MATEMÁTICAS II / 2º BACHARELATO 06/05/2010
TEMA 5 XEOMETRIA

TOTAL	SUMA	NOTA
10.5		

NOME

1	
1	

1. i. Definición e interpretación xeométrica do produto vectorial de dous vectores libres.

   ii. Calcular as coordenadas do vértice C no triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$, con $A(3,2,0)$ e $B(2,1,-1)$, sabendo que C pertence á recta $r\equiv\begin{cases}x=1+t\\ y=2-t\\ z=2t\end{cases}$ e que a área do triángulo é de $4\ u^2$.

i. Ver libro.

ii. Como o ponto C pertence á recta $r\equiv\begin{cases}x=1+t\\ y=2-t\\ z=2t\end{cases}$, as suas coordenadas serán $C(1+t,2-t,2t)$.

A área dun triángulo obtén-se como a metade do módulo do produto vectorial de dous dos seus lados, que poden ser, neste caso, os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Asi que calcularemos esa área e igualando-a a $4\ u^2$ obteremos o valor de t que nos permitirá coñecer as coordenadas do ponto C.

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(2,1,-1)-(3,2,0)=(-1,-1,-1)$$
$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(1+t,2-t,2t)-(3,2,0)=(t-2,-t,2t)$$

A área do triángulo será $S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-1,-1,-1)\times(t-2,-t,2t)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -1 & -1\\ t-2 & -t & 2t\end{vmatrix}=-3t\,\vec{i}+(2+t)\,\vec{j}+(2t-2)\,\vec{k}$$

Expresado en forma de coordenadas, o produto vectorial é $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-3t,2+t,2t-2)$.

E o módulo:
$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-3t)^2+(2+t)^2+(2t-2)^2}=\sqrt{9t^2+4+4t+t^2+4t^2-8t+4}=\sqrt{14t^2-4t+8}$$

Polo tanto, a área será $S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{14t^2-4t+8}$

Igualando a $4\ u^2$ resulta:
$$\frac{1}{2}\sqrt{14t^2-4t+8}=4 \Leftrightarrow \sqrt{14t^2-4t+8}=8 \Rightarrow 14t^2-4t+8=64 \Leftrightarrow 14t^2-4t-56=0$$

Resolvendo a ecuación temos:
$$t=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot 14\cdot(-56)}}{2\cdot 14}=\frac{4\pm\sqrt{3152}}{28}=\frac{4\pm 4\sqrt{197}}{28}=\frac{1\pm\sqrt{197}}{7}$$

Para cada un destes valores de t obtemos unha solución:

$$t_1=\frac{1+\sqrt{197}}{7} \Rightarrow C\left(\frac{8+\sqrt{197}}{7},\frac{13-\sqrt{197}}{7},\frac{2+2\sqrt{197}}{7}\right)$$
$$t_2=\frac{1-\sqrt{197}}{7} \Rightarrow C'\left(\frac{8-\sqrt{197}}{7},\frac{13+\sqrt{197}}{7},\frac{2-2\sqrt{197}}{7}\right)$$

1	

2. i. Estudar a posición relativa dos planos $\alpha\equiv 3x+(\lambda+1)y+2z=\lambda$, $\beta\equiv 2x+5y+3z=1$ e $\gamma\equiv -x+3y+\lambda z=0$.

1	

ii. No caso de que os trés planos formen un feixe de planos secantes, obter a ecuación do eixo e do plano π que contén a este eixo e ao ponto $A(1,2,1)$.

i. Cos trés planos formaremos un sistema linear, para o que antes trasporemos os termos independentes para o primeiro membro.

A matriz de coeficientes do sistema é $M=\begin{pmatrix}3 & \lambda+1 & 2\\ 2 & 5 & 3\\ -1 & 3 & \lambda\end{pmatrix}$ e a ampliada é $M^*=\begin{pmatrix}3 & \lambda+1 & 2 & -\lambda\\ 2 & 5 & 3 & -1\\ -1 & 3 & \lambda & 0\end{pmatrix}$.

$$\det M=\begin{vmatrix}3 & \lambda+1 & 2\\ 2 & 5 & 3\\ -1 & 3 & \lambda\end{vmatrix}=15\lambda-3\lambda-3+12+10-2\lambda^2-2-27=-2\lambda^2+12\lambda-10$$

$$\det M=0 \Leftrightarrow -2\lambda^2+12\lambda-10=0 \Leftrightarrow \lambda^2-6\lambda+5=0 \Leftrightarrow \lambda=1 \ ou \ \lambda=5 .$$

Logo, para $\lambda\neq 1$ e $\lambda\neq 5$ temos que $rang\ M=rang\ M^*=$ $nº$ $incógnitas = 3$ e o sistema é compatíbel determinado: os trés planos son secantes formando un triedro.

Para $\lambda=1$: $M^*=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2 & -1\\ 2 & 5 & 3 & -1\\ -1 & 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$ e $rang\ M=rang\ M^*=\ 2\ <nº\ \ incógnitas$.

O sistema é compatíbel indeterminado con un grau de liberdade, polo que os trés planos son secantes e cortan-se nunha recta (feixe de planos secantes).

Para $\lambda=5$: $M^*=\begin{pmatrix}3 & 6 & 2 & -5\\ 2 & 5 & 3 & -1\\ -1 & 3 & 5 & 0\end{pmatrix}$ e $rang\ M\neq rang\ M^*$.

O sistema é incompatíbel e os planos son secantes dous a dous. Como non hai nengun plano paralelo a outro, forman un prisma.

ii. Os planos son secantes no caso de que $\lambda=1$, e calquer plano π que pertenza ao feixe de planos secantes, terá por ecuación unha combinación linear das ecuacions dos dous planos que determinan o feixe. Buscamos en M^* duas ecuacións que formen un conxunto independente, por exemplo as ecuacións de α e β, de xeito que o plano π terá ecuación: $\pi\equiv t(3x+2y+2z-1)+s(2x+5y+3z-1)=0$, $t,s\in\mathbb{R}$, e o sistema formado polas ecuacións de α e β representará a recta intersección de ambos, ou o que é o mesmo, o eixo do feixe (a recta arredor da que viran todos os planos do feixe).

Como o ponto $A(1,2,1)$ há de estar en π, resulta:
$t(3\cdot 1+2\cdot 2+2\cdot 1-1)+s(2\cdot 1+5\cdot 2+3\cdot 1-1)=0 \Leftrightarrow 8t+14s=0$.

Dando-lle un valor a un dos dous parámetros, obteremos o outro: por exemplo, se $t=7 \Rightarrow s=-4$, e o plano pedido será $\pi\equiv 7(3x+2y+2z-1)-4(2x+5y+3z-1)=0$, ou reducindo a ecuación: $\pi\equiv 13x-6y+2z-3=0$.

A ecuación do eixo é o sistema $r\equiv\begin{cases}3x+2y+2z-1=0\\2x+5y+3z-1=0\end{cases}$

1.5	

3. Dados os pontos $P(3,4,1)$ e $Q(7,2,7)$, determinar a ecuación xeral do plano que é perpendicular ao segmento $\overline{PQ}$ e contén ao ponto médio deste segmento.

O ponto meio do segmento $\overline{PQ}$ pode-se obter como a semi-suma das coordenadas dos extremos do segmento: $\vec{OM}=\frac{1}{2}(\vec{OP}+\vec{OQ})=\frac{1}{2}[(3,4,1)+(7,2,7)]=\frac{1}{2}(10,6,8)=(5,3,4)$.
O ponto meio será entón $M(5,3,4)$.

O plano pedido é $\alpha(M,\vec{PQ})$ (determinación normal), asi que, $\vec{MX}=(x-5,y-3,z-4)$ e $\vec{PQ}=(4,-2,6)$ e a ecuación de α obtemo-la da expresión:

$\vec{MX}\cdot\vec{PQ}=0 \Leftrightarrow (x-5,y-3,z-4)\cdot(4,-2,6)=0 \Leftrightarrow 4(x-5)-2(y-3)+6(z-4)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4x-2y+6z-38=0 \Leftrightarrow 2x-y+3z-19=0$.

A ecuación do plano será entón $\alpha\equiv 2x-y+3z-19=0$.

1	

4. i.Averiguar para que valor de m as rectas $r\equiv\begin{cases}x-y-z=2\\y-2z=0\end{cases}$ e $s\equiv\begin{cases}x-3z=-6\\mx-6y=6\end{cases}$ son paralelas.

1	

ii.Obter nese caso a ecuación do plano que as contén.

i. Pasando as ecuacións de ambas rectas á forma implícita estándar, resulta o sistema de matriz ampliada $M^*=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-2\\0&1&-2&0\\1&0&-3&6\\m&-6&0&-6\end{pmatrix}$. Para que $r\|s$, debe ser que o rango da matriz de coeficientes sexa 2 e o da matriz ampliada 3, polo que $det\ M^*=0$.

$$\begin{vmatrix}1&-1&-1&-2\\0&1&-2&0\\1&0&-3&6\\m&-6&0&-6\end{vmatrix}\overset{F_3-F_1}{=}\begin{vmatrix}1&-1&-1&-2\\0&1&-2&0\\0&1&-2&8\\m&-6&0&-6\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1&-2&0\\1&-2&8\\-6&0&-6\end{vmatrix}-m\cdot\begin{vmatrix}-1&-1&-2\\1&-2&0\\1&-2&8\end{vmatrix}=$$
$$=96-24m$$

$$96-24m=0 \Leftrightarrow m=4$$

Para $m=4$ temos :

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1&-2\\0&1&-2&0\\1&0&-3&6\\4&-6&0&-6\end{pmatrix}\begin{matrix}F_3-F_1\\F_4-4F_1\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&-1&-2\\0&1&-2&0\\0&1&-2&8\\0&-2&4&2\end{pmatrix}\begin{matrix}F_3-F_2\\F_4+2F_2\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&-1&-2\\0&1&-2&0\\0&0&0&8\\0&0&0&2\end{pmatrix}4F_4-F_3\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-1&-1&-2\\0&1&-2&0\\0&0&0&8\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

De xeito que $rang\ M=2$ e $rang\ M^*=3$, co que $r\|s$.

ii. Ao seren as rectas paralelas no caso $m=4$, para determinar o plano α que as contén precisamos dun ponto do plano e de dous vectores direcionais. Como ponto de α serve calquer ponto dunha das duas rectas e como vectores direcionais non serven os dous vectores directores de ambas rectas, porque teñen a mesma direción. Polo tanto tomaremos o vector director dunha das rectas e calquer vector que conecte esa recta coa outra.

Asi temos o plano determinado como $\alpha(P,\vec{PQ},\vec{PR})$, con $P\in r$, $Q\in r$ e $R\in s$.
Como pontos de r podemos tomar $P(2,0,0)$ e $Q(5,2,1)$ e como ponto de s podemos tomar $R(0,-1,2)$

Asi o plano α será

$$\alpha\equiv\begin{vmatrix}x-2&y&z\\3&2&1\\-2&-1&2\end{vmatrix}=0\ \Leftrightarrow\ \alpha\equiv5(x-2)-8y+z=0\ \Leftrightarrow\ \alpha\equiv5x-8y+z-10=0\ .$$

1.5	

5. Determinar a simétrico do ponto $P(2,-1,1)$ a respeito do plano $\alpha\equiv x-y=1$.

O procedimento para o cálculo do simétrico consta de trés pasos:
1º Obtención da recta que contén ao ponto P e é perpendicular ao plano α . A recta será $r(P,\vec{n}_\alpha)$, onde $\vec{n}_\alpha=(1,-1,0)$ é o vector normal do plano α .
2º Obtención do ponto Q intersección de α e r .
3º Obtención do simétrico P' utilizando a relación vectorial: $\vec{OP'}=\vec{OP}+2\vec{PQ}$.

Nota: no caso de que se pida calcular o simétrico dun ponto a respeito dunha recta, o procedimento é exactamente o mesmo agás o primeiro paso, que consistirá en obter a ecuación do plano que conteña ao ponto P e sexa perpendicular á recta dada. Este plano será $\alpha(P,\vec{u}_r)$, onde $\vec{u}_r$ é o vector director da recta.

1º Obtención da recta $r(P,\vec{n}_\alpha)$: $r\equiv\begin{cases}x=2+t\\y=-1-t\\z=1\end{cases}$

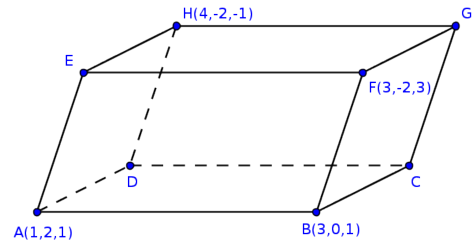
2º Obtención do ponto $Q\equiv r\cap\alpha$: introducimos as coordenadas paramétricas na ecuación do plano e resulta $2+t-(-1-t)=1\ \Leftrightarrow\ 3+2t=1\ \Leftrightarrow\ 2t=-2\ \Leftrightarrow\ t=-1$.
Dando-lle a t o valor -1 nas ecuacións paramétricas da recta, obtemos o ponto $Q(1,0,1)$.

3º Obtención do simétrico P' : $\vec{OP'}=\vec{OP}+2\vec{PQ}=(2,-1,1)+2[(1,0,1)-(2,-1,1)]=$
$=(2,-1,1)+2\cdot(-1,1,0)=(2,-1,1)+(-2,2,0)=(0,1,1)$.

Logo o ponto pedido é $P'(0,1,1)$.

1.5	

6. Calcular o volume do paralelepípedo da figura, do que se coñecen os vértices $A(1,2,1)$, $B(3,0,1)$, $F(3,-2,3)$ e $H(4,-2,-1)$ e a proxeción do lado BF sobre o lado AB.



As áreas, volumes e proxecións son aplicación directa, respectivamente, das operacións vectoriais produto vectorial, produto misto e produto escalar. Polo tanto será necesário procurar na figura os vectores que determinan cada unha das medidas que se pidan.

O volume pode-se calcular como o produto misto $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}]$.

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(3,0,1)-(1,2,1)=(2,-2,0)$$

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OF}=$$
$$=(4,-2,-1)-(1,2,1)+(3,0,1)-(3,-2,3)=(3,-2,-4)$$

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OB}=(3,-2,3)-(3,0,1)=(0,-2,2)$$

Asi que o volume do paralelepípedo será: $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}]=\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}=20\ \ u^2$.

A proxeción do lado BF sobre o lado AB, obterá-se como $p=\frac{|\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{|(0,-2,2)\cdot(2,-2,0)|}{|(2,-2,0)|}=\frac{4}{\sqrt{8}}=\sqrt{2}$

Mínimos 2º BACHARELATO

☐ *Área e perímetro de cuadrados, rectángulos e triángulos*	FICHA	☐ *Uso de parénteses*	FICHA	☐ *Raices; extracción de factores*	FICHA
☐ *Operacións con fraccións e decimais*	FICHA	☐ *Suma, resta, multiplicación e división de números naturais*	FICHA	☐ *Igualdades notábeis*	FICHA
☐ *Regra dos signos*	FICHA	☐ *Poténcias de exponente natural e propriedades*	FICHA	☐ *Álxebra de polinómios*	FICHA
☐ *Operacións con números inteiros*	FICHA	☐ *Área e perímetro do círculo*	FICHA		
☐ *Cálculo do MCD e mcm*	FICHA	☐ *Poténcias de exponente inteiro*	FICHA		

DESCONTA

RECUPERA