MATEMÁTICA II / 2º BACHARELATO 09/11/2010

TEMA 1 CÁLCULO DIFERENCIAL

TOTAL	SUMA	NOTA
11		

NOME	GRUPO

1	
1	

1. i. Definición de continuidade dunha función nun ponto.

   ii. Estudar a continuidade da función $f(x)=\frac{ln(1+x^2)}{x}$ en $x=0$ e, no caso de non ser contínua, indicar o tipo de discontinuidade que presenta.

1	

2. Estudar se existe algun valor de a que faga posíbel estender o domínio da función $h(x)=\frac{ax^4-1}{x-1}$ de maneira que sexa contínua en $\mathbb{R}$.

2	

3. Estudar, utilizando a definición de derivada, os valores de a e b para que a función $g(x)=\begin{cases} ax^2+b & se \quad x\leqslant 2 \\ \frac{1}{x} & se \quad x>2 \end{cases}$ sexa derivábel en todo o seu domínio.

1.5	

4. Calcular os límites:

   i. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{2-\sqrt{x+4}}$ ii. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1-e^x}{(x+1)\cdot e^x}$ iii. $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x^2-1}}$

1	
0.5	
1	

5. i. Enunciado e interpretación xeométrica do Teorema do Valor Médio do Cálculo Diferencial[1].

   ii. Dada a función $f(x)=x^3-x^2+3$, estudar a taxa de variación média no intervalo $[1,4]$.

   iii. Estudar se a función $f(x)$ cumpre as hipóteses do teorema anterior no intervalo $[1,4]$ e, en caso afirmativo, obter o valor c ao que se refire o teorema.

   Nota 1: Para as interpretacións xeométricas dos teoremas é sempre necesário facer unha representación gráfica da situación que se estea a tratar.

1	

6. i. Determinar os pontos da curva $g(x)=9x^2-9x+15$ nos que a tanxente á gráfica é paralela á recta $y=12x+5$.

1	

   ii. Obter a ecuación da recta norma á curva neses pontos.

Mínimos 2º BACHARELATO

☐	*Área e perímetro de cuadrados, rectángulos e triángulos*	FICHA	☐	*Uso de parénteses*	FICHA	☐	*Raices; extracción de factores*	FICHA
☐	*Operacións con fraccións e decimais*	FICHA	☐	*Suma, resta, multiplicación e división de números naturais*	FICHA	☐	*Igualdades notábeis*	FICHA
☐	*Regra dos signos*	FICHA	☐	*Poténcias de exponente natural e propriedades*	FICHA	☐	*Álxebra de polinómios*	FICHA
☐	*Operacións con números inteiros*	FICHA	☐	*Área e perímetro do círculo*	FICHA			
☐	*Cálculo do MCD e mcm*	FICHA	☐	*Poténcias de exponente inteiro*	FICHA			

DESCONTA RECUPERA

1	
1	

1. i.Definición de continuidade dunha función nun ponto.

   ii.Estudar a continuidade da función $f(x)=\dfrac{ln(1+x^2)}{x}$ en $x=0$ e, no caso de non ser contínua, indicar o tipo de discontinuidade que presenta.

i. Sexa f unha función e $x_0 \in Dom\, f$; di-se que f é contínua en x_0 se e só se existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ e ademais coincide con $f(x_0)$: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$.

ii. A función $f(x)=\dfrac{ln(1+x^2)}{x}$ está definida en $\mathbb{R}-\{0\}$, e polo tanto en nengún caso poderá ser contínua en $x=0$.

$\lim\limits_{x \to 0} f(x)=\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ln(1+x^2)}{x}=\dfrac{0}{0}$; obtemos unha indeterminación que se pode resolver por L'Hôpital: $\lim\limits_{x \to 0} f(x)=\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ln(1+x^2)}{x}=\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{2x}{1+x^2}}{1}=\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{1+x^2}=\dfrac{0}{1}=0$

Logo a función f presenta en $x=0$ unha discontinuidade de tipo evitábel.

Ampliación

Poderia estender-se o seu domínio con continuidade, se definimos $f(0):=0$, co que a discontinuidade desapareceria e a nova función seria contínua en $\mathbb{R}$:

A nova funcion é $\hat{f}(x)=\begin{cases} \dfrac{ln(1+x^2)}{x} & se \;\; x \neq 0 \\ 0 \;\; se \;\; x=0 \end{cases}$.

1	

2. Estudar se existe algun valor de a que faga posíbel estender o domínio da función $h(x)=\dfrac{ax^4-1}{x-1}$ de maneira que sexa contínua en $\mathbb{R}$.

A función $h(x)=\dfrac{ax^4-1}{x-1}$ está definida en $\mathbb{R}-\{1\}$, e polo tanto en nengún caso poderá ser contínua en $x=1$.

Para estender o seu domínio con continuidade, debe existir $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$ e coincidir con $h(1)$.

Polo tanto calcularemos $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$ que deberá ser un número real, para que podamos definir $h(1)$ con ese valor.

Asi: $\lim\limits_{x \to 1} h(x)=\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{ax^4-1}{x-1}=\dfrac{a-1}{0}$

Se este límite fose infinito, teriamos unha discontinuidade de salto infinito e, polo tanto, inevitábel, asi que a única forma de obter unha discontinuidade evitábel é que este límite sexa de tipo $\dfrac{0}{0}$, de xeito que se poda resolver por L'Hôpital.

Mas para que ese límite sexa indeterminado de tipo $\dfrac{0}{0}$, o numerador há de ser nulo, asi que $a=1$ e neste caso: $\lim\limits_{x \to 1} h(x)=\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4-1}{x-1}=\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{4x^3}{1}=4$.

Finalmente, definimos $\hat{h}(x)=\begin{cases} \dfrac{x^4-1}{x-1} & se \;\; x \neq 1 \\ 4 \;\; se \;\; x=1 \end{cases}$, que é contínua en $\mathbb{R}$.

2	

3. Estudar, utilizando a definición de derivada, os valores de a e b para que a función $g(x)=\begin{cases} ax^2+b & se \quad x\leqslant 2 \\ \dfrac{1}{x} & se \quad x>2 \end{cases}$ sexa derivábel en todo o seu domínio.

Para que a funcion sexa derivábel deberá ser tamén contínua. A expresión ax^2+b é contínua e derivábel no intervalo $(-\infty,2)$ e a expresión $\frac{1}{x}$ é contínua e derivábel no intervalo $(2,+\infty)$; polo tanto o único ponto a estudar será $x=2$.
Asi que estudaremos a continuidade e a derivabilidade laterais en $x=2$.

Continuidade:
$\lim_{x\to 2^-} g(x)=\lim_{x\to 2^-} ax^2+b=4a+b$
$\lim_{x\to 2^+} g(x)=\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x}=\frac{1}{2}$
Como deben coincidir os límites temos que $4a+b=\frac{1}{2}$ [1].

Derivabilidade pola esquerda:
$$g'(2^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{a(2+h)^2+b-(4a+b)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{4a+4ah+ah^2+b-4a-b}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{4ah+ah^2}{h}=\lim_{h\to 0^-} 4a+ah=4a \text{ ;}$$

Derivabilidade pola direita:
$$g'(2^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{1}{2+h}-(4a+b)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1-(2+h)\cdot(4a+b)}{h\cdot(2+h)}$$ e como de [1] sabemos que $4a+b=\frac{1}{2}$, este límite resulta:

$$g'(2^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{1-(2+h)\cdot(4a+b)}{h\cdot(2+h)}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1-(2+h)\cdot\frac{1}{2}}{h\cdot(2+h)}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1-1-\frac{h}{2}}{h\cdot(2+h)}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-h}{2h\cdot(2+h)}=$$
$$=\lim_{h\to 0^+}-\frac{1}{2\cdot(2+h)}=-\frac{1}{4}$$
$$g'(2^-)=g'(2^+) \iff 4a=-\frac{1}{4} \iff a=-\frac{1}{16}.$$
e da expresión [1] resulta que $b=\frac{1}{2}-4a=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

1.5	

4. Calcular os límites:

i. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{2-\sqrt{x+4}}$ ii. $\lim_{x\to +\infty}\frac{1-e^x}{(x+1)\cdot e^x}$ iii. $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x^2-1}}$

i. De entrada é unha indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$, que se pode resolver multiplicando numerador e denominador polo conxugado do denominador:
$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{2-\sqrt{x+4}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(2+\sqrt{x+4})}{(2-\sqrt{x+4})\cdot(2+\sqrt{x+4})}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(2+\sqrt{x+4})}{4-(x+4)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(2+\sqrt{x+4})}{-x}=$$

$$= \lim_{x \to 0} -(2+\sqrt{x+4}) = -4 .$$

ii. É unha indeterminación do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, que se pode resolver por L'Hôpital:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1-e^x}{(x+1)\cdot e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-e^x}{e^x+(x+1)\cdot e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-e^x}{e^x\cdot(1+x+1)} = \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{2+x} = 0 .$$

iii. É unha indeterminación do tipo $1^{+\infty}$, que se pode resolver utilizando logaritmos:

$$\ln \lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{x^2-1}} = \lim_{x \to 1} \ln\left(x^{\frac{1}{x^2-1}}\right) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x^2-1}\right)\cdot \ln x = \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x^2-1} \text{ [1].}$$

Este límite é unha indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$, e por L'Hôpital resulta:

$$\text{[1]} \quad \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2} .$$

Finalmente como $\ln \lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{x^2-1}} = \frac{1}{2}$, entón o límite pedido é $\lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{x^2-1}} = e^{\frac{1}{2}}$

1	
0.5	
1	

5. i. Enunciado e interpretación xeométrica do Teorema do Valor Médio do Cálculo Diferencial[1].
ii. Dada a función $f(x)=x^3-x^2+3$, estudar a taxa de variación média no intervalo $[1,4]$.
iii. Estudar se a función $f(x)$ cumpre as hipóteses do teorema anterior no intervalo $[1,4]$ e, en caso afirmativo, obter o valor c ao que se refire o teorema.

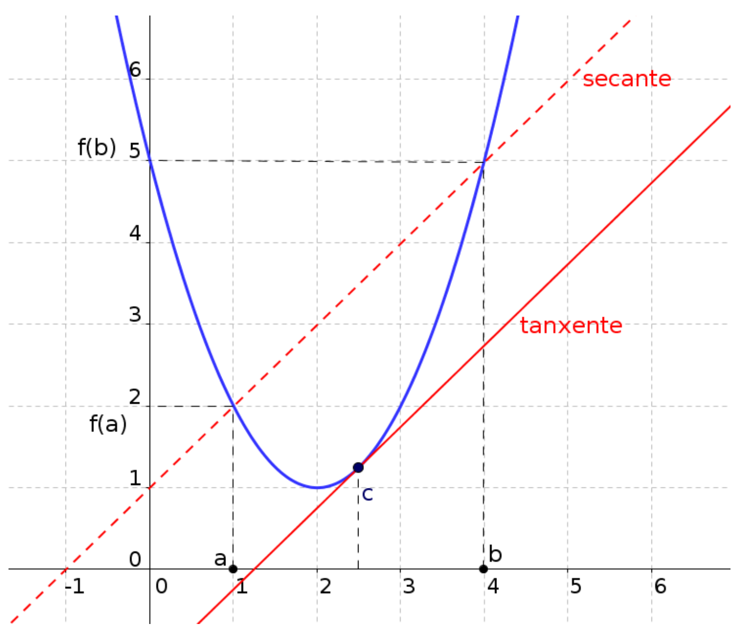
Nota 1: Para as interpretacións xeométricas dos teoremas é sempre necesário facer unha representación gráfica da situación que se estea a tratar.

i. <u>Enunciado</u>

Se $f(x)$ é unha función contínua en $[a,b]$ e derivábel en (a,b), existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

<u>Interpretación Xeométrica</u>

A expresión $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ é a taxa de variación média dunha función contínua no intervalo $[a,b]$, ou xeometricamente, a pendente da recta secante que pasa polos pontos $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$.
A expresión $f'(c)$ representa a taxa de variación instantánea en c, que xeometricamente é a pendente da recta tanxente á curva $f(x)$ en $(c,f(c))$.
O teorema afirma que existe algún ponto $c \in (a,b)$ no que a tanxente á curva e a secante teñen a mesma pendente, como se pode ver na gráfica.



ii. A taxa de variación média no intervalo $[1,4]$ é $TVM=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{(4^3-4^2+3)-(1^3-1^2+3)}{3}=\frac{64-16+3-3}{3}=\frac{48}{3}=16$.

iii. A función é contínua no intervalo $[1,4]$ e derivábel en $(1,4)$ por ser unha función polinómica (en realidade é contínua e derivábel en $\mathbb{R}$), asi que está nas hipóteses do teorema.

Polo tanto debe existir $c\in(1,4)$ tal que $f'(c)=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}$. Como $f'(x)=3x^2-2x$ debe tomar o mesmo valor que a taxa de variación média, igualando resulta: $3x^2-2x=16 \Leftrightarrow 3x^2-2x-16=0 \Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 3\cdot(-16)}}{6}=\frac{2\pm\sqrt{4+192}}{6}=$

$$=\frac{2\pm\sqrt{196}}{6}=\frac{2\pm 14}{6} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{16}{6}=\frac{8}{3} \\ x_2=-\frac{12}{6}=-2 \end{cases}$$

Descartamos a solución x_2 porque non pertence ao intervalo $(1,4)$; asi a solución é $c=\frac{8}{3}\in(1,4)$.

1	

6. i. Determinar os pontos da curva $g(x)=9x^2-9x+15$ nos que a tanxente á gráfica é paralela á recta $y=12x+5$.

1	

ii. Obter a ecuación da recta norma á curva neses pontos.

i. A recta $y=12x+5$ ten pendente $m=12$. Os pontos nos que a tanxente á curva $g(x)=9x^2-9x+15$ é paralela á recta $y=12x+5$ son aqueles nos que a derivada de $g(x)$ toma tamén o valor 12.

Como $g'(x)=18x-9$, igualando resulta $18x-9=12 \Leftrightarrow 18x=21 \Leftrightarrow x=\frac{21}{18}=\frac{7}{6}$.

Calculando $g\left(\frac{7}{6}\right)=9\cdot\frac{49}{36}-9\cdot\frac{7}{6}+15=\frac{49}{4}-\frac{21}{2}+15=\frac{49-42+60}{4}=\frac{67}{4}$, obten-se o ponto de tanxéncia $P\left(\frac{7}{6},\frac{67}{4}\right)$.

ii. A recta normal pasará por P e, por ser perpendicular á tanxente, terá pendente $m'=-\frac{1}{12}$; polo tanto a sua ecuación é $y-\frac{67}{4}=-\frac{1}{12}\cdot\left(x-\frac{7}{6}\right) \Leftrightarrow y=-\frac{x}{12}+\frac{7}{72}+\frac{67}{4}=-\frac{x}{12}+\frac{1.213}{72}$