MATEMÁTICA II / 2º BACHARELATO 25/01/2011

TEMA 2 CÁLCULO INTEGRAL

TOTAL	SUMA	NOTA
10		

NOME	GRUPO

1 | 1. i. Definir os conceitos de ***primitiva*** e de ***integral indefinida*** dunha función, aportando algun exemplo de cada un deles.

0.5 | ii. Obter unha primitiva $F(x)$ da funcion $f(x)=x^4-sen\ x$ tal que $F(0)=5$.

1.5 | 2. Calcular as integrais indefinidas:

i. $\int x^2\ e^x\ dx$ ii. $\int \frac{dx}{18-2x^2}$ iii. $\int x^2\ cos(1-x^3)\ dx$

1 | 3. i. Definir os conceitos de ***integral definida*** e de ***función integral*** nun intervalo $[a,b]$, aportando algun exemplo de cada un deles.

1 | ii. Enunciado do Teorema Fundamental do Cálculo Integral.

0.5 | iii. Obter a función integral de $f(x)=6x^2+1$ no intervalo $[1,5]$.

1 | 4. Calcular a área do recinto plano delimitado pola gráfica da función $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$, o eixo OX e a recta $x=\frac{1}{2}$.

1.5 | 5. Calcular o valor de $m>0$ tal que a área do recinto determinado polas gráficas das funcións $f(x)=x^3$ e $g(x)=mx$ sexa de 18 unidades.

1 | 6. Dada a función definida como $G(x)=\int_x^{\pi} t^2\ cos\ t\ dt$, calcular de xeito razonado $G(\pi)$ e $G'(\pi)$.

1 | 7. Obter de forma razonada a área delimitada pola curva $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ e o eixo OX ao longo de todo o domínio de $f(x)$.

Mínimos 2º BACHARELATO

☐ *Área e perímetro de cuadrados, rectángulos e triángulos*	FICHA	☐ *Uso de parénteses*	FICHA	☐ *Raices; extracción de factores*	FICHA
☐ *Operacións con fraccións e decimais*	FICHA	☐ *Suma, resta, multiplicación e división de números naturais*	FICHA	☐ *Igualdades notábeis*	FICHA
☐ *Regra dos signos*	FICHA	☐ *Poténcias de exponente natural e propriedades*	FICHA	☐ *Álxebra de polinómios*	FICHA
☐ *Operacións con números inteiros*	FICHA	☐ *Área e perímetro do círculo*	FICHA		
☐ *Cálculo do MCD e mcm*	FICHA	☐ *Poténcias de exponente inteiro*	FICHA		

DESCONTA RECUPERA

1	

1. i. Definir os conceitos de ***primitiva*** e de ***integral indefinida*** dunha función, aportando algun exemplo de cada un deles.

0.5	

ii. Obter unha primitiva $F(x)$ da funcion $f(x)=x^4-sen\ x$ tal que $F(0)=5$.

i. Chama-se primitiva dunha función $f(x)$ a outra función $F(x)$ tal que $F'(x)=f(x)\ \forall\ x \in Dom\ f$.

<u>*Exemplo*</u>
A función $F(x)=x^3+4$ é unha primitiva de $f(x)=3x^2$ porque $F'(x)=3x^2$ en todo o domínio de $f(x)$, que neste caso é $\mathbb{R}$.

Chama-se integral indefinida dunha función $f(x)$, e representa-se pola expresión $\int f(x)\,dx$, ao conxunto formado por todas as primitivas de $f(x)$: $\int f(x)\,dx = \{F(x)\ /\ F'(x)=f(x)\ \forall\ x \in Dom\ f\}$.

Debido a que todas as primitivas dunha mesma función diferencian-se só nunha constante, a integral indefinida representa-se habitualmente da forma $\int f(x)\,dx=F(x)+C$, onde $F(x)$ é unha das primitivas de $f(x)$ e C é calquer número real. O termo C chama-se constante de integración.

<u>*Exemplo*</u>
A integral indefinida da función $f(x)=3x^2$ é o conxunto das funcións da forma $F(x)=x^3+C$, con $C \in \mathbb{R}$, e expresa-se deste xeito: $\int 3x^2\,dx = x^3+C,\ C \in \mathbb{R}$.

ii. As primitivas de $f(x)$ son da forma $F(x) = \int (x^4-sen\ x)\,dx = \frac{x^5}{5}+cos\ x+C$.

Como $F(0)=5$ e $F(0)=\frac{0^5}{5}+cos\ 0+C = 1+C$, igualando obtemos $1+C=5 \Leftrightarrow C=5-1=4$, asi que a primitiva buscada é $F(x) = \frac{x^5}{5}+cos\ x+4$.

1.5	

2. Calcular as integrais indefinidas:

i. $\int x^2 e^x\, dx$ ii. $\int \frac{dx}{18-2x^2}$ iii. $\int x^2 \cos(1-x^3)\, dx$

i. Integrando por partes, fai-se $u=x^2$ e $dv=e^x\, dx$, de onde resulta $du=2x\, dx$ e $v=\int e^x\, dx=e^x$; e substituindo temos:

$$\int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - \int 2x\, e^x\, dx = x^2 e^x - 2\int x\, e^x\, dx \quad [1]$$

A integral $\int x\, e^x\, dx$ fai-se tamén por partes facendo $u=x$ e $dv=e^x\, dx$, de onde resulta $du=dx$ e $v=\int e^x\, dx=e^x$; e substituindo de novo temos:

$$\int x\, e^x\, dx = x\, e^x - \int e^x\, dx = x\, e^x - e^x$$

Levando esta expresión a [1] obtemos finalmente que

$$\int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - 2\int x\, e^x\, dx = x^2 e^x - 2\left(x\, e^x - e^x\right) + C = \left(x^2 - 2x + 2\right) e^x + C$$

ii. O polinómio $18-2x^2$ descompon-se do xeito $18-2x^2=-2(x-3)(x+3)$, polo que $\int \frac{dx}{18-2x^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-3)(x+3)}$.

Aplicando o método de integración racional temos:

$$\frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} = \frac{A\cdot(x+3)+B\cdot(x-3)}{(x-3)(x+3)} \Rightarrow 1 = A\cdot(x+3)+B\cdot(x-3)$$

E obtemos os valores de A e B:

$$x=-3 \Rightarrow 1=-6B \Rightarrow B=-\frac{1}{6} \text{ e } x=3 \Rightarrow 1=6A \Rightarrow A=\frac{1}{6}$$

Asi que:

$$\int \frac{dx}{18-2x^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-3)(x+3)} = -\frac{1}{2}\int \left(\frac{\frac{1}{6}}{x-3} - \frac{\frac{1}{6}}{x+3}\right) dx = -\frac{1}{12}\int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3}\right) dx =$$

$$= -\frac{1}{12}\left(\ln|x-3| - \ln|x+3|\right) + C = -\frac{1}{12}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C$$

iii. É unha integral imediata (que se pode resolver como tal ou ben utilizando o método de substitución, chamando $t=1-x^3$, de xeito que $dt=-3x^2$).

$$\int x^2 \cos(1-x^3)\, dx = -\frac{1}{3}\int -3x^2 \cos(1-x^3)\, dx = -\frac{1}{3}\, \mathrm{sen}(1-x^3) + C$$

1	

3. i. Definir os conceitos de ***integral definida*** e de ***función integral*** nun intervalo $[a,b]$, aportando algun exemplo de cada un deles.

1	
0.5	

ii. Enunciado do Teorema Fundamental do Cálculo Integral.

iii. Obter a función integral de $f(x)=6x^2+1$ no intervalo $[1,5]$.

i. Chama-se integral definida dunha función $f(x)$ no intervalo $[a,b]$, e representa-se pola expresión $\int_a^b f(x)\,dx$, á area da rexión determinada pola curva $f(x)$ e o eixo OX no intervalo $[a,b]$. Esta área considera-se positiva se a función é positiva no intervalo $[a,b]$ e negativa se a función é negativa nese intervalo. No caso de que a función tome valores de signo positivo e negativo, a integral definida é a diferenza entre a suma das rexións positivas e as negativas.

Exemplo

A integral definida da función $f(x)=3x^2$ no intervalo $[2,5]$ é: $\int_2^5 3x^2\,dx = [x^3]_2^5 = 5^3-2^3=125-8=117\,u^2$.

Nota: Para obter esta área utiliza-se a Regra de Barrow.

Chama-se función integral dunha función $f(x)$ no intervalo $[a,b]$, e representa-se pola expresión $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, á función que a cada $x \in [a,b]$ asócia-lle a integral definida de $f(x)$ no intervalo $[a,x]$.

Exemplo

A función integral da función $f(x)=3x^2$ no intervalo $[2,5]$ é a función $F(x)=\int_2^x 3t^2\,dt = [t^3]_2^x = x^3-2^3=x^3-8$.

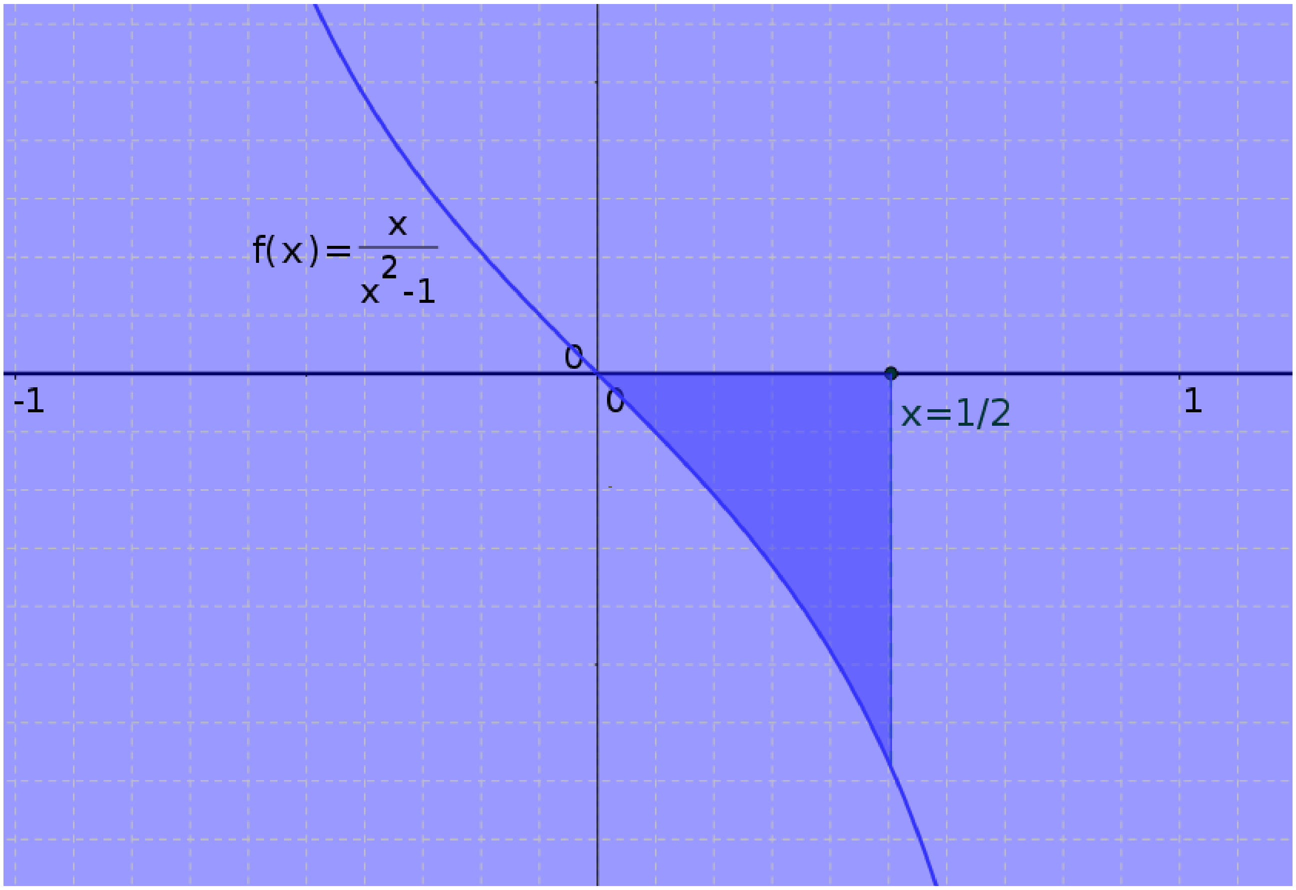
Nota: Para obter esta función utiliza-se tamén a Regra de Barrow.

ii. Dada unha función $f(x)$ contínua no intervalo $[a,b]$ a función $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, que se denomina función integral de $f(x)$ contínua no intervalo $[a,b]$, é unha primitiva de $f(x)$ en $[a,b]$, ou de outro xeito, $F'(x)=f(x)\ \forall\ x \in [a,b]$.

iii. A función integral de $f(x)=6x^2+1$ no intervalo $[1,5]$ é $F(x)=\int_1^x (6t^2+1)\,dt=\left[\frac{6t^3}{3}+t\right]_1^x=[2t^3+t]_1^x=(2x^3+x)-(2+1)=2x^3+x-3$; polo tanto obtemos a expresión $F(x)=2x^3+x-3$ que é o que andábamos a procurar.

1	

4. Calcular a área do recinto plano delimitado pola gráfica da función $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$, o eixo OX e a recta $x=\frac{1}{2}$.



A área pedida será: $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{x^2-1}\, dx$

$$\int \frac{x}{x^2-1}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1}\, dx = \frac{1}{2} ln\left|x^2-1\right|+C$$

Aplicando a Regra de Barrow fica:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{x^2-1}\, dx = \frac{1}{2}\left[ln\left|x^2-1\right|\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(ln\left|\frac{1}{4}-1\right|-ln\left|-1\right|\right) = \frac{1}{2}\left(ln\frac{3}{4}-ln\,1\right) = \frac{1}{2}\, ln\left(\frac{3}{4}\right) =$$

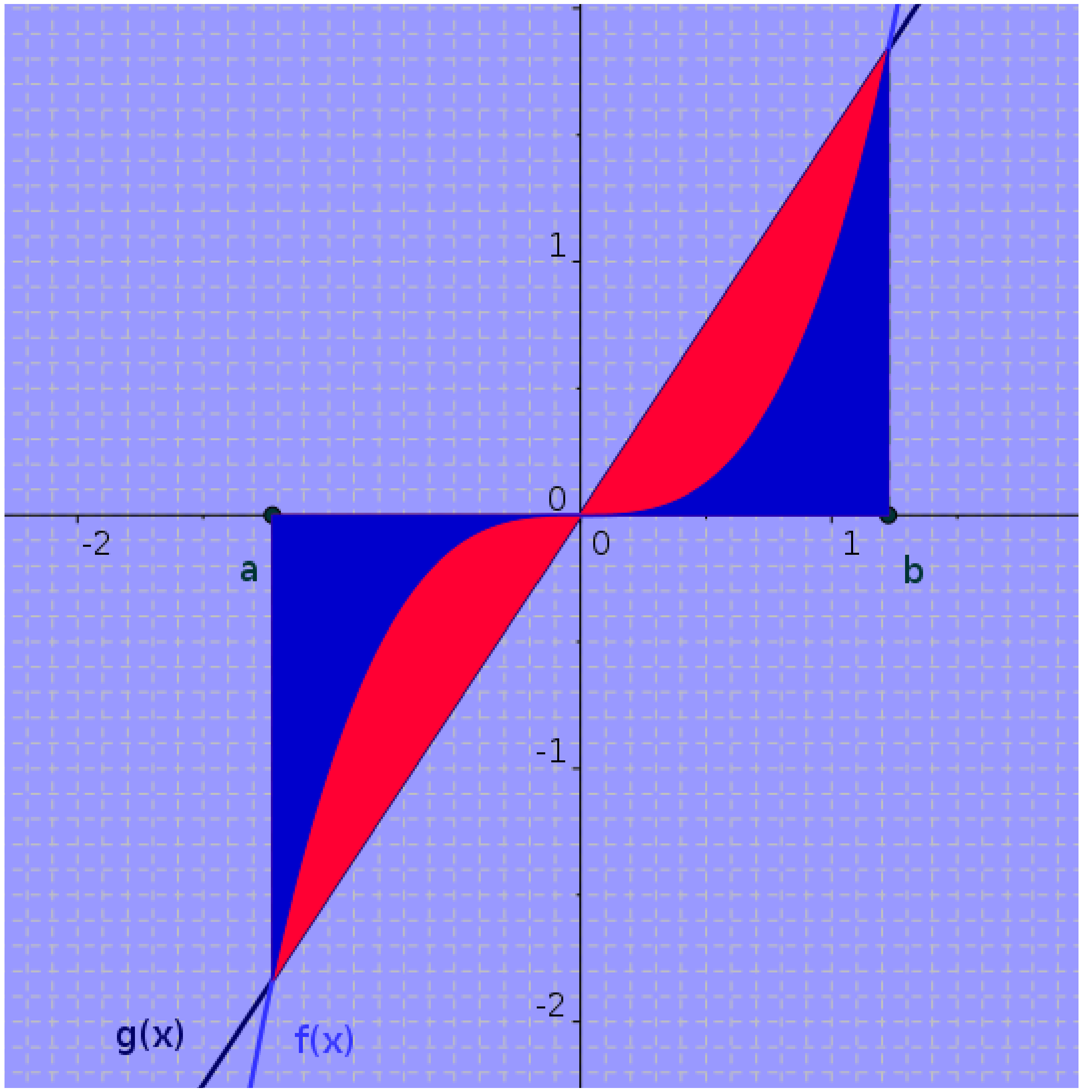
$$= ln\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = ln\sqrt{\frac{3}{4}} = ln\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Nota: As últimas igualdades son simplesmente diferentes xeitos de expresar o resultado usando as propriedades dos logaritmos.

1.5 |

5. Calcular o valor de $m>0$ tal que a área do recinto determinado polas gráficas das funcións $f(x)=x^3$ e $g(x)=mx$ sexa de 18 unidades.

Por ser $m>0$, $g(x)=mx$ é unha recta que pasa pola orixen de coordenadas e ten pendente m. O recinto determinado por ambas curvas é o representado en vermello:



Como é un recinto simétrico, corresponden 9 unidades de superfície a cada un dos dous intervalos, asi que calcularemos a integral definida en $[0, b]$ e igualaremo-la a 9.

Os pontos de corte de ambas funcións son:

$$x^3=mx \Leftrightarrow x^3-mx=0 \Leftrightarrow x(x^2-m)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x^2=m \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=\pm\sqrt{m}$$

Polo tanto o intervalo que integraremos será $[0, \sqrt{m}]$, de xeito que $\int_o^{\sqrt{m}}(mx-x^3)dx=9$.

Integrando resulta: $\int_o^{\sqrt{m}}(mx-x^3)dx=\left[\frac{mx^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^{\sqrt{m}}=\left(\frac{m^2}{2}-\frac{m^2}{4}\right)=\frac{m^2}{4}$, e de aqui $\frac{m^2}{4}=9 \Leftrightarrow m^2=36 \Leftrightarrow m=\pm\sqrt{36}=\pm 6$. Xá que $m>0$, descartamos a solución negativa. Polo tanto $m=6$ e $g(x)=6x$.

1	

6. Dada a función definida como $G(x)=\int_{x}^{\pi} t^2 \cos t \, dt$, calcular de xeito razonado $G(\pi)$ e $G'(\pi)$.

$G(\pi)=\int_{\pi}^{\pi} t^2 \cos t \, dt=0$ por ser unha integral definida nun intervalo de amplitude nula.

Como $G(x)=\int_{x}^{\pi} t^2 \cos t \, dt=-\int_{\pi}^{x} t^2 \cos t \, dt$. Esta última expresión corresponde-se coa oposta da función integral, asi que polo Teorema Fundamental do Cálculo Integral temos que:

$G'(x)=-\left(x^2 \cos x\right)$ e polo tanto $G'(\pi)=-\left(\pi^2 \cos \pi\right)=-\left(\pi^2 \cdot (-1)\right)=\pi^2$.

1	

7. Obter de forma razonada a área delimitada pola curva $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ e o eixo OX ao longo de todo o domínio de $f(x)$.

A función $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ e contínua e positiva en $\mathbb{R}$, asi que a área pedida é a integral definida no intervao $(-\infty,+\infty)$.

$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx=[atg\ x]_{-\infty}^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty} atg\ x-\lim_{x\to-\infty} atg\ x=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$.