MATEMÁTICA 4º ESO 15/11/2017

TEMAS 6 SEMELLANZA

7 TRIGONOMETRIA

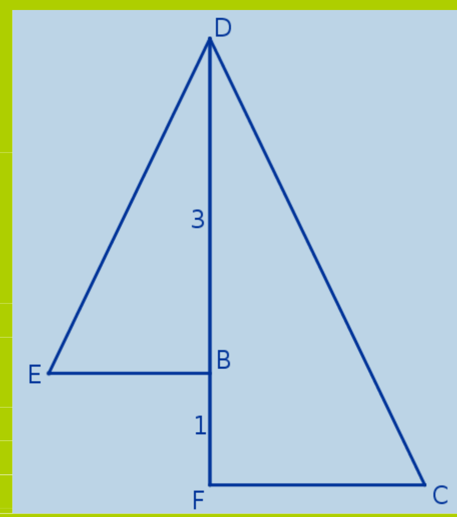
NOME	GRUPO 4º ESO

0. Expresión escrita / expresión matemática / presentación

1.5 1. Na figura adxunta, $\overline{DF}$ é a bisectriz do ángulo $\widehat{EDC}$. Estudar de xeito razoado se os triángulos $\overset{\triangle}{DEB}$ e $\overset{\triangle}{DFC}$ son semellantes e calcular o lado $\overline{DE}$, sabendo que a área do triángulo $\overset{\triangle}{DFC}$ é $4\ cm^2$.

[Nota: expresar todas as cantidades en forma racional ou radical.]

Ao ser $\overline{DF}$ é a bisectriz do ángulo $\widehat{EDC}$, os ángulos $\widehat{EDB}$ e $\widehat{FDC}$ son iguais, e como ambos triángulos son rectángulos, comparten polo tanto os trés ángulos, asi que son semellantes.



Á área do triángulo $\overset{\triangle}{DFC}$ é $4\ cm^2$, e $\overline{DF}=4$; logo $\frac{1}{2}\cdot\overline{FC}\cdot\overline{DF}=4 \Leftrightarrow \overline{FC}=\frac{2\cdot 4}{4}=2$.

Asi que: $\frac{\overline{DB}}{\overline{DF}}=\frac{\overline{EB}}{\overline{FC}} \Leftrightarrow \overline{EB}=\frac{\overline{DB}\cdot\overline{FC}}{\overline{DF}}=\frac{3\cdot 2}{4}=\frac{3}{2}$

E usando o Teorema de Pitágoras obtemos:

$$\overline{DE}=\sqrt{\overline{DB}^2+\overline{EB}^2}=\sqrt{3^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{9+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{45}{4}}=\frac{3\sqrt{5}}{2}\ cm$$

1 2. Unha torre ten un volume de $54\ m^3$ e está feita a escala a partir dunha maqueta de $2\ dm^3$. Calcular a escala á que está construída a torre mais a superfície da sua base, sabendo que a base da maqueta é de $0{,}5\ dm^2$.

Ao tratar-se de volumes, a razón dos mesmos é o cubo da razón de semellanza r, polo que:

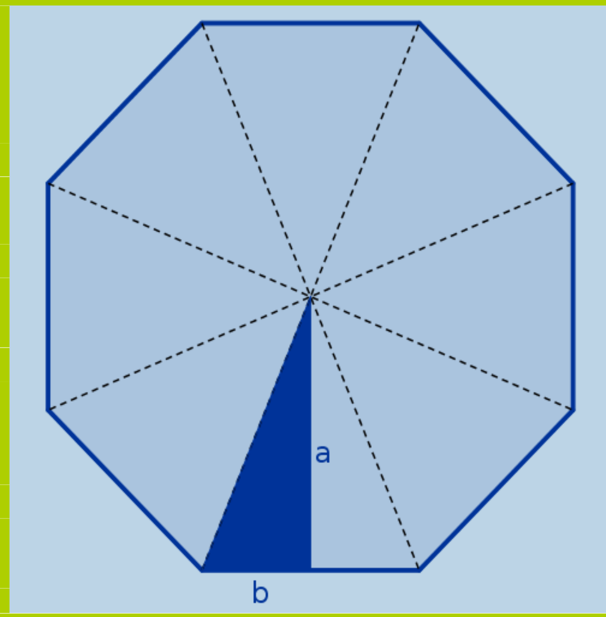
$r^3=\frac{54\ m^3}{2\ dm^3}=\frac{54.000\ dm^3}{2\ dm^3}=27.000 \Rightarrow r=\sqrt[3]{27.000}=30$; polo tanto a escala é $1:30$.

A razón das superfícies é $r^2=30^2$, asi que a base da torre é $S=30^2\cdot 0{,}5\ dm^2=450\ dm^2$.

2	

3. Calcular a apotema dun octógono regular sabendo que a sua área é $S=50$.
[Nota: Arredondar a duas cifras decimais significativas.]

Se dividimos o octógono en 16 triángulos rectángulos, cada un deles terá área $s=\frac{50}{16}=3{,}125$.



Se chamamos a á apotema e b á base de cada un deses triángulos, a sua área é:

$$s=\frac{a\cdot b}{2} \Leftrightarrow a\cdot b=2\cdot s=2\cdot 3{,}125=6{,}25 \ [1]$$

Mas o ángulo superior do triángulo é $\frac{360°}{16}=22{,}5°$, asi que:

$$\frac{b}{a}=tg\ 22{,}5° \Leftrightarrow b=a\cdot tg\ 22{,}5° .$$

Polo tanto, substituíndo en [1] resulta: $a\cdot b=a\cdot a\cdot tg\ 22{,}5°=a^2\cdot tg\ 22{,}5°$

E como $a\cdot b=6{,}25$, obtemos:

$$a\cdot b=a^2\cdot tg\ 22{,}5°=6{,}25 \Leftrightarrow a^2=\frac{6{,}25}{tg\ 22{,}5°} \Rightarrow a=\sqrt{\frac{6{,}25}{tg\ 22{,}5°}}\approx 4{,}02$$

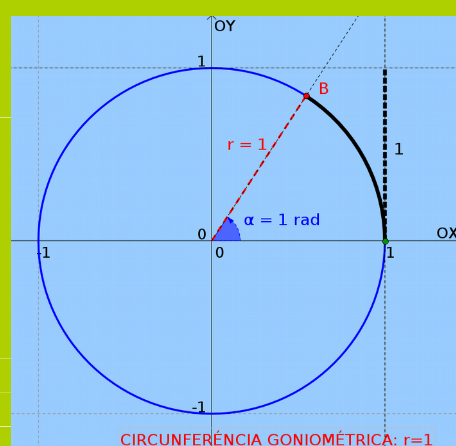
1	

4. i. Explicar brevemente que é un radián e cal é a sua equivaléncia en graus. Apoiar a explicación con un gráfico.

1	

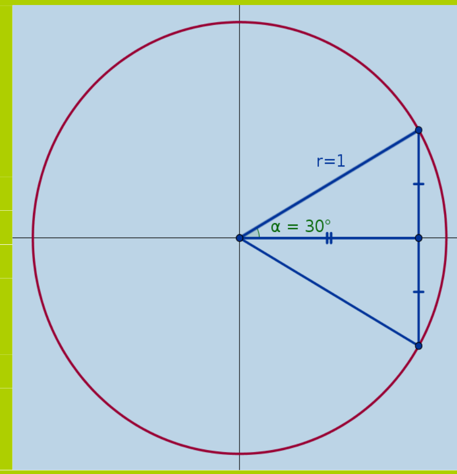
ii. Obter de forma razoada o seno, coseno e tanxente do ángulo de $\frac{\pi}{6}\ rad$ a partir do seu triángulo característico.

i. Define-se o radián como o ángulo que determina sobre a circunferéncia un arco de igual lonxitude que o raio.



Xá que o cociente entre a lonxitude e o raio da circunferéncia é $\frac{L}{r}=2\pi$, deducimos de aquí que $360°$ equivalen a un arco de 2π veces o raio, logo o radián é $\frac{360°}{2\pi}\approx 57°\ 29'$

ii. Se na circunferéncia goniométrica duplicamos o triángulo característico do ángulo de $30°$ obtemos un triángulo equilátero, polo que os trés lados son 1, e asi $sen\ 30° = \frac{1}{2}$.



Utilizando o Teorema de Pitágoras resulta:

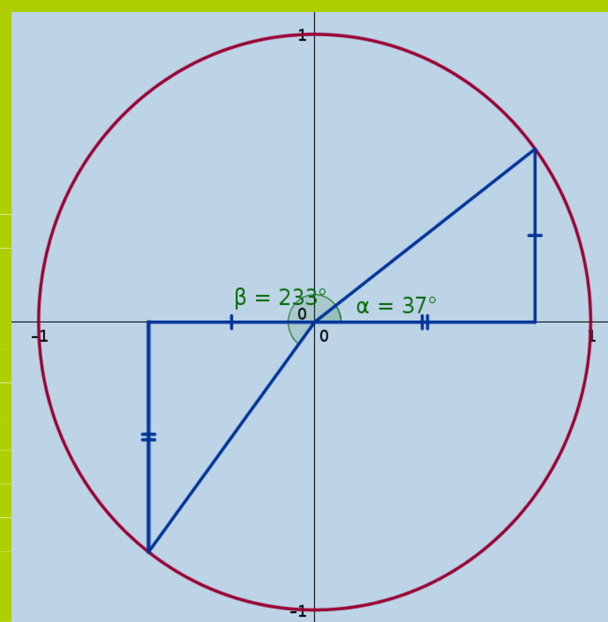
$$cos\ 30° = \sqrt{1 - sen^2\ 30°} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

E finalmente: $tg\ 30° = \frac{sen\ 30°}{cos\ 30°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

1.5	

5. Expór de forma razoada que se entende por redución dun ángulo ao primeiro cuadrante e obter as razóns trigonométricas (seno, coseno e tanxente) do ángulo de $233°$ sabendo que $cos\ 37° = 0{,}8$.

Entende-se por redución dun ángulo ao primeiro cuadrante a obtención das razóns trigonométricas dun ángulo a partir doutro ángulo que pertenza ao primeiro cuadrante, utilizando a comparación entre os seus triángulos característicos.



Á vista da gráfica, os triángulos característicos dos ángulos de $233°$ e $37°$ son iguais, polo que:

$sen\ 233° = -cos\ 37°$

$cos\ 233° = -sen\ 37°$

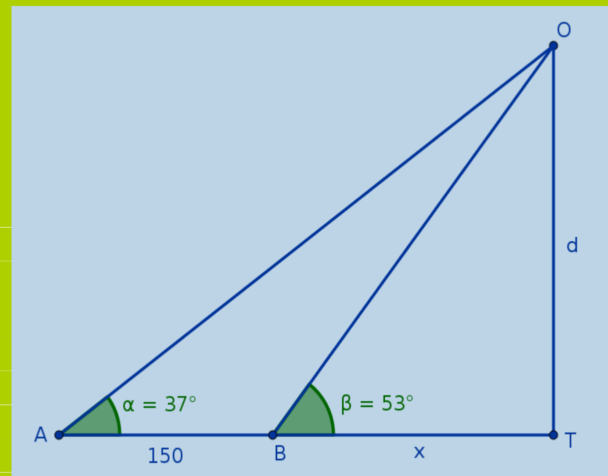
Da identidade $sen^2 37° + cos^2 37° = 1$ obtemos:

$$sen\,37° = \sqrt{1 - cos^2 37°} = \sqrt{1 - 0{,}8^2} = \sqrt{1 - 0{,}64} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$$

Logo: $sen\ 233° = -0{,}8$, $cos\ 233° = -0{,}6$ e $tg\ 233° = \frac{sen\ 233°}{cos\ 233°} = \frac{-0{,}8}{-0{,}6} = \frac{4}{3} \approx 1{,}33$.

2	

6. Camiñando por un dique recto observamos unha lancha pescando, cun ángulo de 37^o a respeito da direción que levamos, e se avanzamos $150\ m$ o ángulo pasa a ser de 53^o. Calcular a distáncia da lancha a terra.



Do triángulo $\overset{\triangle}{BOT}$ obtemos $tg\ 53^o = \frac{d}{x}$ e do triángulo $\overset{\triangle}{AOT}$ obtemos a relación $tg\ 37^o = \frac{d}{x+150}$; logo eliminando denominadores resulta o sistema:

$$\begin{cases} d = x \cdot tg\ 53^o \\ d = (x+150) \cdot tg\ 37^o \end{cases}$$

E igualando ambas expresións resulta:

$$x \cdot tg\ 53^o = (x+150) \cdot tg\ 37^o \Leftrightarrow x \cdot tg\ 53^o = x \cdot tg\ 37^o + 150 \cdot tg\ 37^o \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(tg\ 53^o - tg\ 37^o) = 150 \cdot tg\ 37^o \Leftrightarrow x = \frac{150 \cdot tg\ 37^o}{tg\ 53^o - tg\ 37^o} = \frac{150 \cdot \frac{3}{4}}{\frac{4}{3} - \frac{3}{4}} = \frac{\frac{225}{2}}{\frac{7}{12}} = \frac{1.350}{7}$$

Finalmente, substituíndo na primeira ecuación do sistema:

$$d = x \cdot tg\ 53^o = \frac{1.350}{7} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1.800}{7} \approx 257{,}14\ m$$