MATEMÁTICA II / 2º BACHARELATO 17/02/2011

TEMA 3 MATRICES E SISTEMAS LINEARES

TOTAL	SUMA	NOTA
10		

NOME	GRUPO

2 |

1. Definir, aportando exemplos de cada un deles, os conceitos de **combinación linear** dun conxunto, **independéncia linear** dun conxunto, **dependéncia linear** dun conxunto e **rango** dun conxunto.
[Nota: non se pontuará nada no caso de que non se poñan os exemplos pedidos.]

Dado un espazo vectorial V e dado un conxunto de elementos $W=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$, chama-se **combinación linear** dos elementos de W a toda expresión do tipo $\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n$, con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. A expresión $\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n$ é tamén un elemento do espazo vectorial V.

Nun espazo vectorial V di-se que un conxunto $W=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ é **linearmente independente** se a única combinación linear dos elementos de W que dá como resultado o elemento neutro da suma é aquela que ten todos os escalares nulos:

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n = O \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$$

Nota: A combinación linear que ten todos os escalares nulos chama-se combinación linear trivial.

Nun espazo vectorial V di-se que un conxunto $W=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ é **linearmente dependente** se, ademais da trivial, existen mais combinacións lineares dos elementos de W que dán como resultado o elemento neutro da suma:

$$\exists \ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \ / \ \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n = O$$, con algun dos $\alpha_i \neq 0$.

Nun espazo vectorial V chama-se **rango** dun conxunto $W=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$, e representa-se por $rang\, W$ ao cardinal do maior subconxunto de W linearmente independente, ou equivalente, ao maior número de elementos de W que forman un subconxunto de W linearmente independente.

Mínimos 2º BACHARELATO

- ☐
- ☐
- ☐
- ☐
- ☐ *Área e perímetro de cuadrados,* ☐ *Sumas, restas, multiplicación e división* ☐ FICHA

Exemplos

No espazo vectorial $M_{3,1}(\mathbb{R})$, sexa o conxunto $W=\left\{\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}\right\}$.

A matriz $A=2\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-8\end{pmatrix}$ é unha combinación linear das matrices do conxunto W.

$$\alpha\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}3\alpha+2\beta+\gamma=0\\-\alpha+\beta+3\gamma=0\\2\beta-2\gamma=0\end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos $\alpha=\beta=\gamma=0$, asi que o conxunto W é linearmente independente.

O conxunto $W'=\left\{\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}\right\}$ é linearmente dependente xá que ao estabelecer a combinación linear resulta:

$$\alpha\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}3\alpha+2\beta+\gamma=0\\4\alpha+\beta+3\gamma=0\\2\beta-2\gamma=0\end{cases}$$

Resovendo o sistema temos que $\alpha=-\beta=-\gamma$, polo que existen mais solucións aparte da trivial, asi que o conxunto W' é linearmente dependente.

Neste mesmo conxunto W' ten rango 2, xá que é un conxunto linearmente dependente, no que o subconxunto formado polos seus dous primeiros elementos é independente:

$W''=\left\{\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right\}\subset W'$ é linearmente independente $\Rightarrow$ $rang\ W'=2$.

2. Dado o conxunto $B=\{(2,5,-2),(-3,1,0),(1,-5,3),(1,-4,4)\}$:

1 i. estudar a dependéncia linear e o rango de B ;

0.5 ii. suprimir de maneira razonada un vector do conxunto B de maneira que non varie o seu rango;

0.5 iii. suprimir de maneira razonada un vector de maneira que o rango de B diminua nunha unidade.

i. $\alpha(2,5,-2)+\beta(-3,1,0)+\gamma(1,-5,3)+\delta(1,-4,4)=(0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha-3\beta+\gamma+\delta=0 \\ 5\alpha+\beta-5\gamma-4\delta=0 \\ -2\alpha+3\gamma+4\delta=0 \end{cases}$

A matriz ampliada do sistema é $M^*=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -5 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Usando o método de Gauss obtemos:

$$M^*=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -5 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}^{\substack{2F_2-5F_1 \\ F_3+F_1}} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 17 & -15 & -13 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}^{17F_3+3F_2} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 17 & -15 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & 23 & 46 & 0 \end{pmatrix}$$

[Ver nota 1]

Esta matriz representa o sistema $\begin{cases} 2\alpha-3\beta+\gamma+\delta=0 \\ 17\beta-15\gamma-13\delta=0 \\ 23\gamma+46\delta=0 \end{cases}$.

Na terceira ecuación podemos considerar δ como parámetro (libre) e resolver γ , co que obtemos $\gamma=-\frac{46}{23}\delta=-2\delta$.

Na segunda ecuación resulta:

$$17\beta-15\gamma-13\delta=0 \Leftrightarrow \beta=\frac{1}{17}\cdot(15\gamma+13\delta)=\frac{1}{17}\cdot(15(-2\delta)+13\delta)=$$
$$=\frac{1}{17}\cdot(-30\delta+13\delta)=\frac{1}{17}\cdot(-17\delta)=-\delta$$

Finalmente substituíndo na primeira ecuación resulta:

$$2\alpha-3\beta+\gamma+\delta=0 \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{2}\cdot(3\beta-\gamma-\delta)=\frac{1}{2}\cdot(3(-\delta)-(-2\delta)-\delta)=\frac{1}{2}\cdot(-2\delta)=-\delta$$

A solución do sistema é polo tanto $(-\delta,-\delta,-2\delta,\delta)\ \ \delta\in\mathbb{R}$.

Ao non ser a solución única, B é un conxunto linearmente dependente.

Escollendo algun valor para δ obtemos unha solución particular: por exemplo, para $\delta=1$, resulta $\alpha=-1$, $\beta=-1$ e $\gamma=-2$.

Con estes valores podemos estabelecer a seguinte combinación linear:

[1] $-(2,5,-2)-(-3,1,0)-2(1,-5,3)+(1,-4,4)=(0,0,0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1,-4,4)=(2,5,-2)+(-3,1,0)+2(1,-5,3)$

Deste xeito o vector $(1,-4,4)$ é combinación linear dos outros trés vectores do conxunto B. Daquela estudaremos a dependéncia linear do subconxunto $B'=\{(2,5,-2),(-3,1,0),(1,-5,3)\}$.

$$\alpha(2,5,-2)+\beta(-3,1,0)+\delta(1,-5,3)=(0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha-3\beta+\gamma=0 \\ 5\alpha+\beta-5\gamma=0 \\ -2\alpha+3\gamma=0 \end{cases}$$

A matriz ampliada é agora:

$$M^*=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{2F_2-5F_1 \\ F_3+F_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 17 & -15 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \overset{17F_3+3F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 17 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 23 & 0 \end{pmatrix}$$

O novo sistema equivalente é $\begin{cases} 2\alpha-3\beta+\gamma=0 \\ 17\beta-15\gamma=0 \\ 23\gamma=0 \end{cases}$, de onde obtemos de xeito imediato $\alpha=\beta=\gamma=0$. Ao ser a solución única, o subconxunto B' é linearmente independente, polo que $rang\ B=rang\ B'=3$.

Nota 1: á vista da matriz $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 17 & -15 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & 23 & 46 & 0 \end{pmatrix}$ *xá se pode xustificar que* $rang\ B=3$, *por ser unha matriz triangular na que non existen filas nulas.*

ii. Ao suprimir o vector $(1,-4,4)$, como temos feito en [1], o rango de B non varia.

iii. Como resultado da igualdade [1], é posíbel expresar calquer dos catro vectores como combinación linear dos outros trés. Por este motivo, sempre que suprimamos calquer dos vectores do conxunto orixinal B o seu rango segue a ser 3. Asi que é imposíbel suprimir algun deles de xeito que o rango pase a ser dous.

1 3. i.Estudar o rango da matriz $M=\begin{pmatrix}2 & 0 & 3 & 4\\ -1 & -3 & 3 & 4\\ 1 & 5 & 2 & 0\\ 0 & 4 & 2 & 2\end{pmatrix}$.

1 ii.Se M é a matriz de coeficientes dun sistema linear homoxéneo, que se pode afirmar da compatibilidade dese sistema?

i. $$M=\begin{pmatrix}2 & 0 & 3 & 4\\ -1 & -3 & 3 & 4\\ 1 & 5 & 2 & 0\\ 0 & 4 & 2 & 2\end{pmatrix}^{\substack{2F_2+F_1\\ 2F_3-F_1}} \sim \begin{pmatrix}2 & 0 & 3 & 4\\ 0 & -6 & 9 & 12\\ 0 & 10 & 1 & -4\\ 0 & 4 & 2 & 2\end{pmatrix}^{\substack{3F_3+5F_2\\ 3F_4+2F_2}} \sim \begin{pmatrix}2 & 0 & 3 & 4\\ 0 & -6 & 9 & 12\\ 0 & 0 & 48 & 48\\ 0 & 0 & 24 & 30\end{pmatrix}^{2F_4-F_3} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix}2 & 0 & 3 & 4\\ 0 & -6 & 9 & 12\\ 0 & 0 & 48 & 48\\ 0 & 0 & 0 & 12\end{pmatrix}$$

Asi temos $rang\ M=4$.

ii. Se M fose a matriz de coeficientes dun sistema linear homoxéneo, a matriz ampliada seria

$$M^*=\begin{pmatrix}2 & 0 & 3 & 4 & 0\\ -1 & -3 & 3 & 4 & 0\\ 1 & 5 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 2 & 2 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2 & 0 & 3 & 4 & 0\\ 0 & -6 & 9 & 12 & 0\\ 0 & 0 & 48 & 48 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0\end{pmatrix}$$

O sistema resultaria neste caso compatíbel determinado, é dicer, de solución única, que seria forzosamente a solución trivial, por ser un sistema homoxéneo.

2	

4. Estudar a compatibilidade do sistema $S \equiv \begin{cases} -3x+y+2z=-3 \\ 5x-3z=5 \\ 2x+y-z=2 \end{cases}$ e resolvé-lo, no caso de que sexa posíbel.

A matriz ampliada do sistema é:

$$M=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\substack{3F_2+5F_1 \\ 3F_3+2F_1}}{\sim} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_3-F_2}{\sim} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Resulta entón que aparece unha fila trivial F_3. Das filas non triviais F_1 e F_2 obtemos:

$$\begin{cases} -3x+y+2z=-3 \\ 5y+z=0 \end{cases}$$

Resolvendo na segunda ecuación resulta $y=-\frac{1}{5}z$ [1] e substituíndo na primeira ecuación fica $x=-\frac{1}{3}(-y-2z-3)=-\frac{1}{3}\left(-\left(-\frac{z}{5}\right)-2z-3\right)=-\frac{1}{3}\left(\frac{z-10z-15}{5}\right)=-\frac{1}{3}\left(\frac{-9z-15}{5}\right)=$

$=\frac{9z+15}{15}=\frac{3}{5}z+1$

Asi a solución é $\left(\frac{3}{5}z+1,-\frac{z}{5},z\right)$ $z \in \mathbb{R}$, solucion múltiple polo que é un sistema compatíbel indeterminado.

Nota: na ecuación [1] podemos optar por expresar z en función de y, co que y pasaria a ser a variábel libre, ou parámetro.

Desta forma resultaria: $z=-5y$ e na ecuación primeira teriamos $x=-\frac{1}{3}(-y-2z-3)=-\frac{1}{3}(-y-2(-5y)-3)=-\frac{1}{3}(-y+10y-3)=-\frac{1}{3}(9y-3)=-3y+1$.
Con esta escolla a solución, que é por suposto equivalente á anterior, ten unha expresión algo mais cómoda: $(-3y+1, y, -5y)$ $y \in \mathbb{R}$.

1	

5. Resolver a ecuación matricial $2A-X=X+\frac{3}{4}B$, para $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}3 & -1 & -2\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}$.

$$2A-X=X+\frac{3}{4}B \Leftrightarrow 2X=2A-\frac{3}{4}B \Leftrightarrow X=A-\frac{3}{8}B=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}-\frac{3}{8}\begin{pmatrix}3 & -1 & -2\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}-\frac{3}{8}\begin{pmatrix}3 & -1 & -2\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}9 & -3 & -6\\ 0 & 6 & 12\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}0 & 8 & -16\\ 16 & -16 & 0\end{pmatrix}-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}9 & -3 & -6\\ 0 & 6 & 12\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\left(\begin{pmatrix}0 & 8 & -16\\ 16 & -16 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}9 & -3 & -6\\ 0 & 6 & 12\end{pmatrix}\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-9 & 11 & -10\\ 16 & -22 & -12\end{pmatrix}$$

1	

6. Dada unha matriz cuadrada A tal que $A^2=\frac{1}{k}A$, e dada a matriz $B=I_n-kA$, onde I_n é a matriz unitária de orden n, calcular de xeito razonado B^2, B^3 e, en xeral B^n.

Utilizando as propriedades das operacións matriciais resulta:

$$B^2=(I_n-kA)^2=(I_n-kA)\cdot(I_n-kA)=I_n^2-I_n\cdot kA-kA\cdot I_n+(kA)^2=I_n-kA-kA+k^2A^2=$$

$$=I_n-2kA+k^2A^2$$

E xá que $A^2=\frac{1}{k}A$, substituíndo resulta:

$$B^2=I_n-2kA+k^2A^2=I_n-2kA+k^2\frac{1}{k}A=I_n-2kA+kA=I_n-kA=B \text{ q.e.d.}$$