$.

Domínio, continuidade e derivabilidade

Por ser cociente de dous polinómios, é unha función continua e derivábel en todo o seu domínio: $Dom\ f=\mathbb{R}-\{-2,2\}$. Ademais é unha función non periódica, por non ser trigonométrica, e presenta unha simetria impar: $f(-x)=\frac{-x}{x^2-4}=-\frac{x}{x^2-4}=-f(x)$

En $x=-2$ temos: $\lim_{x\to -2} \frac{x}{x^2-4} = \infty$; e os límites laterais son: $\begin{cases} \lim_{x\to -2^-} \frac{x}{x^2-4} = -\infty \\ \lim_{x\to -2^+} \frac{x}{x^2-4} = +\infty \end{cases}$

En $x=2$ temos: $\lim_{x\to 2} \frac{x}{x^2-4} = \infty$; e os límites laterais son: $\begin{cases} \lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x^2-4} = -\infty \\ \lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x^2-4} = +\infty \end{cases}$

Asi, f ten duas discontinuidades de salto infinito en $x=-2$ e $x=2$, polo que presenta ademais duas asíntotas verticais.

Cortes cos eixos e signo

Eixo OX : $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$, asi que a función corta ao eixo OX no ponto $O(0,0)$, que é tamén o ponto de corte co eixo OY .

O signo virá determinado polas discontinuidades e polos pontos de corte co eixo OX :

- En $(-\infty,-2)$: $f(-3)<0 \Rightarrow f(x)<0 \quad \forall\ x\in(-\infty,-2)$
- En $(-2,0)$: $f(-1)>0 \Rightarrow f(x)>0 \quad \forall\ x\in(-2,0)$
- En $(0,2)$: $f(1)<0 \Rightarrow f(x)<0 \quad \forall\ x\in(0,2)$
- En $(2,\infty)$: $f(3)>0 \Rightarrow f(x)>0 \quad \forall\ x\in(2,\infty)$

Asíntotas

Asíntotas horizontais: $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-4}=0$, logo existe unha asíntota horizontal $y=0$ en $x\to\pm\infty$.

Asíntotas verticais: xá están localizadas.

Asíntotas oblícuas: non existen debido a que existe asíntota horizontal tanto en $x\to+\infty$ como en $x\to-\infty$.

Monotonia e Extremos

$$f'(x)=\frac{x^2-4-x\cdot 2x}{(x^2-4)^2}=\frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -x^2-4=0$, logo non hai extremos relativos.

A primeira derivada pode-se expresar da forma $f'(x)=-\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2}<0 \quad \forall\ x\in Dom\ f$, e polo tanto f é decrecente en todo o seu domínio.

Curvatura e Pontos de Inflexión

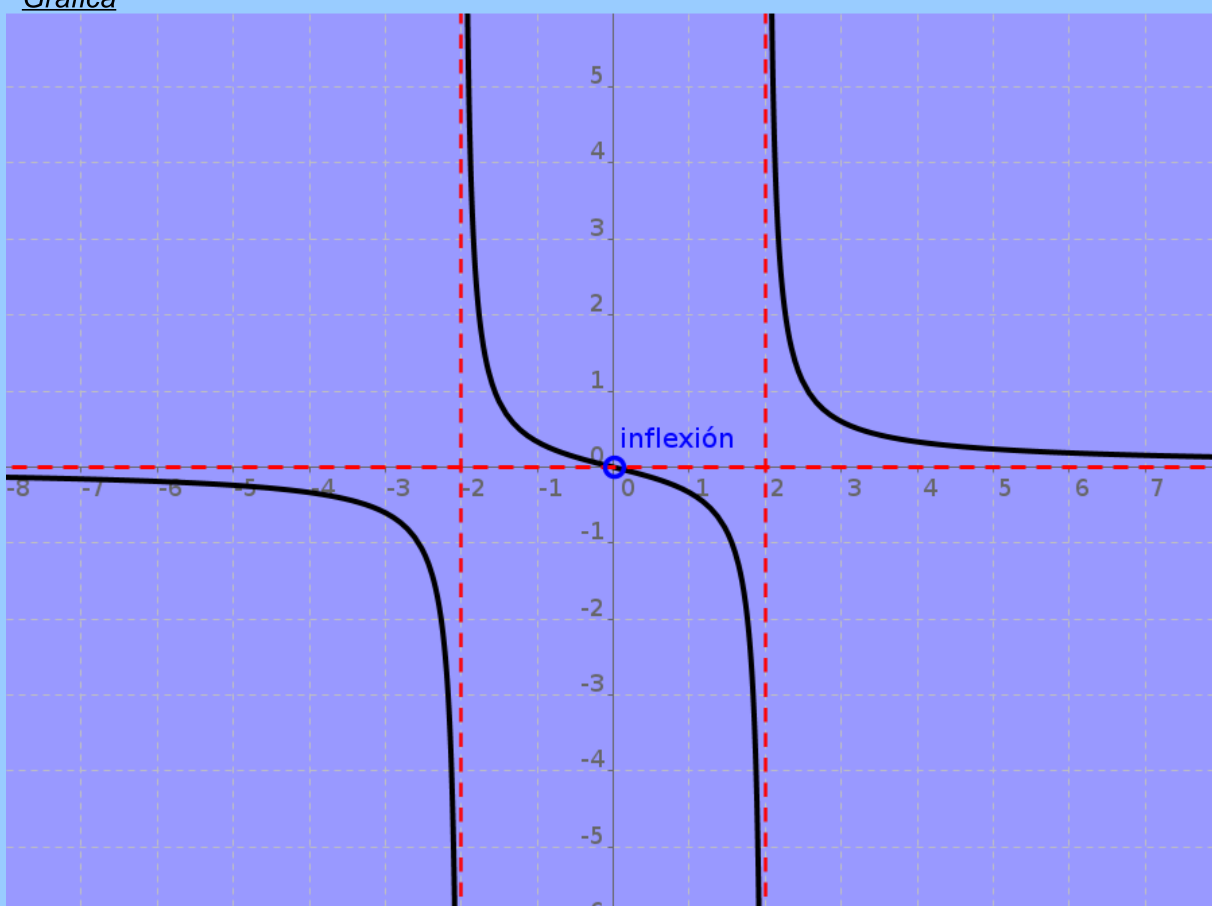
$$f''(x)=\frac{-2x\cdot(x^2-4)^2-(-x^2-4)\cdot 2\cdot(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^4}=\frac{(-2x)\cdot(x^2-4)+4x\cdot(x^2+4)}{(x^2-4)^3}=\frac{2x\cdot(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$, logo hai unha posíbel inflexión en $x=0$. Estudaremos o signo da segunda derivada nos intervalos:

- $(-\infty,-2)$: $f''(-3)<0 \Rightarrow f''(x)<0 \quad \forall\ x\in(-\infty,-2)$
- $(-2,0)$: $f''(-1)>0 \Rightarrow f''(x)>0 \quad \forall\ x\in(-2,0)$
- $(0,2)$: $f''(1)<0 \Rightarrow f''(x)<0 \quad \forall\ x\in(0,2)$
- $(2,\infty)$: $f''(3)>0 \Rightarrow f''(x)>0 \quad \forall\ x\in(2,\infty)$

Logo f é cóncava en $(-\infty,-2)\cup(0,2)$ e convexa en $(-2,0)\cup(2,+\infty)$.

Gráfica



2		6. Obter os pontos da gráfica de $xy=4$ que teñan a distáncia mínima do ponto $O(0,0)$.

O ponto ou pontos que nos piden terán coordenadas $P(x,y)$, que serán as duas variábeis do problema. Como o ponto P pertence á gráfica, as suas coordenadas x e y teñen que cumprir a condición $xy=4$. O obxectivo do problema é minimizar a distáncia de P a A, asi que $d(P,A)=\sqrt{x^2+y^2}$, que depende de x e y.

Utilizando a restrición, podemos expresar unha das variábeis en función da outra:

$$xy=4 \;\Rightarrow\; y=\frac{4}{x}$$

Asi, a distáncia, en función de x, será $d(x)=\sqrt{x^2+\left(\frac{4}{x}\right)^2}$. Derivando temos:

$$d'(x)=\frac{2x-\frac{32}{x^3}}{2\sqrt{x^2+\left(\frac{4}{x}\right)^2}}=\frac{x^4-16}{x^2\cdot\sqrt{x^4+16}}$$ e igualando a 0 resulta:

$$d'(x)=0 \;\Leftrightarrow\; x^4-16=0 \;\Leftrightarrow\; x^4=16 \;\Leftrightarrow\; x=\pm 2$$

Asi que os posíbeis extremos son $x=\pm 2$:

Para $x=2$ temos $y=2$ e para $x=-2$ temos $y=-2$, asi que os pontos de mínima distáncia son $P_1(2,2)$ e $P_2(-2,-2)$, e a mínima distáncia é $d(\pm 2)=\sqrt{(\pm 2)^2+\left(\frac{4}{\pm 2}\right)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$.

Nota: hán de ser mínimos con seguridade; seria imposíbel obter máximos debido a que sempre se poden atopar pontos da gráfica que disten de $O(0,0)$ tanto como queiramos.