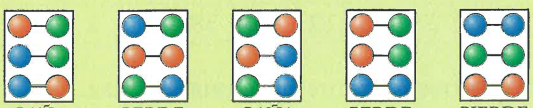
# 14 Cálculo de probabilidades

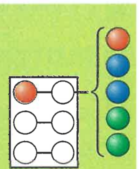
Neste xogo hai que conseguir que non queden emparelladas dúas bólas da mesma cor. Por exemplo:



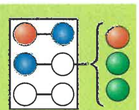
GAÑA PERDE GAÑA PERDE PIERDE

Cal é a probabilidade de gañar se caen as bólas ao chou? Para achar esta probabilidade, razoemos bóla a bóla.

**1** Supoñamos que a primeira bóla foi vermella. Cal é a probabilidade de que a bóla que se lle emparelle nos permita gañar?



**2** Cal é a probabilidade de que nesta situación o xogo "acabe ben"?



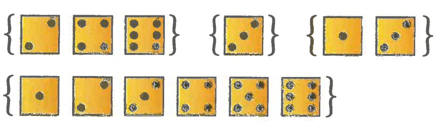
**3** Despois da primeira bóla, nos 4/5 dos casos a 2.ª bóla é "boa". Para a 3.ª, vale calquera. Para a 4.ª, hai tres posibilidades, dúas das cales son "boas". Cal é a probabilidade de que o xogo "acabe ben"?

1. Solucións a estes problemas.

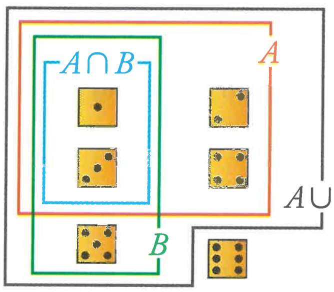
# 10 Os sucesos e as súas probabilidades

2. Actividades para **repasar** os conceptos de experimento aleatorio, espazo mostral e suceso.

CASOS. ESPAZO MOSTRAL



SUCESOS




3. No teu CD tes algunhas actividades para **reforzar** a relación entre un suceso e o seu contrario.

## Relacións entre sucesos

**Experiencia aleatoria** é aquela cuxo resultado depende do azar. Por exemplo, lanzar un dado e anotar o resultado.

**Caso** é cada un dos resultados que se poden obter ao realizar unha experiencia aleatoria. No dado, os casos son 1, 2, 3, 4, 5, 6.

**Espazo mostral** é o conxunto de todos os casos posibles. Desígnase $E$. No dado, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

**Suceso** é todo subconxunto do espazo mostral. Os casos son tamén sucesos. Chámanse **sucesos individuais** ou **sucesos elementais**. O espazo mostral chámase **suceso seguro.**

Cada vez que se realiza unha experiencia aleatoria **ocorre** un suceso elemental. Tamén ocorre calquera suceso que contén ese suceso elemental. Por exemplo, se ao tirar un dado sae 2, **ocorren** os sucesos $\{2\}$, PAR $= \{2, 4, 6\}$, $\{2, 5\}$, $\{1, 2, 3\}$ e calquera outro suceso que conteña ao 2.

**Unión de sucesos,** $A \cup B$, é o suceso que ocorre cando ocorre $A$ ou $B$.

**Intersección,** $A \cap B$, é o suceso que ocorre cando ocorren $A$ e $B$.

Por exemplo, se $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$, entón $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $A \cap B = \{1, 3\}$.

**Suceso contrario** a $S$ é o que ocorre sempre que non ocorra $S$. Desígnase $S'$ ou ben NON $S$. Por exemplo, se $S = \{1, 2, 3, 4\}$, entón $S' = \{5, 6\}$.

## Propiedades das probabilidades

- A probabilidade do espazo mostral (suceso $E$) é 1:

  $P[E] = 1$, pois é seguro que ocorre.

- A probabilidade dun suceso é a suma das probabilidades dos seus sucesos elementais.

  Se $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$, entón $P[S] = P[s_1] + P[s_2] + \ldots + P[s_k]$.

- Se dous sucesos $S$ e $S'$ son contrarios, entón as súas probabilidades suman 1:

  $P[S] + P[S'] = 1 \rightarrow P[S'] = 1 - P[S]$

$P[\text{NON } S] = 1 - P[S]$

**Exemplo**

Na ruleta adxunta, $E =$ {**Rubio, Verde, Amarelo, Azul**}, $A = \{\text{R, V}\}$, $B = \{\text{Am, V}\}$.

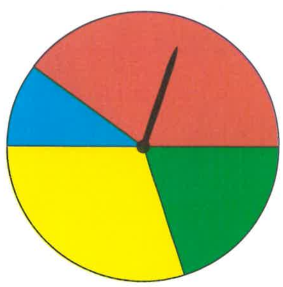
$A \cup B = \{\text{R, V, Am}\}$, $A \cap B = \{\text{V}\}$, NON $A = A' = \{\text{Am, Az}\}$, NON $B = B' = \{\text{R, Az}\}$

$P[\text{R}] = 0{,}4$; $P[\text{V}] = 0{,}2$; $P[\text{Am}] = 0{,}3$; $P[\text{Az}] = 0{,}1$

$P[E] = 0{,}4 + 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}1 = 1$

$P[A] = 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6$; $P[B] = 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}5$

$P[A'] = 1 - P[A] = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$; $P[B'] = 1 - P[B] = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$



# 2 Probabilidades en experiencias sinxelas

## Experiencias irregulares

Para calcular a probabilidade dun suceso correspondente a unha experiencia irre gular (unha chincheta, ou un dado cargado, ou extraer unha bóla dunha bols cuxa composición ignoramos…) non queda máis remedio que experimentar. I dicir, repetir a experiencia moitas veces, indagar a frecuencia relativa dese suces e asignarlle ese valor (aproximado) á probabilidade. Cantas máis veces fagamos a experiencia, máis fiable será o valor asignado.

Por exemplo, se nunha bolsa hai bólas de cinco cores (●, ●, ●, ○ e ●) e reali zamos 100 veces a experiencia de extraer, mirar, anotar e devolver á bolsa, obten do os seguintes resultados:

$$f(●) = 34, \quad f(●) = 23, \quad f(●) = 21, \quad f(○) = 8, \quad f(●) = 14$$

asignariámoslles os seguintes valores ás probabilidades:

$$P[●] \simeq 0{,}34, \quad P[●] \simeq 0{,}23, \quad P[●] \simeq 0{,}21, \quad P[○] \simeq 0{,}08, \quad P[●] \simeq 0{,}14$$

## Experiencias regulares. Lei de Laplace

Se a experiencia aleatoria se realiza cun instrumento regular (dado correcto, ba ralla completa…), entra en xogo a lei de Laplace. Lembrémola:

- Se o espazo mostral ten $n$ casos e a experiencia é *regular*, entón todos eles teñen a mesma probabilidade, $1/n$.
- Se un suceso ten $k$ casos, entón a súa probabilidade é $k/n$.

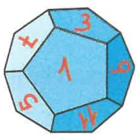
$$P[S] = \frac{\text{número de casos favorables a } S}{\text{número total de casos posibles}}$$

Por exemplo, nunha bolsa hai 40 bólas idénticas salvo na cor. Delas, 15 son ver mellas. Entón, ao extraer unha bóla ao chou:

$$P[\text{Vermella}] = \frac{15}{40} = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

### Exercicios resoltos

**1. Lanzamos un dado con forma de dodecaedro perfecto, coas caras numeradas do 1 ao 12. Calcular:**



**a) $P[8]$**

**b) $P$[menor que 3]**

**c) $P$[impar]**

**d) $P$[número primo]**

**e) $P$[maior que 4 pero menor que 8]**

1. a) $P[8] = \dfrac{1}{12}$. Hai 12 casos, e o “8” é un deles.

b) Só 1 e 2 son menores que 3 $\rightarrow$ $P[\text{menor que } 3] = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$

c) Hai 6 números impares menores que 12 $\rightarrow$ $P[\text{impar}] = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$

d) 2, 3, 5, 7, 11 son primos $\rightarrow$ $P[\text{número primo}] = \dfrac{5}{12}$

e) $P[\{5, 6, 7\}] = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$

**2. Fabricáronse cun molde varios miles de dados. Sospeitamos que son incorrectos. Como procedemos para indagar se son ou non correctos? En caso de que non o sexan, como avaliaremos a probabilidade de cada cara?**

2. Podemos supoñer que todos os dados son idénticos. Experimentamos con varios efectuando, en total, 1 000 lanzamentos. Estes son os resultados:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ***f*** | 154 | 123 | 236 | 105 | 201 | 181 |
| ***fr*** | 0,154 | 0,123 | 0,236 | 0,105 | 0,201 | 0,181 |

Observamos que algunhas das frecuencias relativas se diferencian demasiado do valor 1/6 = 0,166…

Posto que o número de experimentacións (1 000) é suficientemente grande, podemos concluír que o dado é defectuoso. Tomaremos as frecuencias relativas das distintas caras como valores aproximados das súas respectivas probabilidades.

**3. Lanzamos dous dados correctos e anotamos as diferenzas das puntuacións.**

**a) Cal é o espazo mostral?**

**b) Que probabilidade ten cada caso?**

**c) Achar a probabilidade do suceso "a diferenza é maior que 3".**

3.

| | ⚀ | ⚁ | ⚂ | ⚃ | ⚄ | ⚅ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ⚀ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| ⚁ | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| ⚂ | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| ⚃ | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| ⚄ | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 |
| ⚅ | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |

A partir da táboa da esquerda, construímos a distribución seguinte:

| DIFERENZAS | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| N.° DE VECES | 6 | 10 | 8 | 6 | 4 | 2 |
| PROBABILIDADE | 6/36 | 10/36 | 8/36 | 6/36 | 4/36 | 2/36 |

a) e b) Na táboa anterior ponse o espazo mostral, $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, coas probabilidades asociadas a cada caso.

c) $P$[Diferenza maior que 3] = $P[\{4, 5\}] = 4/36 + 2/36 = 6/36 = 1/6$

**4. Un xogo de cartas só distingue estas posibilidades: FIGURA (sota, cabalo ou rei), AS, MENOR QUE 6 (2, 3, 4, 5), MAIOR QUE 5 (6, 7). a) Cal é o espazo mostral? b) Di a probabilidade en cada caso. c) Cal é a probabilidade de "non FIGURA"?**

4. Hai 40 cartas. A probabilidade de cada unha é 1/40.

a) Neste xogo o espazo mostral é $E$ = {"FIGURA", "AS", "< 6", "> 5"}.

b) Hai 3 figuras en cada pau ⟶ $P${FIGURA} = 12/40 = 3/10 = 0,3

Hai 4 ases na baralla ⟶ $P${AS} = 4/40 = 1/10 = 0,1

Hai 4 números < 6 en cada pau → $P${"< 6"} = 16/40 = 2/5 = 0,4

Hai 2 números > 5 en cada pau → $P${"> 5"} = 8/40 = 1/5 = 0,2

c) $P${non FIGURA} = 1 – $P${FIGURA} = 1 – 0,3 = 0,7

## Actividades

**1** Lanzamos un dado con forma de octaedro, coas súas caras numeradas do 1 ao 8. Avalía estas probabilidades:

a) $P$[múltiplo de 3]  b) $P$[menor que 5]

c) $P$[número primo]  d) $P$[non múltiplo de 3]

4. No teu CD tes máis actividades para **reforzar** o cálculo de probabilidades sinxelas.

**2** Lanzamos dous dados e anotamos *a menor das puntuacións*.

a) Escribe o espazo mostral e asígnalle probabilidade a cada un dos casos.

b) Acha a probabilidade do suceso "a menor puntuación é menor que 4" = "< 4".

c) Acha $P$[non < 4].

# 3 Experiencias compostas

## Lembra

As seguintes experiencias:

a) *Extraer tres cartas dunha baralla.*

b) *Lanzar cinco dados.*

pódense considerar como experiencias compostas doutras simples:

a) *Extraer unha carta dunha baralla, despois outra, e despois outra.*

b) *Lanzar un dado, e outro… e outro.*

As experiencias simples que forman unha experiencia composta poden ser **dependentes** ou **independentes.**

Dúas ou máis experiencias aleatorias chámanse **independentes** cando o resultado de cada unha delas non depende do resultado das demais.

Por exemplo, o lanzamento de dous dados pode considerarse como composició de dúas probas (un dado e outro dado) independentes, pois o resultado de cad dado non inflúe no outro.

Dúas ou máis experiencias aleatorias chámanse **dependentes** cando o resultado de cada unha delas inflúe nas probabilidades das seguintes.

A 1.ª é AS. Quedan 3 ASES en 39 cartas.

A 1.ª non é AS. Quedan 3 ASES en 39 cartas.

Por exemplo, extraer dúas cartas dunha baralla (unha carta seguida doutra carta é a composición de dúas probas *dependentes*, pois o resultado da primeira inflú nas probabilidades dos sucesos da segunda:

| 1.ª extracción | quedan | 2.ª extracción |
|---|---|---|
| AS | 39 cartas, 3 ASES | $P[\text{AS}] = 3/39$ |
| NON AS | 39 cartas, 4 ASES | $P[\text{AS}] = 4/39$ |

Como vemos, as probabilidades dos sucesos na 2.ª extracción *dependen* do qu ocorreu na 1.ª.

## Extraccións con ou sen substitución

"Extraemos unha bóla desta bolsa e, despois, outra". Falta un dato: a que extraemos botámola de novo á bolsa antes da 2.ª extracción ou non?

— "Sacamos unha bóla, mirámola, devolvémola á bolsa, removemos e volvemo sacar", resumímolo así: "sacamos dúas bólas **con substitución**".

— "Sacamos unha bóla, mirámola e sacamos outra" resúmese así: "sacamos dúa bólas **sen substitución**".

No primeiro caso, as experiencias son independentes. No segundo, dependentes

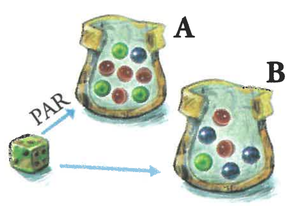
5. No teu CD tes algunha actividade para **reforzar** a distinción entre experiencias dependentes e independentes.

## Actividades

**1**

Lanzamos un dado e, despois, sacamos unha bóla da bolsa. Estas dúas experiencias, son dependentes ou independentes?

**2**




Lanzamos un dado. Se sae par, extraemos unha bóla da bolsa A. Se sae impar, da B. As experiencias son dependentes ou independentes?

# 4 Composición de experiencias independentes

## Experiencias independentes

O resultado de cada experiencia **non inflúe** no resultado da seguinte.

É máis sinxelo calcular as probabilidades dos sucesos compostos descompoñéndoos en sucesos simples.

Cando varias experiencias aleatorias son independentes, a probabilidade de que ocorra $S_1$ na primeira, $S_2$ na segunda, etc., é:

$$P[S_1 \text{ e } S_2 \text{ e} \dots] = P[S_1] \cdot P[S_2] \cdot \dots$$

## Problemas resoltos

**1. Lanzamos dous dados, un encarnado (E) e outro verde (V). Achar estas probabilidades:**

**a) 3 en E e 5 en V**

**b) 5 en E e 3 en V**

**c) un 3 e un 5**

**d) PAR en E e > 2 en V**

**"PAR" = {2, 4, 6}**

**"> 2" = {3, 4, 5, 6}**

1. a) $P[3 \text{ en E e } 5 \text{ en V}] =$
$= P[3] \cdot P[5] = 1/6 \cdot 1/6 = 1/36$

b) $P[5 \text{ en E e } 3 \text{ en V}] =$
$= P[5] \cdot P[3] = 1/6 \cdot 1/6 = 1/36$

c) $P[\text{un } 3 \text{ e un } 5] =$
$= P[3 \text{ en E e } 5 \text{ en V}] + P[5 \text{ en E e } 3 \text{ en V}] =$
$= (1/36) + (1/36) = 2/36 = 1/18$

d) $P[\text{PAR en E e} > 2 \text{ en V}] =$
$= P[\text{PAR}] \cdot P[> 2] = 3/6 \cdot 4/6 = 12/36 = 1/3$

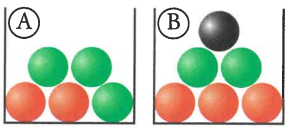
| | ⚀ | ⚁ | ⚂ | ⚃ | ⚄ | ⚅ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ⚀ | 1,1 | 2,1 | 3,1 | 4,1 | 5,1 | 6,1 |
| ⚁ | 1,2 | 2,2 | 3,2 | 4,2 | 5,2 | 6,2 |
| ⚂ | 1,3 | 2,3 | 3,3 | 4,3 | 5,3 | 6,3 |
| ⚃ | 1,4 | 2,4 | 3,4 | 4,4 | 5,4 | 6,4 |
| ⚄ | 1,5 | 2,5 | 3,5 | 4,5 | 5,5 | 6,5 |
| ⚅ | 1,6 | 2,6 | 3,6 | 4,6 | 5,6 | 6,6 |

PAR en E

MAIOR QUE 2 en V

$P[\text{PAR en E e} > 2 \text{ en V}] = \frac{12}{36}$

**2. Sacamos unha bóla de A e unha bóla de B. Calcular:**




**a) P[🔴 e 🔴]**

**b) P[🔴 e 🟢]**

**c) P[🟢 e 🔴]**

**d) P[unha delas 🔴 e outra 🟢]**

**e) P[a segunda ⚫]**

2. a) P[🔴 e 🔴] = P[1.ª 🔴] · P[2.ª 🔴] $= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

b) P[🔴 e 🟢] = P[1.ª 🔴] · P[2.ª 🟢] $= \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$

c) P[🟢 e 🔴] = P[1.ª 🟢] · P[2.ª 🔴] $= \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{6} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$

d) P[unha delas 🔴 e outra 🟢] = P[🔴 e 🟢] + P[🟢 e 🔴] $= \frac{4}{30} + \frac{9}{30} = \frac{13}{30}$

e) P[a 2.ª ⚫] = P[calquera cousa a 1.ª] · P[a 2.ª ⚫] $= 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

## Actividades

6. Podes **reforzar** o cálculo de probabilidades con experiencias independentes.

**1** Extráense 3 cartas con substitución. Acha:

a) P[AS en 1.ª e FIGURA en 2.ª e 3.ª] b) P[3 ASES]

c) P[un AS e dúas FIGURAS] d) P[ningún AS]

**2** Lánzanse 5 moedas. Acha a probabilidade de:

a) 5 caras b) algunha cruz

**3** Lanzamos 3 moedas. Calcula:

a) P[tres caras] b) P[ningunha cara] c) P[algunha cara]

**4** Lánzanse dúas moedas e un dado. Cal é a probabilidade de obter cara en ambas as moedas e seis no dado? Cal, a de obter cruz nas moedas e par no dado?

# 5 Composición de experiencias dependentes

## Nomenclatura

A barra / significa "suposto que ocorreu". Por exemplo:

$P[S_3 / S_1 \text{ e } S_2]$ significa "probabilidade de que ocorra $S_3$ suposto que ocorreron $S_1$ e $S_2$.

Nunha experiencia composta por varias dependentes, o resultado de cada unha inflúe no resultado da seguinte.

Se dous sucesos $S_1$ e $S_2$ corresponden a probas dependentes, a probabilidade de que ocorra $S_1$ na 1.ª e $S_2$ na 2.ª é:

$$P[S_1 \text{ e } S_2] = P[S_1] \cdot P[S_2 \text{ na 2.ª} / S_1 \text{ na 1.ª}]$$

Para tres sucesos dependentes:

$$P[S_1 \text{ e } S_2 \text{ e } S_3] = P[S_1] \cdot P[S_2 / S_1] \cdot P[S_3 / S_1 \text{ e } S_2]$$

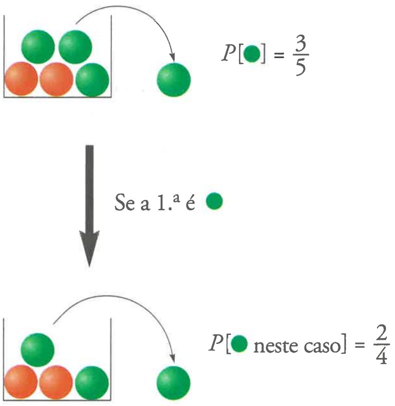
## Exercicio resolto

**Dunha urna con 3 bólas verdes e 2 vermellas, extraemos dúas bólas. Calcular a probabilidade de que:**

**a) Ambas as dúas sexan verdes.**

**b) A 1.ª sexa vermella e a 2.ª verde.**

**c) As dúas sexan vermellas.**

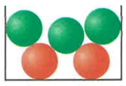



a) Imaxinemos unha gran cantidade de xente cunha urna con 3 bólas verdes e 2 bólas vermellas. Son sometidas a dúas probas:

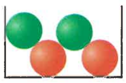
**1.ª proba:** Deben extraer bóla verde.

**2.ª proba:** Deben volver extraer verde.

Indaguemos que proporción de xente supera cada proba e, en consecuencia, que proporción supera as dúas.

PRIMEIRA EXTRACCIÓN  P[🟢] = 3/5. Por termo medio, 3 de cada 5 individuos extraen bóla verde e superan a 1.ª proba.

Agora, a composición da urna modifícase dependendo do resultado da primeira proba. Como estamos seguindo a pista aos que extraen bóla verde, estes teñen agora unha urna con 2 bólas verdes e 2 bólas vermellas. Vexamos *que proporción deles* supera a 2.ª proba.

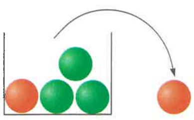
SEGUNDA EXTRACCIÓN  P[🟢] = 2/4. Por termo medio, 2 de cada 4 dos que superan a 1.ª proba superan tamén a 2.ª.

Proporción de individuos que superan ambas as probas: $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$. É dicir:

P[🟢 e 🟢] = P[🟢 a 1.ª] · P[🟢 a 2.ª / 🟢 a 1.ª] = $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$

Estas probas son **dependentes**, porque o resultado da primeira inflúe na segunda.

A expresión $P[S_2 / S_1]$ chámase **probabilidade condicionada**: probabilidade de $S_2$ **condicionada** a que ocorra $S_1$.



Se a 1.ª é 🔴, é , quedan catro: 1 🔴 e 3 🟢.

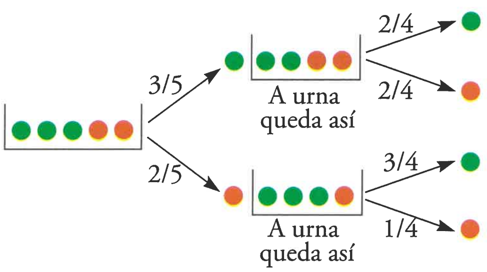
b) P[🔴 e 🟢] = P[🔴 a 1.ª] · P[🟢 a 2.ª/🔴 a 1.ª] = $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$

c) P[🔴 e 🔴] = P[🔴 a 1.ª] · P[🔴 a 2.ª/🔴 a 1.ª] = $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$

7. Se o desexas, podes **ampliar**, con actividades, o cálculo de probabilidades en composición de experiencias dependentes utilizando diagramas de árbore.

## Descrición da experiencia mediante un diagrama en árbore

A experiencia da páxina anterior pódese describir sistematicamente, e de forma moi clara, mediante un **diagrama en árbore:**




$P[🟢 \text{ e } 🟢] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

$P[🟢 \text{ e } 🟠] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

$P[🟠 \text{ e } 🟢] = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

$P[🟠 \text{ e } 🟠] = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

### Lembra

Significado dalgunhas probabilidades:

$\frac{2}{5} = P[$🟠 na 1.ª$]$

$\frac{3}{4} = P[$🟢 en 2.ª / 🟠 en 1.ª$]$

### Exercicio resolto

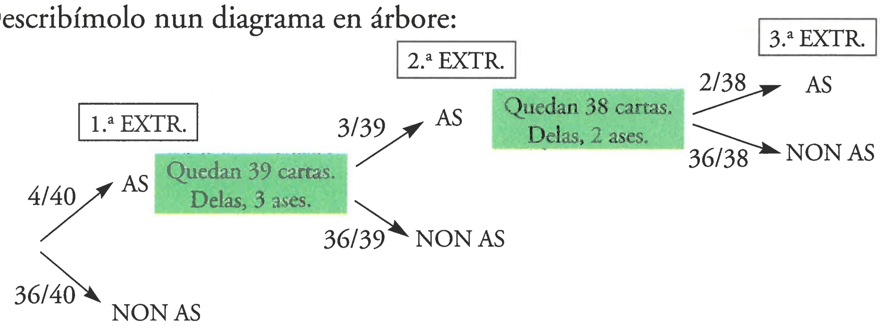
**Extraemos tres cartas dunha baralla española. Achar a probabilidade de obter tres ASES.**

$P[3 \text{ ASES}] = P[\text{AS en 1.ª e AS en 2.ª e AS en 3.ª}] =$

$= P[\text{AS en 1.ª}] \cdot P[\text{AS en 2.ª / AS en 1.ª}] \cdot P[\text{AS en 3.ª / AS en 1.ª e 2.ª}] =$

$= \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38}$

Describímolo nun diagrama en árbore:




$P[3 \text{ ASES}] = P[\text{AS e AS e AS}] = P[\text{AS}] \cdot P[\text{AS en 2.ª / AS en 1.ª}] \cdot$

$\cdot P[\text{AS en 3.ª / AS en 1.ª e 2.ª}] = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} = \frac{1}{2\,470}$

### Observa

Se na 1.ª sae AS, quedan 3 ASES de 39 cartas. Por tanto:

$P[\text{AS en 2.ª / AS en 1.ª}] = \frac{3}{39}$

Analogamente:

$P[\text{AS en 3.ª / AS en 1.ª e 2.ª}] = \frac{2}{38}$

### Actividades

**1** Extraemos dúas cartas dunha baralla española. Cal é a probabilidade de que a primeira sexa un REI e a segunda un AS?

**2** Completa o diagrama en árbore do exercicio resolto desta páxina e sobre el acha $P[\text{NINGÚN AS}]$.

**3** Unha urna contén 5 bólas negras e 3 brancas. Extraemos tres bólas. Cal é a probabilidade de que as tres sexan brancas? E negras?

**4** Extráense, unha tras outra, 3 cartas dunha baralla. Cal é a probabilidade de obter BASTOS as tres veces?

a) Supón que se extraen con substitución.

b) Supón que se extraen sen substitución.

**5** Unha urna A ten tres bólas brancas e unha negra. Outra B ten unha bóla negra. Sacamos unha bóla de A e a botámola en B. Removemos e sacamos unha bóla de B. Cal é a probabilidade de que esta sexa branca?

# 6 Táboas de continxencia

TIPO DE ACTIVIDADE EXTRAESCOLAR

| CURSO | CULTURAL | DEPORTIVA | NINGUNHA | TOTAL |
|---|---|---|---|---|
| 1.° | 12 | 36 | 72 | 120 |
| 2.° | 15 | 40 | 45 | 100 |
| 3.° | 21 | 44 | 35 | 100 |
| 4.° | 24 | 40 | 16 | 80 |
| TOTAL | 72 | 160 | 168 | 400 |

Nun centro docente hai 400 alumnos da ESO (120 de 1.°, 100 de 2.°, 100 de 3.° 80 de 4.°). Cada un deles pode participar nunha actividade extraescolar (só nunha o en ningunha). Hai actividades extraescolares de dous tipos: culturais e deportivas.

Na táboa adxunta descríbese o repartimento de alumnos segundo o seu curso segundo o tipo de actividade na que participan.

É unha **táboa de continxencia**, porque describe un colectivo de individuos (o alumnos dun centro) repartidos por dous conceptos (curso e actividade extraes colar). En cada concepto hai varias clases (4 cursos, 3 actividades). Cada indivi duo está contabilizado nalgún recadro e só nun.

### Interpretar unha táboa

Observa a táboa que tes arriba e responde:

a) Cantos alumnos do centro participan en actividades culturais? Cantos deles son de 2.°?

b) Cantos alumnos do centro non participan en ningunha actividade extraescolar? Deles, cantos son de 4.°?

c) Cantos alumnos de 3.° participan en actividades deportivas?

d) Cantos alumnos que participan en actividades deportivas son de 3.°?

**FOLLA DE CÁLCULO** coa que poderás traballar con táboas de continxencia.

## Proporcións e probabilidades

Nesta táboa podemos calcular multitude de proporcións. Por exemplo:

a) Que proporción do total son alumnos de 1.°?

Hai 120 dun total de 400. Polo tanto, 120/400 = 0,3. Son o 30%.

b) Que proporción de alumnos de 1.° participan en actividades culturais?

12 dun total de 120 alumnos de 1.°: 12/120 = 0,10. O 10%.

Como interpretamos estas proporcións como probabilidades? Vexamos:

a) Tomamos ao chou un alumno do centro. Que probabilidade hai de que sexa d 1.°?

$P$[1.°] = 120/400 = 0,3

b) Tomamos ao chou un alumno de 1.°. Que probabilidade hai de que particip nunha actividade cultural?

$P$[CULTURAL / 1.°] = 12/120 = 0,10

Como designamos os 44 alumnos que se encontran na intersección da fila **3.°** a columna **DEPORTIVA**? Son os alumnos de 3.° que participan nunha activida de deportiva. Poderiamos calcular a probabilidade de que ao elixir, ao chou, u alumno do centro, sexa de 3.° e que participe nunha actividade deportiva:

$P$[3.° e DEPORTIVA] = $P$[3.° ∩ DEPORTIVA] = 44/400 = 0,11

## Probabilidades condicionadas

| | CULTURAL | DEPORTIVA | NINGUNHA | TOTAL |
|---|---|---|---|---|
| 1.° | 12 | 36 | 72 | 120 |
| 2.° | 15 | 40 | 45 | 100 |
| 3.° | 21 | 44 | 35 | 100 |
| 4.° | 24 | 40 | 16 | 80 |
| TOTAL | 72 | 160 | 168 | 400 |

Unha das probabilidades obtidas arriba, $P$[CULTURAL / 1.°], é unha **probabili dade condicionada**. O colectivo de referencia non é o total de alumnos do cen tro senón só os de 1.°.

Analogamente, $P$[3.° / CULTURAL] significa que o colectivo de referencia é o con xunto de alumnos que participan nalgunha actividade cultural e nos preguntamo pola probabilidade de que, ao elixir un deles ao chou, sexa de 3.°.

## Exercicios resoltos

1. **1. Explicar o significado dos números que se resaltan na táboa.**

| | CULTURAL | DEPORTIVA | NINGUNHA | TOTAL |
|---|---|---|---|---|
| **1.°** | 12 | 36 | **72** | 120 |
| **2.°** | 15 | **40** | 45 | 100 |
| **3.°** | **21** | 44 | 35 | 100 |
| **4.°** | 24 | 40 | 16 | **80** |
| **TOTAL** | 72 | **160** | 168 | **400** |

1. • 400 é o total de alumnos do centro.
   • 80 é o número de alumnos de 4.°.
   • 160 é o número de alumnos que participan nalgunha actividade deportiva.
   • 21 é o número de alumnos de 3.° que participan nalgunha actividade cultural, é dicir, "**3.° e CULTURAL**" (ou ben "**3.° ∩ CULTURAL**").
   • 40 alumnos de 2.° que participan nalgunha actividade deportiva.
   • 72 alumnos de 1.° que non participan en NINGUNHA actividade extraescolar.

2. **Explicar o que significa cada unha das seguintes expresións e dar o seu valor:**

   ***P*[3.°]**
   ***P*[NINGUNHA]**
   ***P*[2.° / NINGUNHA]**
   ***P*[NINGUNHA/2.°]**

2. *P*[3.°]: probabilidade de que, ao tomar un alumno do centro ao chou, sexa de 3.°

   *P*[3.°] = 100/400 = 1/4 = 0,25

   *P*[NINGUNHA]: proporción de alumnos que non practican ningunha actividade.

   *P*[NINGUNHA] = 168/400 = 0,42

   *P*[2.° / NINGUNHA]: entre os alumnos que non practican NINGUNHA actividade extraescolar, que proporción son de 2.°.

   *P*[2.°/NINGUNHA] = 45/168 = 0,27

   *P*[NINGUNHA / 2.°]: entre os alumnos de 2.°, que proporción non practica NINGUNHA actividade extraescolar.

   *P*[NINGUNHA / 2.°] = 45/100 = 0,45

3. **Para analizar a evolución da participación en actividades CULTURAIS ao avanzar a idade, que proporcións debemos calcular e comparar?**

3. Debemos comparar *P*[CULT./1.°], *P*[CULT./2.°], *P*[CULT./3.°], *P*[CULT./4.°].

   *P*[CULT. / 1.°] = 12/120 = 0,10
   *P*[CULT. / 2.°] = 15/100 = 0,15
   *P*[CULT. / 3.°] = 21/100 = 0,21
   *P*[CULT. / 4.°] = 24/80 = 0,30

   A participación en actividades culturais evoluciona, de 1.º a 4.º, así:
   10% → 15% → 21% → 30%
   Está claro que aumenta coa idade.

## Actividades

8. Podes **reforzar**, no teu CD, o traballo con táboas de continxencia.

**1** Explica o significado dos números 120, 168, 12, 45 e 40 da táboa do exercicio resolto anterior.

**2** Explica o que significa, para a táboa do exercicio resolto anterior, cada unha das expresións seguintes e dá o seu valor:

*P*[1.°] *P*[CULTURAL]
*P*[4.°/CULTURAL] *P*[CULTURAL/4.°]

**3** Queremos analizar, partindo dos datos da táboa do exercicio resolto anterior, a evolución do absentismo (falta de participación) en actividades extraescolares calquera, ao aumentar a idade. Calcula as proporcións que conveña e compáraas.

**4** Nunha bolsa hai 40 bólas ocas, e dentro de cada unha hai un papel no que pon SI ou NON.

| | 🔴 | 🟢 | 🔵 | TOTAL |
|---|---|---|---|---|
| **SI** | 15 | 4 | 1 | 20 |
| **NON** | 5 | 4 | 11 | 20 |
| **TOTAL** | 20 | 8 | 12 | 40 |

A distribución de bólas segundo cores e SI e NON está na táboa.

a) Describe os sucesos SI, NON, 🔴, 🔴/SI, SI/🔴 e calcula as súas probabilidades.

b) Sacamos unha bóla vermella. Qué probabilidade hai de que haxa SI no seu interior? E se a bóla é azul?

c) Sacouse unha bóla e dentro pon SI. Cal é a probabilidade de que sexa 🔴, 🟢 ou 🔵?

# Exercicios e problemas

## PRACTICA

### Relacións entre sucesos

**1** ■□□ Nun sorteo de lotería observamos a cifra en que termina o "gordo".

a) Cal é o espazo mostral?

b) Escribe os sucesos: $A$ = MENOR QUE 5; $B$ = PAR.

c) Acha os sucesos $A \cup B$, $A \cap B$, $A'$, $B'$, $A' \cap B'$.

**2** ■□□ Escribimos cada unha das letras da palabra PREMIO nunha ficha e poñémolas nunha bolsa. Extraemos unha letra ao chou.

a) Escribe os sucesos elementais deste experimento. Teñen todos a mesma probabilidade?

b) Escribe o suceso "obter vogal" e calcula a súa probabilidade.

c) Se a palabra elixida fose SUERTE, como responderías os apartados a) e b)?

**3** ■□□ Lanzamos un dado vermello e outro verde. Anotamos o resultado. Por exemplo, (3, 4) significa 3 no vermello e 4 no verde.

a) Cantos elementos ten o espazo mostral?

b) Describe os seguintes sucesos:

$A$: a suma de puntos é 6; $A = \{(5, 1), (4, 2), \dots\}$

$B$: nun dos dados saíu 4; $B = \{(4, 1), \dots\}$

$C$: nos dados saíu o mesmo resultado.

c) Describe os sucesos $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap C$.

d) Calcula a probabilidade dos sucesos dos apartados b) e c).

e) Calcula a probabilidade de $A'$, $B'$ e $C'$.

**4** ■■□ O xogo do dominó consta de 28 fichas. Sacamos unha ao chou e anotamos a suma ($x$) das puntuacións.

a) Cal é o espazo mostral? Di a probabilidade de cada un dos 13 casos que poden darse.

b) Describe os sucesos:

$A$: $x$ é un número primo.

$B$: $x$ é maior que 4.

$A \cup B$, $A \cap B$, $A'$.

c) Calcula as probabilidades dos sucesos descritos no apartado b).



### Probabilidades sinxelas

**5** ■□□ Na lotería primitiva extráense bólas numerada do 1 ao 49. Calcula a probabilidade de que a primeir bóla extraída :

a) Sexa un número dunha soa cifra.

b) Sexa un número múltiplo de 7.

c) Sexa un número maior que 25.

**6** ■□□ Extráese unha carta dunha baralla española. D cal é a probabilidade de que sexa:

a) REI OU AS.

b) FIGURA E OUROS.

c) NON SEXA ESPADAS.

**7** ■■□ Nunha bolsa hai bólas de cores, pero non sabe mos cantos ni que cores teñen. En 1 000 extracción (devolvendo a bóla cada vez) obtivemos bóla branca e 411 ocasións, bóla negra en 190, bóla verde en 179 bóla azul en 220.

Ao facer unha nova extracción, di que probabilidad asignarías a:

a) Sacar bóla branca.

b) Non sacar bóla branca.

c) Sacar bóla verde ou azul.

d) Non sacar bóla negra nin azul.

Se na bolsa hai 22 bólas, cantas estimas que haberá d cada unha das cores?

**8** ■■□ Ana tira un dado e a súa irmá Eva tírao despois Cal é a probabilidade de que a puntuación de Eva sex superior á de Ana?

**9** ■□□ Lanzamos dous dados e anotamos a puntuación do maior (se coinciden, a dun de eles).

| | ⚀ | ⚁ | ⚂ | ⚃ | ⚄ | ⚅ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ⚀ | 1 | 2 | | | | |
| ⚁ | 2 | | | | 5 | |
| ⚂ | | | | | | |
| ⚃ | | | | 4 | | 6 |
| ⚄ | | | | | | |
| ⚅ | | 6 | | | | |

a) Completa a táboa e di as probabilidades dos seis sucesos elementais 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

b) Acha a probabilidade dos sucesos:

$A$: n.° par, $B$: n.° menor que 4, $A \cap B$.

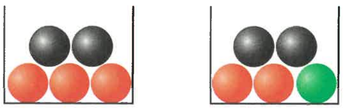
## Experiencias compostas

**10** a) Temos dúas barallas de 40 cartas. Sacamos unha carta de cada unha. Cal é a probabilidade de que ambas as dúas sexan 7? Cal é a probabilidade de que ambas as dúas sexan figuras (sota, cabalo ou rei)?

b) Temos unha baralla de 40 cartas. Sacamos dúas cartas. Cal é a probabilidade de que ambas as dúas sexan un 7? Cal é a probabilidade de que ambas as dúas sexan figura?

**11** Lanzamos tres dados. Cal é a probabilidade de que as tres puntuacións sexan menores que 5?

**12** Sacamos unha bóla de cada urna. Calcula:

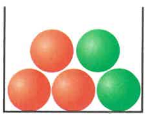


a) A probabilidade de que ambas as dúas sexan vermellas.

b) A probabilidade de que ambas as dúas sexan negras.

c) A probabilidade de que algunha sexa verde.

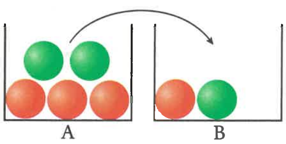
**13** Sacamos dúas bólas. Calcula:



a) $P$[2 vermellas]

b) $P$[2 verdes]

**14** Sacamos unha bóla de A, botámola en B, removemos e sacamos unha de B. Calcula:




a) $P$[1.ª ver. e 2.ª ver.]

b) $P$[1.ª ver. e 2.ª verde]

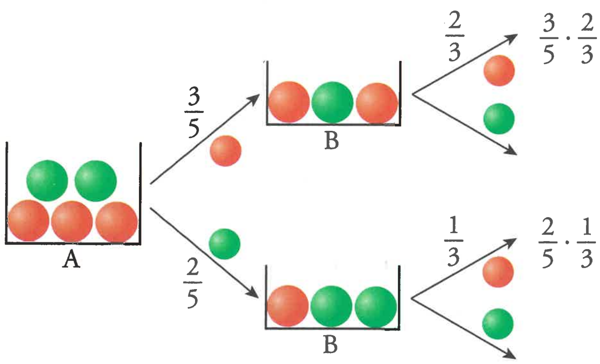
c) $P$[2.ª ver. / 1.ª verde]

d) $P$[2.ª ver. / 1.ª ver.]

e) $P$[2.ª ver.]

f) $P$[2.ª verde]

☞ *e) Para calcular esta probabilidade, ten en conta o diagrama.*




## Táboas de continxencia

**15** Nun centro escolar hai 1000 alumnos e alumnas repartidos así:

| | RAPACES | RAPAZAS |
|---|---|---|
| USAN LENTES | 147 | 135 |
| NON USAN LENTES | 368 | 350 |

Chamamos: A ↔ rapazas, O ↔ rapaces, L ↔ ten lentes, non L ↔ non ten lentes. Calcula:

a) $P$[A], $P$[O], $P$[L], $P$[non L]

b) Describe os seguintes sucesos e calcula as súas probabilidades: A e G, O e non G, A/G, G/A, G/O.

**16** Nunha empresa hai 200 empregados, 100 homes e 100 mulleres. Os fumadores son 40 homes e 35 mulleres.

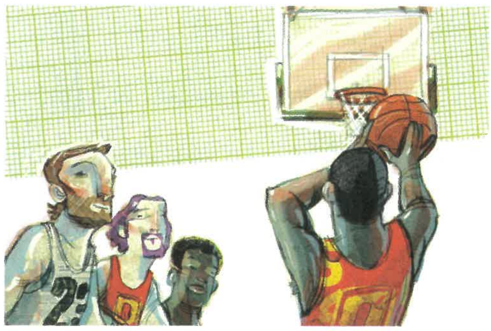
a) Fai cos datos unha táboa de continxencia.

b) Se eliximos un empregado ao chou, calcula a probabilidade de que sexa home e non fume: $P$[H e non F].

c) Calcula tamén: $P$[M e F], $P$[M / F], $P$[F / M]

**17** Os 1 000 socios dun club deportivo distribúense da forma que se indica na táboa.

| | HOMES | MULLERES |
|---|---|---|
| XOGAN AO BALONCESTO | 147 | 135 |
| NON XOGAN AO BALONCESTO | 368 | 350 |



Se se elixe unha persoa ao chou, calcula a probabilidade de que:

a) Sexa un home.

b) Sexa unha muller.

c) Xogue ao baloncesto.

d) Sexa unha muller que practique baloncesto.

e) Sexa un home que non practique baloncesto.

f) Xogue ao baloncesto, sabendo que é home.

g) Sexa muller, sabendo que non xoga ao baloncesto.

# Exercicios e problemas

## PENSA E RESOLVE

**18** Unha urna contén 100 bólas numeradas así:

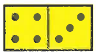
00, 01, 02 ... 99

Chamámoslle $x$ á cifra das decenas e $y$ á cifra das unidades do número que ten cada bóla. Extráese unha bóla ao chou. Calcula a probabilidade de que:

a) $x = 3$ b) $y = 3$ c) $x \neq 7$ d) $x > 5$

e) $x + y = 9$ f) $x < 3$ g) $y > 7$ h) $y < 7$

**19** Sacamos dúas fichas dun dominó. Cal é a probabilidade de que en ambas as dúas a suma das súas puntuacións sexa un número primo (2, 3, 5, 7 ou 11)?

 $4 + 3 = 7$ é primo

**20** Despois de tirar moitas veces un modelo de chinchetas, sabemos que a probabilidade de que unha calquera caia coa punta cara a arriba é 0,38.

Se tiramos dúas chinchetas, cal será a probabilidade de que as dúas caian de distinta forma?

**21** Nunha clase hai 17 rapaces e 18 rapazas. Eliximos ao chou dous alumnos desa clase.

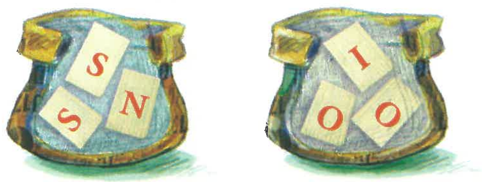
Calcula a probabilidade de que:

a) Os dous sexan rapaces.

b) Sexan dúas rapazas.

c) Sexan un rapaz e unha rapaza.

**22** Extraemos unha tarxeta de cada unha destas bolsas.




a) Calcula a probabilidade de obter un S e un I, "SI".

b) Cal é a probabilidade de obter "NO"?

c) Son sucesos contrarios "SI" e "NO"?

Resólveo cubrindo esta táboa.

| | S | S | N |
|---|---|---|---|
| I | SI | | |
| O | | | |
| O | | SO | |

**23** Nun laboratorio sométese un novo medicame to a tres controis. A probabilidade de pasar o primei é 0,89, a de pasar o segundo é 0,93 e a de pasar o te ceiro é 0,85. Cal é a probabilidade de que o novo pr duto pase as tres probas?

**24** Extráense dúas bólas desta bolsa.

Calcula a probabilidade de que ambas as dúas sexan da mesma cor.

**25** Nunha bolsa temos as letras S, S, N, I, I, ( Sacamos dúas letras. Cal é a probabilidade de que co elas se poida escribir SI?

**26** Xavier ten no seu moedeiro 4 moedas de cin céntimos, 3 de vinte e 2 dun euro. Saca dúas moedas ; chou.

Cal é a probabilidade dos seguintes sucesos?

a) Que as dúas sexan de cinco céntimos.

b) Que ningunha sexa dun euro.

c) Que saque 1,20 €.

**27** Nunha bolsa hai 4 bólas, dúas delas están marc das cun 1 e as outras dúas cun 2. Fanse tres extracció e anótanse os resultados en orde.

Calcula a probabilidade de que o número formado se o 121, supoñendo que:

a) A bóla se reintegra á bolsa.

b) A bóla non se devolve á bolsa.

**28** Un xogador de baloncesto adoita acertar o 75 dos seus tiros desde o punto de lanzamento de persoai Se acerta o primeiro tiro, pode tirar de novo.

Calcula a probabilidade de que:

a) Faga dous puntos.

b) Faga un punto.

c) Non faga ningún punto.

**29** Matías e Helena xogan cunha moeda. Lánzana tr veces e se sae dúas veces cara e unha vez cruz ou dúas v ces cruz e unha vez cara, gaña Matías. Se sae tres vec cara ou tres veces cruz, gaña Helena.

Calcula a probabilidade que ten cada un de gañar.

# Desenvolve as túas competencias



## Le e comprende

### Tarefa con trampa

Alberte e Cristina cobren, para un traballo da clase, un taboleiro de 50 cadros do seguinte modo: avanzando de esquerda a dereita e de arriba abaixo, decídese a cara ou cruz se o cadro se colorea de vermello ou de verde. Os resultados están recollidos nos gráficos da dereita (de momento, esquece os puntos):

Pero o caso é que un fixo o traballo concienciudamente, tirando unha moeda por cadro, e o outro, con trampa, cubriuno, nun momento, caprichosamente.

Con todo, o profesor púxolle mala nota ao que non traballou. **Como o descubriron?**

*Solución:*

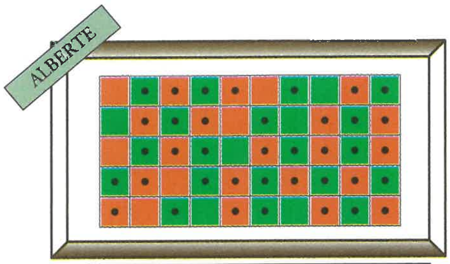
Teoricamente, os dous cadros son posibles. Con todo, ten en conta que:

— O resultado obtido nun cadro non depende do obtido no cadro anterior.

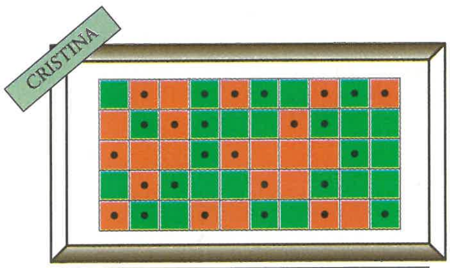
— E iso equivale a dicir que, aproximadamente, a cor dun cadro será a metade das veces igual que o da anterior, e a outra metade, diferente.

Agora, observa os puntos de cada cadrado, que sinalan os cadros que teñen diferente cor que o cadro anterior: cambios de cor de Alberte, 38; cambios de cor de Cristina, 26.

Sospeitas xa cal dos dous fixo trampa e, por querer disimulala, caeu nela?




Cambios de cor: 38
Cambios posibles: 49
Frecuencia relativa: 38/49 → 78%




Cambios de cor: 26
Cambios posibles: 49
Frecuencia relativa: 26/49 → 53%

## Autoavaliación

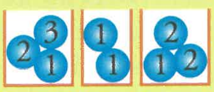
### Reflexiona sobre a túa aprendizaxe

- Resolves problemas de probabilidade de experiencias compostas?
- Interpretas as táboas de continxencia? Resolves problemas de probabilidade relacionados con elas?

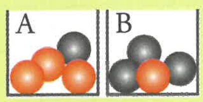
### Verifícao resolvendo exercicios

**1** Nunha bolsa A temos 7 bólas brancas e 3 negras.
Noutra B hai 1 bóla branca, 2 negras e 7 vermellas.
Tiramos un dado. Se sae 1 ó 2, extraemos unha bóla de A. Se sae 3, 4, 5 ou 6, extraemos unha bóla de B.
Calcula a probabilidade de extraer bóla vermella.

**2** De cada unha destas caixas extraemos unha bóla. Cal é a probabilidade de que a suma das tres sexa 5?




**3** Sacamos unha bóla de A, botámola en B, removemos e sacamos unha bóla de B. Calcula a probabilidade de que esta segunda bóla sexa vermella.




**4** Hai un grupo de homes (europeos, africanos e americanos). Uns levan bigote, outros, non.
Qué significan os sucesos BIG/AFR e AFR/BIG?

| | EUR | AFR | AM |
|---|---|---|---|
| BIG | 2 | 6 | 4 |
| NON BIG | 8 | 4 | 6 |

Acha as súas probabilidades.

9. No teu CD-ROM tes unha **autoavaliación moito máis ampla e completa.** Nel encontrarás, ademais, orientacións e, se o desexas, as solucións dos exercicios.