MATEMÁTICA II / 2º BACHARELATO 15/05/2012

TEMAS 5 XEOMETRIA

TOTAL	SUMA	NOTA
9		

NOME	GRUPO

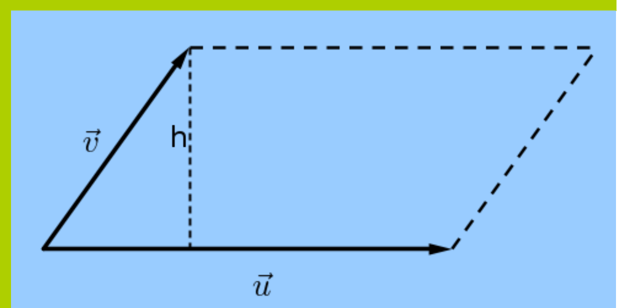
1	
1	

1. i. Definición e interpretación xeométrica do produto vectorial de dous vectores libres.
   ii. Obter a ecuación contínua da recta r que pasa polo ponto $P(-1,1,2)$ e é perpendicular aos vectores $\vec{u}=(2,-3,1)$ e $\vec{v}=(1,0,2)$.

i. No espazo vectorial V_3 dos vectores libres do espazo, define-se o produto vectorial de dous vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e indica-se da forma $\vec{u}\times\vec{v}$, como un novo vector que ten as seguintes características:

- módulo: $|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot sen(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$;
- direción: perpendicular aos vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$;
- sentido: conforme a regra do tirarrollas.

A interpretación xeométrica consiste no seguinte: dado o paralelogramo determinado polos vectores libres $\vec{u}$ e $\vec{v}$, trata-se de calcular a sua área.



Para iso multiplicaremos a base do paralelogramo, que coincide co módulo do vector $\vec{u}$, pola altura da figura, que se pode obter como o produto do módulo de $\vec{v}$ polo seno do ángulo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Asi, a área é $A=b\cdot h$, e como $b=|\vec{u}|$ e $h=|\vec{v}|\cdot sen(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$, resulta que a área do paralelogramo será: $A=b\cdot h=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot sen(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=|\vec{u}\times\vec{v}|$.

ii. O produto vectorial $\vec{u}\times\vec{v}$ é por definición un vector perpendicular a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, asi que pode servir como vector director de r; polo tanto a determinación linear da recta será $r(P,\vec{u}\times\vec{v})$.

$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=-6\vec{i}-3\vec{j}+3\vec{k}\equiv(-6,-3,3)$, logo a ecuación vectorial de r será:

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+t\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) \Leftrightarrow (x,y,z)=(-1,1,2)+t\cdot(-6,-3,3)$$

As paramétricas son: $\begin{cases}x=-1-6t\\ y=1-3t\\ z=2+3t\end{cases}$.

E a contínua será: $\dfrac{x+1}{-6}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-2}{3}$. Multiplicando esta expresión por -3 resulta a ecuación $\dfrac{x+1}{2}=y-1=2-z$, que é equivalente á anterior e sensibelmente mais cómoda.

1		2. i.Estudar a posición relativa dos planos $\alpha \equiv 3x+my-z-2=0$ e $\beta \equiv 6x-4y+mz=0$.
1		ii.Para $m=1$ obter a ecuación do plano paralelo a α e que contén ao ponto $A(1,2,1)$.

i.As matrices do sistema son $M=\begin{pmatrix} 3 & m & -1 \\ 6 & -4 & m \end{pmatrix}$ e $M^*=\begin{pmatrix} 3 & m & -1 & -2 \\ 6 & -4 & m & 0 \end{pmatrix}$.

$\begin{vmatrix} 3 & m \\ 6 & -4 \end{vmatrix}=-12-6m$; $-12-6m=0 \Leftrightarrow m=-2$.

Logo se $m\neq-2$, $rang\ M=rang\ M^*=2$, polo que temos un sistema compatíbel indeterminado con 1 grau de liberdade, asi que os planos neste caso son secantes e determinan unha recta.

Se $m=-2$ a matriz ampliada $M^*=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & -2 \\ 6 & -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, polo que temos $rang\ M=1$ e $rang\ M^*=2$, asi que o sistema é incompatíbel e os planos son paralelos.

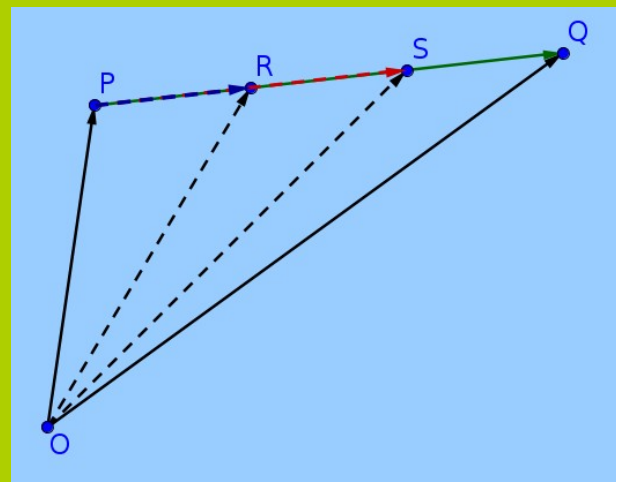
ii.Para $m=1$ o plano é $\alpha \equiv 3x+y-z-2=0$. Calquer outro plano β paralelo a α terá ecuación $\beta \equiv 3x+y-z+D=0$.

$A(1,2,1) \in \beta \Leftrightarrow 3\cdot 1+2-1+D=0 \Leftrightarrow D=-4 \Rightarrow \beta \equiv 3x+y-z-4=0$.

1	

3. Dados os pontos $P(3,4,1)$ e $Q(7,2,7)$, determinar as coordenadas dos pontos que dividen ao segmento $\overline{PQ}$ en trés partes iguais.

Se chamamos R e S aos pontos que trisecan o segmento $\overline{PQ}$, as suas coordenadas coincidirán coas dos seus vectores de posición $\vec{OR}$ e $\vec{OS}$.



Vectorialmente resulta:

$$\vec{PQ}=(7,2,7)-(3,4,1)=(4,-2,6)$$

Asi que os vectores de posición de R e S son:

$$\vec{OR}=\vec{OP}+\frac{1}{3}\cdot\vec{PQ}=(3,4,1)+\frac{1}{3}\cdot(4,-2,6)=\left(\frac{13}{3},\frac{10}{3},3\right)$$

$$\vec{OS}=\vec{OP}+\frac{2}{3}\cdot\vec{PQ}=(3,4,1)+\frac{2}{3}\cdot(4,-2,6)=\left(\frac{17}{3},\frac{8}{3},5\right)$$

E polo tanto $R\left(\frac{13}{3},\frac{10}{3},3\right)$ e $S\left(\frac{17}{3},\frac{8}{3},5\right)$.

1.5 4. Determinar a posicion relativa das rectas $r \equiv \begin{cases} x-y-z=2 \\ x-3z=2 \end{cases}$ e $s \equiv \frac{x}{2} = y-2 = -\frac{z}{3}$ e obter, no caso de que sexa posíbel, o ponto intersección de ambas.

As ecuacións implícitas das rectas son:

$$r \equiv \begin{cases} x-y-z=2 \\ x-3z=2 \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} x-y-z-2=0 \\ x-3z-2=0 \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x}{2} = y-2 = -\frac{z}{3} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} x-2y+4=0 \\ 3x+2z=0 \end{cases}$$

Logo a matriz ampliada é $M^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Poden-se calcular os rango utilizando o método de Gauss:

$$M^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \\ F_4-3F_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_3+F_2 \\ F_4-3F_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 11 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_4+11F_3 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 72 \end{pmatrix}.$$

Logo $rang\ M=3$ e $rang\ M^*=4$, asi que as rectas cruzan-se e polo tanto non hai ponto de interseción entre ambas: $r \cap s = \emptyset$.

1	

5. Obter o módulo do vector $\vec{v}$ sabendo que $(\vec{u}+\vec{v})^2=25$ e $(\vec{u}-\vec{v})^2=9$ e que $|\vec{u}|=4$.

Utilizando a definición de produto escalar obtemos:

$(\vec{u}+\vec{v})^2=25 \Leftrightarrow \vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2=25$

$(\vec{u}-\vec{v})^2=9 \Leftrightarrow \vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2=9$

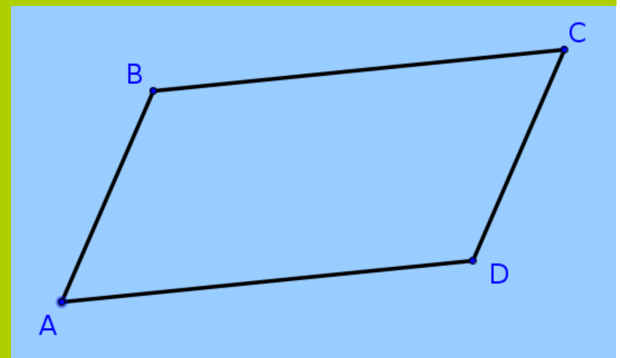
Restando ambas expresións resulta: $4\vec{u}\cdot\vec{v}=16 \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=4$

Utilizando a primeira expresión resulta: $\vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2=25 \Leftrightarrow |\vec{u}|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{v}|^2=25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |\vec{v}|^2=25-|\vec{u}|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}=25-16-8=1 \Leftrightarrow |\vec{v}|=1$

1.5	

6. No paralelogramo $ABCD$, no que se coñecen os vértices $A(1,2,1)$, $B(3,0,1)$ e $C(3,-2,3)$ calcular: as coordenadas do vértice D, a área do paralelogramo e a proxección de $\overrightarrow{AB}$ sobre $\overrightarrow{AC}$.



Como os vectores $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{BC}$ son equipolentes, as coordenadas de D poden obter-se vectorialmente da forma:

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}=$$

$$=(1,2,1)+(0,-2,2)=(1,0,3)$$

Logo $D(1,0,3)$.

A área é o módulo do produto vectorial: $A=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|$, con $\overrightarrow{AB}=(2,-2,0)$ e $\overrightarrow{AD}=(0,-2,2)$.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -2 & 0\\ 0 & -2 & 2\end{vmatrix}=-4\vec{i}-4\vec{j}-4\vec{k}=(-4,-4,-4)$$

Polo tanto a área será: $A=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|=|(-4,-4,-4)|=\sqrt{16+16+16}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$.

A proxección de $\overrightarrow{AB}$ sobre $\overrightarrow{AC}$ é:

$$p=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{(2,-2,0)\cdot(2,-4,2)}{|(2,-4,2)|}=\frac{12}{\sqrt{4+16+4}}=\frac{12}{\sqrt{24}}=\frac{12\sqrt{6}}{12}=\sqrt{6}.$$