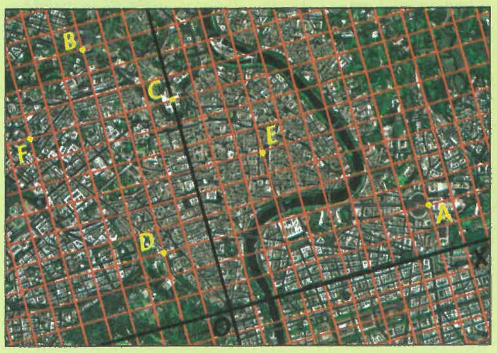
12 Xeometría analítica

Para manexarse polo centro de Roma, Eva e Clara construíron sobre o plano un sistema de referencia cartesiano, tomando como centro de coordenadas, O, a Piazza del Popolo, o eixe X sobre a Via Cola di Rienzo e o eixe Y sobre a Via do Corso. Chamaron A, B, C, D... a algúns lugares emblemáticos.



A. Praza de San Pedro
B. Coliseo
C. Panteón
D. Praza de España
E. Praza Navona
F. Basílica Sta. María a Maior

O lado de cada cadradiño mide 200 m.

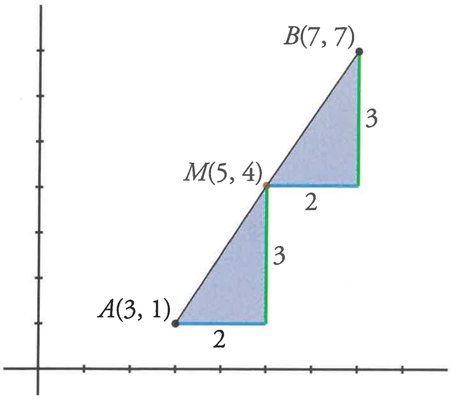
1 Escribe as coordenadas dos puntos A, B, C, D, E, F e recoñece que lugares importantes da cidade son.

2 Clara está no Coliseo, e Eva, na praza de San Pedro. Falan polo móbil para quedar a comer.
—Quedamos no punto medio, di Eva. (Cales son as súas coordenadas?)
—Mellor quedamos na Praza Navona.

3 Pola tarde visitarán a Basílica de Sta María a Maior, F, e, despois, irán á Praza de España, D.
Cal é a ecuación da Via Sixtina, que va dunha a outra? Acha a distancia entre elas.

1. Solucións a estes problemas.

1 Punto medio dun segmento

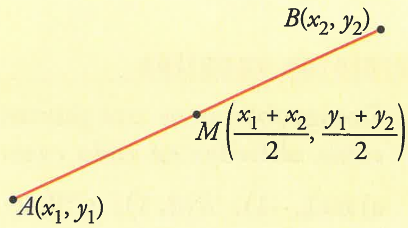


Observa o segmento AB e o seu punto medio, M. A abscisa aumenta 2 para pasar de A a M, o mesmo que para pasar de M a B. Outro tanto lle pasa á ordenada. Por tanto, as coordenadas de M son a media das coordenadas de A e de B:

$$\frac{3+7}{2} = 5 \qquad \frac{1+7}{2} = 4$$

As coordenadas do punto medio M dun segmento de extremos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ son:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



Exercicios resoltos

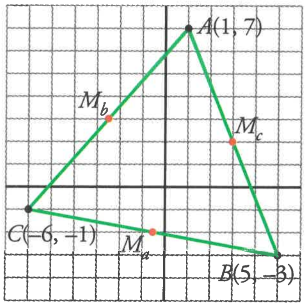
1. Achar o punto medio do segmento de extremos $A(-7, 4)$ e $B(5, 3)$.

1. $M\left(\frac{-7+5}{2}, \frac{4+3}{2}\right) \to M\left(-1, \frac{7}{2}\right)$. Este é o punto medio do segmento AB.

2. Achar as coordenadas dos puntos medios dos lados do triángulo cuxos vértices son:

$A(1, 7)$, $B(5, -3)$, $C(-6, -1)$

2. As coordenadas dos puntos medios dos lados c, a e b son:



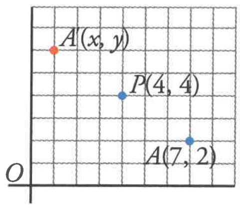
$$M_c\left(\frac{1+5}{2}, \frac{7-3}{2}\right) \to M_c(3, 2)$$

$$M_a\left(\frac{5-6}{2}, \frac{-3-1}{2}\right) \to M_a\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$$

$$M_b\left(\frac{1-6}{2}, \frac{7-1}{2}\right) \to M_b\left(-\frac{5}{2}, 3\right)$$

3. Achar as coordenadas do punto simétrico de $A(7, 2)$ respecto de $P(4, 4)$.

3. Chamámoslle $A'(x, y)$ ao punto simétrico de A respecto de P.



Se A' é o simétrico de A respecto de P, entón P é o punto medio do segmento AA'. Por tanto, as coordenadas de P son a semisuma das de A e A':

$$4 = \frac{x+7}{2} \to x = 1 \qquad 4 = \frac{y+2}{2} \to y = 6$$

As coordenadas de A' son $(1, 6)$.

Actividades

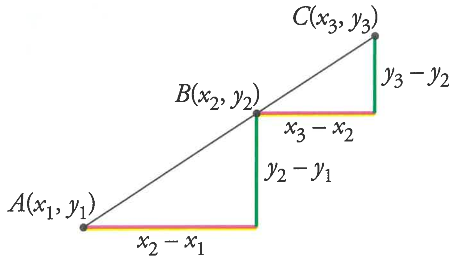
1 Acha as coordenadas do punto medio dos seguintes segmentos:

a) $A(-2, 5)$, $B(4, 1)$ b) $P(7, -3)$, $Q(-5, 1)$
c) $R(1, 4)$, $S(7, 2)$ d) $A(-3, 5)$, $B(4, 0)$

2 Acha as coordenadas do punto simétrico de A respecto de P nos seguintes casos:

a) $A(4, -1)$, $P(-7, 2)$ b) $A(5, 4)$, $P(5, 0)$
c) $A(2, 4)$, $P(5, -1)$ d) $A(-3, 5)$, $P(0, 8)$

2 Comprobación de se tres puntos están aliñados



Se os tres puntos están aliñados, entón os dous triángulos sinalados son semellantes e, por tanto, os seus lados son proporcionais:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$$

Esta é a condición analítica para que os puntos estean aliñados.

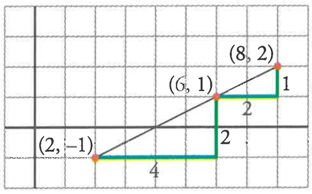
Exercicios resoltos

1. Comprobar se os tres puntos están aliñados en cada caso:

a) $A(2, -1)$, $B(6, 1)$, $C(8, 2)$

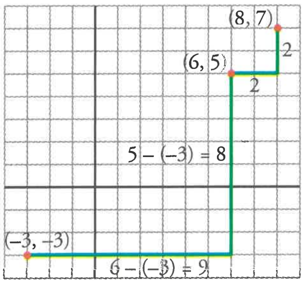
b) $A(-3, -3)$, $B(6, 5)$, $C(8, 7)$

1. a)



$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1-(-1)}{6-2} = \dfrac{2}{4} \\ \dfrac{2-1}{8-6} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$$ $\dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$. Os lados son proporcionais. Por tanto, os puntos están aliñados.

b)

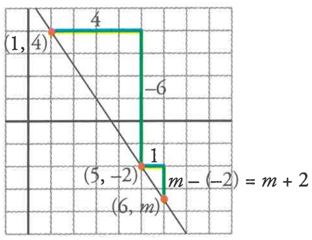


$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{5-(-3)}{6-(-3)} = \dfrac{8}{9} \\ \dfrac{7-5}{8-6} = \dfrac{2}{2} = 1 \end{array}\right\}$$ $\dfrac{8}{9} \neq 1$. Os lados non son proporcionais. Por tanto, os puntos non están aliñados.

Como 8/9 é próximo a 1, parece, á vista, que os puntos están aliñados.

2. Indagar o valor de m para que estean aliñados os puntos $P(1, 4)$, $Q(5, -2)$ e $R(6, m)$.

2.



Para que os puntos estean aliñados, débese cumprir que:

$$\frac{-6}{4} = \frac{m+2}{1} \rightarrow m + 2 = -1{,}5 \rightarrow m = -3{,}5$$

Tomando $m = -3{,}5$, o punto $R(6; -3{,}5)$ está aliñado cos outros dous.

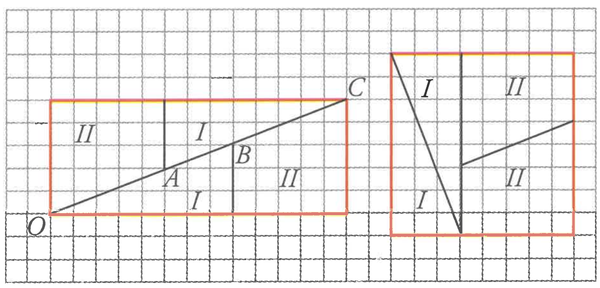
Actividades

1 Comproba se $R(2, 7)$, $S(5, -1)$ e $T(15, -25)$ están aliñados.

2 Indaga o valor de a para que os puntos $R(2, 7)$, $S(5, -1)$ e $Q(a, -25)$ estean aliñados.

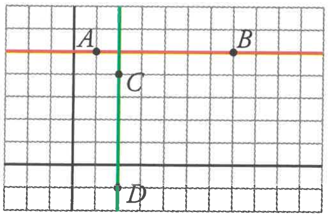
3 Dados os puntos $A(0, 1)$, $B(2, 5)$, $P(8, b)$, indaga o valor de b para que P estea aliñado con A e B.

4 Na figura da dereita, cómo é posible que o rectángulo, que ten $5 \times 13 = 65$ cadriños, se poida descompoñer nos mesmos catro fragmentos que o cadrado, que ten $8 \times 8 = 64$ cadriños?



A clave está en que os puntos $OABC$ non están aliñados. Compróbao tomando a orixe de coordenadas en O: $O(0, 0)$, $A(5, 2)$, $B(8, 3)$, e probando que O, A e B non están aliñados.

3 Distancia entre dous puntos



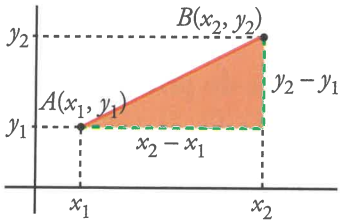
Se dous puntos teñen a mesma abscisa ou a mesma ordenada, achar a súa distancia é moi fácil. Por exemplo, no gráfico:

$dist(A, B) = \overline{AB} = 6; \quad dist(C, D) = \overline{CD} = 5$ (basta con contar cadriños)

Ou ben mediante as súas coordenadas:

$dist[(3, -1), (3, 11)] = 11 - (-1) = 12$

$dist[(4, 7), (1, 7)] = 4 - 1 = 3$



Para dos puntos calquera, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, a súa distancia obtense aplicando o teorema de Pitágoras no triángulo rectángulo coloreado:

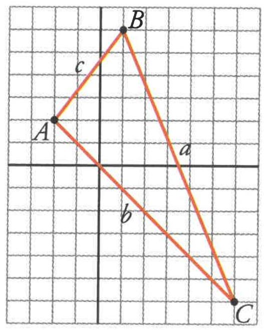
$$dist(A, B) = \overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Esta fórmula tamén é válida se os puntos teñen a mesma abscisa ou a mesma ordenada.

Exercicios resoltos

1. **Calcular a lonxitude dos lados do triángulo de vértices $A(-2, 2)$, $B(1, 6)$, $C(6, -6)$.**

1.



$\overline{AB} = \sqrt{(1 + 2)^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 = c$

$\overline{BC} = \sqrt{(6 - 1)^2 + (-6 - 6)^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 = a$

$\overline{CA} = \sqrt{(6 + 2)^2 + (-6 - 2)^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} = 11{,}31 = b$

2. **Calcular o valor de k para que a distancia de $A(-1, 4)$ a $B(k, 1)$ sexa igual a 5.**

2. $\overline{AB} = \sqrt{(k + 1)^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{k^2 + 2k + 1 + 9} = \sqrt{k^2 + 2k + 10}$

$\overline{AB} = 5 \to \sqrt{k^2 + 2k + 10} = 5 \to k^2 + 2k + 10 = 25 \to$

$\to k^2 + 2k - 15 = 0 \to k = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 15}}{2} = \dfrac{-2 \pm 8}{2} = \begin{cases} -5 \\ 3 \end{cases}$

Hai dos puntos, $B_1(-5, 1)$ e $B_2(3, 1)$, cuxa distancia a $A(-1, 4)$ é igual a 5.

Actividades

1 Acha a distancia entre A e B en cada caso:

a) $A(-7, 4)$, $B(6, 4)$

b) $A(3, 4)$, $B(3, 9)$

c) $A(-5, 11)$, $B(0, -1)$

d) $A(4, -6)$, $B(7, 4)$

2 Acha as lonxitudes dos lados do triángulo de vértices $A(-5, -2)$, $B(7, 3)$, $C(4, 7)$.

3 Calcula o valor de c para que o punto $A(10, c)$ diste 13 unidades do punto $B(-2, 5)$.

4 Calcula o valor de a para que o punto $P(a, 7)$ estea a 10 unidades de distancia de $Q(5, 1)$.

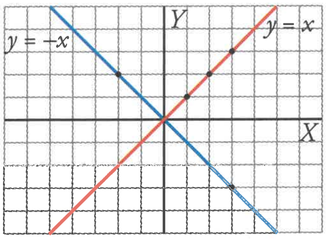
4 Ecuacións de rectas

A ecuación dunha recta, como sabes, é unha relación alxébrica entre as coordenadas (x, abscisa, e y, ordenada) de todos os seus puntos.

Na ecuación dunha recta, chamámoslles (x, y) ás coordenadas dun punto calquera, variable. Adóitase denominar **punto xenérico** da recta.

Vexamos esta idea nalgunhas rectas concretas.

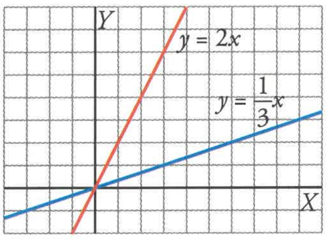
Bisectrices dos cuadrantes



A recta vermella (á que se adoita designar como **bisectriz do primeiro cuadrante**) ten a peculiaridade de que os seus puntos (0, 0), (1, 1), (7, 7), (–4, –4), … teñen iguais as súas coordenadas. Por iso, a súa ecuación é $y = x$.

Os puntos da recta azul (**bisectriz do segundo cuadrante**) teñen as coordenadas iguais e co signo cambiado: (–1, 1), (2, –2), (–2, 2), (11, –11), … Por iso, a súa ecuación é $y = -x$.

Outras rectas que pasan pola orixe

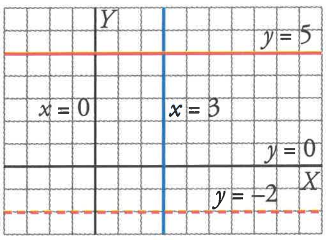


Os puntos da recta vermella teñen un y dobre que o x: (1, 2), (2, 4), (3, 6), (–1, –2), … Por tanto, a súa ecuación é $y = 2x$. O 2 é a pendente.

Na recta azul, (3, 1), (6, 2), (9, 3), (–3, –1), a ordenada é a terceira parte da abscisa. A súa ecuación é $y = \frac{1}{3}x$. A pendente é $\frac{1}{3}$.

En xeral, as rectas que pasan pola orixe de coordenadas teñen por ecuación $y = mx$, onde m é a pendente.

Rectas paralelas aos eixes



Todos os puntos da recta vermella, (–2, 5), (0, 5), (3, 5), (7, 5), … teñen a mesma ordenada: $y = 5$. Esta é, precisamente, a súa ecuación: $y = 5$.

A recta vermella punteada ten por ecuación $y = -2$.

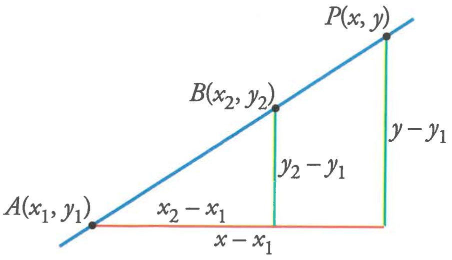
Todos os puntos da recta azul teñen a mesma abscisa: $x = 3$. Por iso, a súa ecuación é $x = 3$.

A ecuación dunha recta paralela ao eixe X é $y = k$. O propio eixe X é $y = 0$.
A ecuación dunha recta paralela ao eixe Y é $x = k$. O propio eixe Y é $x = 0$.

Actividades

1 Representa as seguintes rectas:

a) $y = 3$ b) $x = -1$ c) $x = -y$ d) $y = \frac{1}{2}x$ e) $x = 0$ f) $y = -\frac{1}{3}x$ g) $y = 0$ h) $y = -2x$ i) $y = 3x$



Ecuación da recta que pasa por dous puntos

No gráfico da esquerda, a recta azul pasa por $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$. Un punto xenérico, $P(x, y)$, da recta está aliñado con A e B. Por tanto, os dous triángulos rectángulos son semellantes:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Esta é a ecuación da recta que pasa polos puntos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$.

Exercicio resolto

Achar a ecuación da recta que pasa polos puntos:

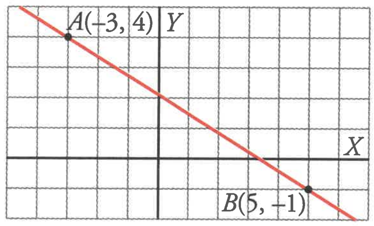
a) $A(-3, 4)$, $B(5, -1)$

b) $P(5, -1)$, $Q(5, 7)$

c) $R(-2, 6)$, $S(7, 6)$

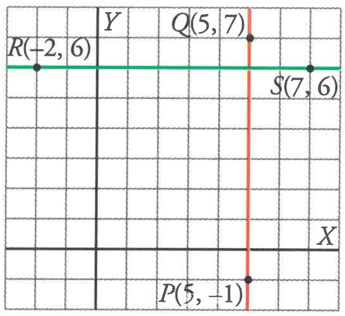
a) $\dfrac{y - 4}{-1 - 4} = \dfrac{x - (-3)}{5 - (-3)} \rightarrow \dfrac{y - 4}{-5} = \dfrac{x + 3}{8} \rightarrow$

$\rightarrow y - 4 = -\dfrac{5}{8}(x + 3) \rightarrow y = -\dfrac{5}{8}(x + 3) + 4$



Observa que chegamos á expresión da recta que pasa por $(-3, 4)$ e ten a pendente $-5/8$ (é a pendente do segmento cuxos extremos son A e B).

b) e c)



$\dfrac{y - (-1)}{7 - (-1)} = \dfrac{x - 5}{5 - 5}$ Que facemos con este $5 - 5 = 0$ no denominador? Non podemos seguir!

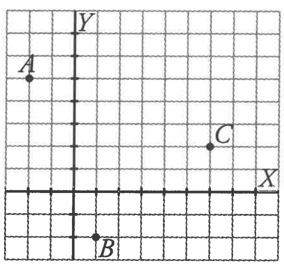
Esta fórmula non serve cando os dos puntos teñen a mesma abscisa ou a mesma ordenada. Pero nestes casos, a recta é paralela ao eixe X ou ao eixe Y, e a súa ecuación é moi sinxela.

- Como P e Q teñen abscisa 5, a ecuación da recta é $x = 5$.

  É unha recta paralela ao eixe Y.
- Como R e S teñen a mesma ordenada, 6, a ecuación da recta é $y = 6$. É unha recta paralela ao eixe X.

Actividades

2 Acha as ecuacións das rectas AB, AC e BC.



3 Acha as ecuacións das rectas PQ, PR e QR, sendo $P(7, 4)$, $Q(7, -1)$ e $R(11, 4)$.

4 Debuxa o triángulo de vértices $A(-2, 1)$, $B(4, 7)$ e $C(10, -5)$.

Acha as ecuacións das rectas sobre as que están situados os seus lados.

5 Paralelismo e perpendicularidade

Pendente de rectas paralelas

A pendente dunha recta marca a súa dirección. Por tanto, dúas rectas paralelas que teñen a mesma dirección, deben ter a mesma pendente.

Dúas rectas paralelas teñen a mesma pendente.

Lembra que se a recta vén dada pola súa ecuación, a **súa pendente é o coeficiente do x cando o y está despexado.** Por tanto, para achar a pendente dunha recta dada pola súa ecuación:

- Despexa o y.
- Observa o coeficiente do x.

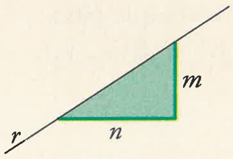
Por exemplo:

$$y = 5x + 3 \rightarrow \text{PENDENTE: } m = 5$$

$$y + 3x - 2 = 0 \rightarrow y = -3x + 2 \rightarrow \text{PENDENTE: } m = -3$$

$$2x - 5y + 7 = 0 \rightarrow y = \frac{2}{5}x + \frac{7}{5} \rightarrow \text{PENDENTE: } m = \frac{2}{5}$$

Non o esquezas



A pendente de r é $\frac{m}{n}$.

Se $n = 1$, a pendente é m.

A pendente dunha recta é, pois, **o que varía o y cando o x aumenta 1.**

Exercicio resolto

Achar a recta r' que pasa por P e é paralela a r.

a) r: $y = 4x + 7$, $P(5, -3)$

b) r: $5x + 7y + 4 = 0$, $P(-2, 1)$

c) r: $2x + 3 = 0$, $P(4, 3)$

a) Debemos escribir a recta que pasa por $(5, -3)$ e cuxa pendente é 4:

$$r': y = 4(x - 5) - 3 \rightarrow y = 4x - 20 - 3 \rightarrow y = 4x - 23$$

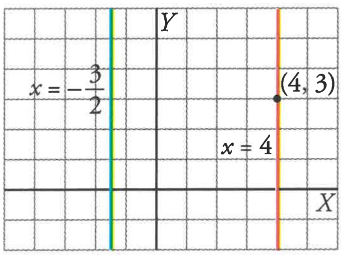
b) Achamos a pendente de r despexando o y:

$$7y = -5x - 4 \rightarrow y = -\frac{5}{7}x - \frac{4}{7}. \text{ A pendente de } r \text{ é } -\frac{5}{7}.$$

Debemos escribir a ecuación da recta que pasa por $(-2, 1)$ e cuxa pendente é $-5/7$:

$$r': y = -\frac{5}{7}(x + 2) + 1 \rightarrow 7y = -5x - 10 + 7 \rightarrow 5x + 7y + 3 = 0$$

c)



r: $2x + 3 = 0 \rightarrow x = -\frac{3}{2}$. Trátase dunha recta paralela ao eixe Y. Por tanto, a recta buscada tamén é paralela ao eixe Y. Como pasa polo punto $(4, 3)$, trátase da recta $x = 4$.

Actividades

1 Acha a recta r' que é paralela a r e pasa por P:

a) r: $y = -2x + 4$, $P(2, 5)$

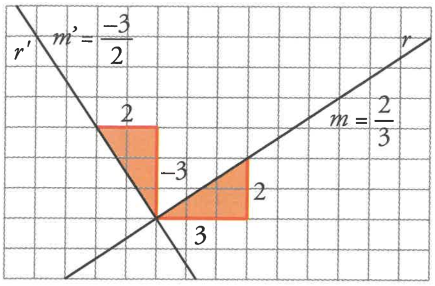
b) r: $5x - 7y + 4 = 0$, $P(-3, 4)$

c) r: $7x + 4 = 0$, $P(0, 5)$

d) r: $5y - 15 = 0$, $P(-4, -2)$

e) r: $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$, $P(1, 0)$

Pendente dunha recta perpendicular a outra



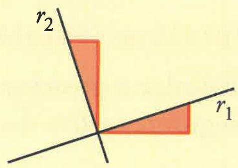
As rectas r e r' son perpendiculares. Por tanto, os triángulos sinalados son iguais. Observando os seus catetos, concluímos:

A pendente de r é $m = \frac{2}{3}$. A pendente de r' é $-\frac{3}{2} = -\frac{1}{m}$.

Esta relación é válida en xeral.

As pendentes m_1 e m_2 de dúas rectas perpendiculares relaciónanse así:

$$m_2 = \frac{-1}{m_1}, \text{ ou ben } m_1 \cdot m_2 = -1$$



Exercicios resoltos

1. Achar a ecuación da recta r' que pasa por P e é perpendicular a r.

a) $P(4, -2)$, $r: y = 2x - 7$

b) $P(-5, 0)$, $r: 2x - 5y + 7 = 0$

c) $P(3, 2)$, $r: 2x + 6 = 0$

1. a) A pendente de r é $m = 2 \to$ a pendente de r' é $m' = -\frac{1}{2}$.

A ecuación de r' é $y = -\frac{1}{2}(x - 4) - 2$.

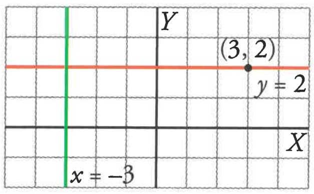
b) Achamos a pendente de r:

$2x - 5y + 7 = 0 \to 5y = 2x + 7 \to y = \frac{2}{5}x + \frac{7}{5} \to m = \frac{2}{5}$

A pendente de r' é $m' = -\frac{1}{m} = -\frac{5}{2}$.

A ecuación de r' é $y = -\frac{5}{2}(x + 5)$.

c) $2x + 6 = 0 \to x = -3$



r é unha recta paralela ao eixe Y. Por tanto, a recta r' é paralela ao eixe X. Como pasa polo punto (3, 2), a súa ecuación é $y = 2$.

2. Achar o valor de k para que r': $2x - ky + 11 = 0$ sexa perpendicular a r: $5x + 2y = 0$.

2. Pendente de r': $ky = 2x + 11 \to y = \frac{2}{k}x + \frac{11}{k} \to m' = \frac{2}{k}$

Pendente de r: $2y = -5x \to y = -\frac{5}{2}x \to m = -\frac{5}{2}$

Por ser perpendiculares, $m \cdot m' = -1 \to \frac{2}{k} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = -1 \to k = 5$

Actividades

2. Actividades para **reforzar** o traballo con ecuacións de rectas.

2 Acha a recta r' que é perpendicular a r e pasa por P.

a) $r: y = -2x + 4$, $P(2, 5)$

b) $r: y = -x + 5$, $P(-3, 0)$

c) $r: 5x - 8y - 16 = 0$, $P(7, -1)$

d) $r: 2x - 11 = 0$, $P(3, 0)$

e) $r: 5y + 10 = 0$, $P(-2, 11)$

3 Indaga o valor que debe ter k para que as rectas $r: 5x + ky - 11 = 0$ e $r': 3x - 8y + 2 = 0$ sexan perpendiculares.

6 Posicións relativas de dúas rectas

Graficamente, dúas rectas poden cortarse ou non. Se non se cortan, son paralelas

Pero se as rectas veñen dadas polas súas ecuacións, é posible que se dea un terceiro caso: que sexan a mesma recta e, ao mostrar distinto aspecto alxébrico, non s aprecie a simple vista.

Para saber a posición relativa de dúas rectas dadas polas súas ecuacións, resólves o sistema formado por elas.

Exercicio resolto

Estudar a posición relativa dos seguintes pares de rectas:

a) $r: 5x - 4y + 10 = 0$

$s: y = 2x + 1$

b) r **pasa por (2, –1) e (8, 2).**

s **pasa por (2, 5) e a súa pendente é –1.**

c) r **pasa por (3, 8) e (8, 3).**

$s: x + y = 11$

d) r **pasa por (2, 4) e (4, 7).**

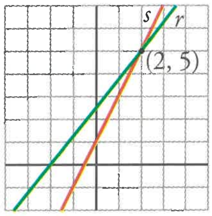
$s: y = \frac{3}{2}x - 2$

a) $\begin{cases} 5x - 4y + 10 = 0 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \rightarrow 5x - 4(2x + 1) + 10 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 5x - 8x - 4 + 10 = 0 \rightarrow -3x + 6 = 0 \rightarrow x = 2$

$y = 2 \cdot 2 + 1 = 5 \rightarrow y = 5$

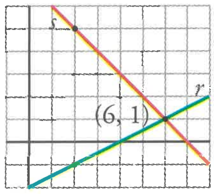
As rectas córtanse cortan no punto (2, 5).



b) $r: \frac{y+1}{2+1} = \frac{x-2}{8-2} \rightarrow \frac{y+1}{3} = \frac{x-2}{6} \rightarrow y + 1 = \frac{x-2}{2}$

$s: y = -(x - 2) + 5$

$\begin{cases} y + 1 = \frac{x}{2} - 1 \\ y = -x + 7 \end{cases}$ Resolvendo o sistema obtense o punto de corte, (6, 1).



c) $r: \frac{y-8}{3-8} = \frac{x-3}{8-3} \rightarrow \frac{y-8}{-5} = \frac{x-3}{5} \rightarrow y - 8 = -(x - 3) \rightarrow y = -x + 11$

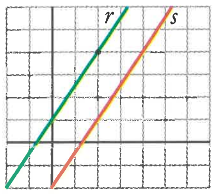
$s: x + y = 11 \rightarrow y = -x + 11$

r e s son a mesma recta.

d) $r: \frac{y-4}{7-4} = \frac{x-2}{4-2} \rightarrow \frac{y-4}{3} = \frac{x-2}{2} \rightarrow y - 4 = \frac{3}{2}(x - 2) \rightarrow$

$\rightarrow y = \frac{3}{2}x - 3 + 4 \rightarrow y = \frac{3}{2}x + 1$

r é paralela a s, porque teñen a mesma pendente, 3/2, pero distintas ordenadas na orixe: 1 e –2, respectivamente.



Actividades

1 Di a posición relativa dos seguintes pares de rectas:

a) $r: 8x + 2y - 14 = 0, \; s: 5x - y - 20 = 0$

b) $r: 3x - 2y - 14 = 0$

s: pasa por (1, –2) e por (10, 1).

c) r: pasa por (–1, 4) y (7, –2).

$s: 3x + 4y = 0$

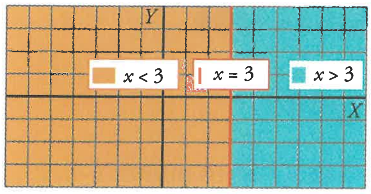
d) r: pasa por (2, –1) e (8, 2).

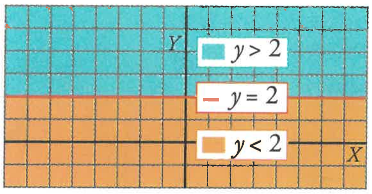
s: a súa pendente é $\frac{1}{2}$ e pasa por (0, –2).

7 Rexións do plano delimitadas por rectas

A recta $x = 3$ limita dous recintos. O da esquerda responde á **inecuación** $x < 3$, e o da dereita, a $x > 3$.

Se poñemos $x \geq 3$, referímonos ao semiplano da dereita (coa recta incluída).

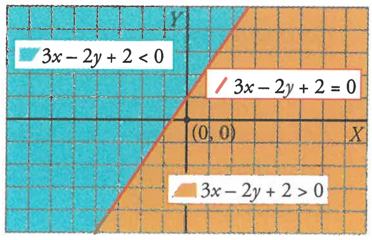




A recta $y = 2$ separa os dous recintos de inecuacións $y < 2$, $y > 2$.

O recinto $y \leq 2$ é o semiplano de abaixo.

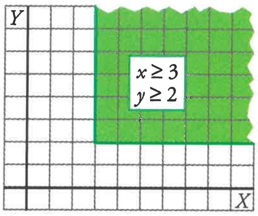
Calquera recta parte o plano en dous recintos cuxas inecuacións se obteñen da ecuación da recta, substituíndo o signo = por < y >. A que recinto corresponde cada inecuación? É moi sinxelo de saber: tomamos un punto calquera, por exemplo o (0, 0), e substituímos:

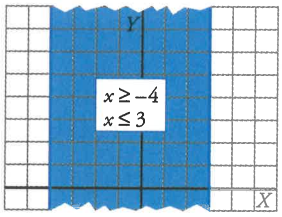


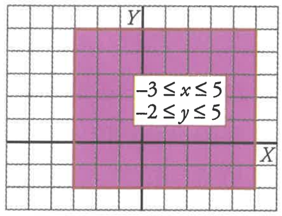
$$3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 2 = 2 > 0$$

Por tanto, o semiplano no cal está o punto (0, 0) é o $3x - 2y + 2 > 0$.

Os **sistemas de inecuacións** serven para describir recintos que se obteñen como intersección dos anteriores. Observa os seguintes exemplos:

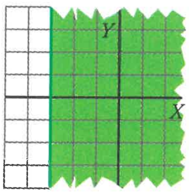


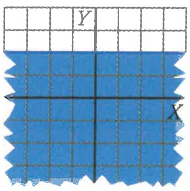


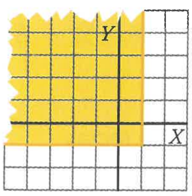


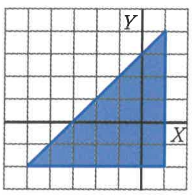
Actividades

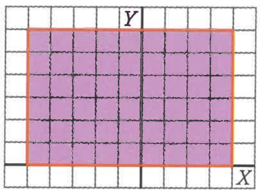
1 Escribe as expresións que representan estas rexións:

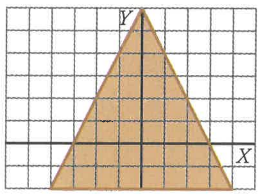
a)


b)


c)


d)


e)


f)


2 Representa de forma gráfica os recintos que se obteñen a partir dos seguintes sistemas de inecuacións:

a) $\begin{cases} 1 \leq x \leq 6 \\ -2 \leq y \leq 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y \geq 0 \\ x \leq 4 \end{cases}$

Exercicios e problemas

PRACTICA

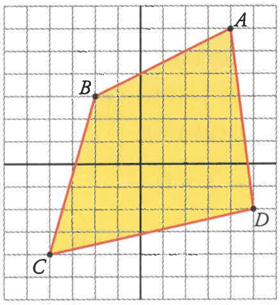
Puntos

1 Se os puntos $(-6, 2)$, $(-2, 6)$ e $(2, 2)$ son vértices dun cadrado, cal é o cuarto vértice?

2 Os puntos $(-2, 3)$, $(1, 2)$ e $(-2, 1)$ son vértices dun paralelogramo. Cales son as coordenadas do cuarto vértice?

3 Representa os puntos $A(3, 1)$, $B(-5, 3)$, $C(1, 2)$, $D(-1, -2)$, $E(-2, -5)$, $F(5, 0)$ e acha as coordenadas do punto medio dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$.

4 Calcula as coordenadas dos puntos medios dos lados e das diagonais do cuadrilátero $ABCD$.



5 Acha, en cada caso, o punto simétrico de $A(-3, -5)$ respecto de:

a) $P(-2, 0)$ b) $Q(2, -3)$ c) $O(0, 0)$

6 Se $M(-3, 5)$ é o punto medio do segmento AB, acha o punto B en cada un dos seguintes casos:

a) $A(-1, 5)$ b) $A(6, -4)$ c) $A(-4, -7)$

7 Os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ teñen o mesmo punto medio. Acha as coordenadas do punto D, sabendo que $A(-2, 3)$, $B(-3, -1)$, $C(4, -2)$.

8 Comproba, en cada caso, que os puntos dados están aliñados:

a) $A(1, 2)$, $B(4, 3)$, $C(19, 8)$

b) $P(-2, -3)$, $Q(2, 0)$, $R(-26, -21)$

9 Comproba, en cada caso, que os puntos dados están aliñados:

a) $A(-1, 3)$, $B\left(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $C(-4, -2)$

b) $A(1, 0)$, $B(-3, -2)$, $C(5, 2)$

10 Calcula m para que os puntos $R(5, -2)$, $S(-1, 1)$ e $T(2, m)$ estean aliñados.

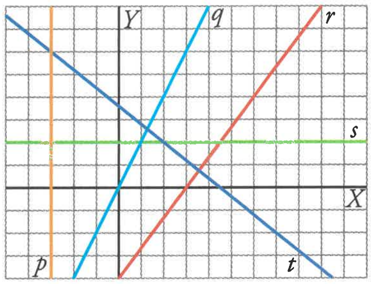
Rectas

11 Acha a ecuación da recta que pasa polos puntos dados:

a) $A(-1, 0)$, $B(0, 3)$ b) $A(0, -2)$, $B(5, -2)$

c) $A(-2, 3)$, $B(4, -1)$ d) $A(-2, -4)$, $B(10, 24)$

12 Escribe a ecuación das rectas p, q, r, s e t.



13 Escribe a ecuación das seguintes rectas:

a) Pasa por $(-4, 2)$ e a súa pendente é $\frac{1}{2}$.

b) Pasa por $(1, 3)$ e a súa pendente é -2.

c) Pasa por $(5, -1)$ e a súa pendente é 0.

14 Acha a ecuación das seguintes rectas:

a) Paralela a $y = -2x + 3$ e pasa por $(4, 5)$.

b) Paralela a $2x - 4y + 3 = 0$ e pasa por $(4, 0)$.

c) Paralela a $3x + 2y - 6 = 0$ e pasa por $(0, -3)$.

15 Escribe a ecuación da recta perpendicular a r e que pasa polo punto P nos seguintes casos:

a) $r: y = -2x + 3$; $P(-3, 2)$

b) $r: 3x - 2y + 1 = 0$; $P(4, -1)$

c) $r: x = 3$; $P(0, 4)$

16 Dados os puntos $A(-3, 2)$ e $B(5, 0)$, acha as ecuacións das rectas seguintes:

r: pasa por A e é perpendicular a AB.

s: pasa por B e é perpendicular a AB.

17 Comproba se os puntos $A(18, 15)$ e $B(-43, -5)$ pertencen á recta $x - 3y + 27 = 0$.

18 Calcula n e m para que as rectas

$r: 3x + my - 8 = 0$ $\quad s: nx - 2y + 3 = 0$

se corten no punto $P(1, 5)$.

19 Acha o punto de intersección das rectas r e s nos casos seguintes:

a) $\begin{cases} r: 3x - 5y + 17 = 0 \\ s: 7x + 3y - 19 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} r: 3x + 6 = 0 \\ s: 2y - 5 = 0 \end{cases}$

20 Estuda a posición relativa das rectas:

$r: 3x - 5y + 15 = 0$ e s: pasa por $(-2, -3)$ e $(8, 3)$

21 Acha a ecuación da recta perpendicular a AB no seu punto medio, sendo $A(-5, 3)$ e $B(2, 7)$.

22 As rectas r e s pasan polo punto $(-4, 2)$; r é paralela a $3x - 12 = 0$ e s é perpendicular a ela. Representa r e s, e acha a súa ecuación.

23 Estuda a posición relativa dos seguintes pares de rectas:

a) $\begin{cases} r: 2x - 5y + 3 = 0 \\ s: P(3, 1),\ Q(-2, 3) \end{cases}$ b) $\begin{cases} r: 5x - 4y + 8 = 0 \\ s: A(4, 7),\ B(0, 2) \end{cases}$

24 A recta r é paralela a $5x - 4y + 3 = 0$, e a recta s é perpendicular a elas. Ambas as dúas pasan polo punto $(1, 3)$. Escribe as ecuacións das rectas r e s.

Distancias entre dous puntos

25 Calcula a distancia entre P e Q.

a) $P(3, 5)$, $Q(3, -7)$

b) $P(-8, 3)$, $Q(-6, 1)$

c) $P(0, -3)$, $Q(-5, 1)$

d) $P(-3, 0)$, $Q(15, 0)$

26 a) Acha o punto medio do segmento de extremos $A(-2, 0)$ e $B(6, 4)$.

b) Comproba que a distancia do punto medio a cada uno dos extremos é a mesma.

27 Comproba que o triángulo de vértices $A(-1, 0)$, $B(3, 2)$ e $C(7, 4)$ é isóscele. Cales son os lados iguales?

28 Comproba, mediante o teorema de Pitágoras, que o triángulo de vértices $A(-2, -1)$, $B(3, 1)$ e $C(1, 6)$ é rectángulo. Acha o seu perímetro e a súa área.

29 Represента o cuadrilátero de vértices $A(-4, 0)$, $B(2, 9/2)$, $C(4, -1)$, $D(-4, -6)$ e acha o seu perímetro.

PENSA E RESOLVE

30 Os puntos $A(4, 5)$ e $B(7, 0)$ son vértices dun trapecio rectángulo que ten dous lados sobre os eixes de coordenadas e outro lado paralelo ao eixe X.

Debuxa o trapecio e acha:

a) As ecuacións dos lados.

b) O seu perímetro.

c) A súa área.

31 Debuxa un paralelogramo que teña dous dos seus lados sobre as rectas $y = 3x$ e $y = 0$, e un vértice no punto $P(6, 3)$.

a) Acha as ecuacións dos outros lados.

b) Acha as coordenadas dos outros vértices.

32 Determina os puntos que dividen o segmento de extremos $A(-5, -2)$ e $B(7, 2)$ en catro partes iguales.

33 Dados os puntos $A(0, 4)$ e $B(-5, 0)$, acha o punto simétrico de B respecto de A e o simétrico de A respecto de B.

34 Os segmentos AC e BD teñen o mesmo punto medio. Acha as coordenadas do punto D sabendo que $A(-2, 3)$, $B(-3, -1)$ e $C(4, -2)$.

35 Comproba que o cuadrilátero de vértices $A(1, 5)$, $B(5, 1)$, $C(-4, -3)$ e $D(-8, 1)$ é un paralelogramo. Para iso, proba que os puntos medios das súas diagonais coinciden.

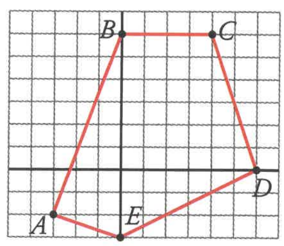
36 Acha as coordenadas do punto D, de modo que $ABCD$ sexa un paralelogramo, sendo $A(1, -1)$, $B(0, 2)$ e $C(6, 5)$.

37 Comproba que o triángulo de vértices $A(4, 4)$, $B(-2, 3)$ e $C(3, -2)$ é isóscele e calcula a súa área.

☞ *Ten en conta que unha altura corta o lado desigual no seu punto medio.*

38 a) Calcula o perímetro do pentágono $ABCDE$.

b) Descompono en figuras máis simples e acha a súa área.



Exercicios e problemas

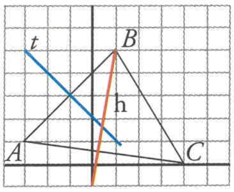
39 Exercicio resolto

No triángulo de vértices $A(-3, 1)$, $B(1, 5)$ e $C(4, 0)$, achar:

a) A ecuación da altura h que parte do vértice B.

b) A ecuación da mediatriz t do lado AB.

a) A altura h é perpendicular ao lado AC.



Pendente de AC: $m = -\dfrac{1}{7}$

Pendente de h: $m' = 7$

A recta h pasa por B e a súa pendente é 7.

h: $y = 5 + 7(x - 1) \rightarrow 7x - y - 2 = 0$

b) A mediatriz t é perpendicular a AB no seu punto medio.

Punto medio de AB: $\left(\dfrac{-3+1}{2}, \dfrac{1+5}{2}\right) = (-1, 3)$

Pendente de AB: $m = \dfrac{5-1}{1+3} = 1$

Pendente de t: $m'' = -1$

Por tanto, a ecuación buscada é:

t: $y = 3 - 1(x + 1) \rightarrow x + y - 2 = 0$

40 Dado o triángulo de vértices $A(-5, 4)$, $B(4, 1)$ e $C(-1, -2)$, acha:

a) As ecuacións dos tres lados.

b) O punto medio do lado AC.

c) A ecuación da mediana do vértice B.

41 No triángulo de vértices $A(-1, 1)$, $B(3, 4)$ e $C(3, 0)$, acha:

a) A ecuación da mediatriz de BC.

b) A ecuación da mediatriz de AC.

c) O punto de intersección das mediatrices (o circuncentro do triángulo).

42 Dadas estas rectas:

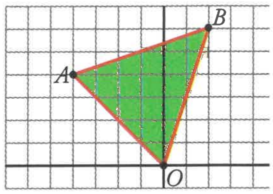
$$r: 3x + by - 12 = 0$$

$$s: ax - y + 6 = 0$$

calcula os valores de a e de b sabendo que r e s son perpendiculares entre si e que r pasa polo punto $(9, -15/2)$.

43 Exercicio resolto

Describir, mediante un sistema de inecuacións, o recinto representado.



Achamos as ecuacións das rectas AO, OB e AB.

- AO é a bisectriz do 2.° cuadrante: $x + y = 0$
  Tomamos un punto calquera do recinto, por exempl
  $(-1, 3)$, e substituímos as súas coordenadas na ecua
  ción da recta achada: $-1 + 3 = 2 > 0$.

  Por tanto, o semiplano buscado é $x + y \geq 0$.

- A ecuación de OB é $y = 3x \rightarrow 3x - y = 0$.

  $(-1, 3) \rightarrow 3(-1) - 3 = -6 < 0$.

  Por tanto, tomamos $3x - y \leq 0$.

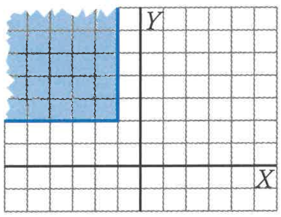
- A ecuación de AB é $x - 3y + 16 = 0$ (compróbao).

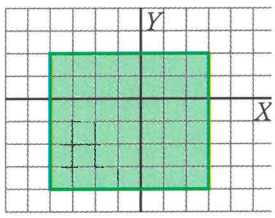
  $(-1, 3) \rightarrow -1 - 3 \cdot 3 + 16 = 6 > 0 \rightarrow$

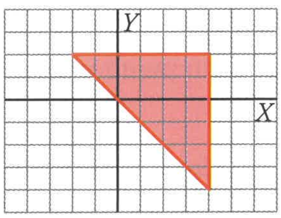
  $\rightarrow x - 3y + 16 \geq 0$

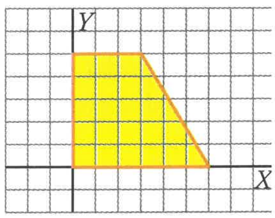
Solución: $\begin{cases} x + y \geq 0 \\ 3x - y \leq 0 \\ x - 3y + 16 \geq 0 \end{cases}$

44 Describe, mediante inecuacións ou sistemas d inecuacións, os seguintes recintos:

a) 

b) 

c) 



45 Representa graficamente os seguintes recintos:

a) $\begin{cases} -1 \leq x \leq 4 \\ y \geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ -1 \leq y \leq 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y \leq 0 \\ x \leq 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x \leq 0 \\ -5 \leq y \leq 0 \\ 5x - 2y \geq -10 \end{cases}$

Le, reflexiona e resolve

Sabías que...?

Hai unha curiosa forma de calcular a área dun polígono cuxos vértices coinciden cos dunha cuadrícula.

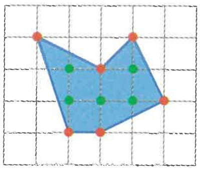
Contas o número de puntos que hai dentro do polígono. $\} \rightarrow x$

Contas o número de puntos que hai sobre o bordo. $\} \rightarrow y$

Entón, a área (A), medida en unidades da cuadrícula, é:

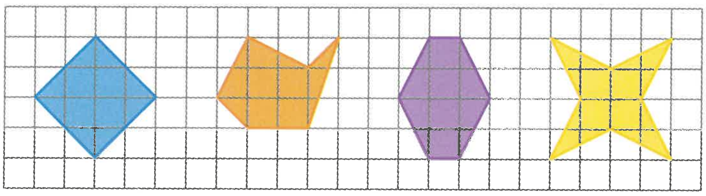
$$A = x + \frac{y}{2} - 1 \quad \textbf{(teorema de Pick)}$$

Por exemplo:

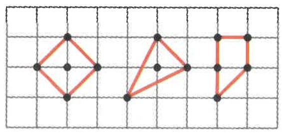


$$\left.\begin{matrix} x = 5 \\ y = 6 \end{matrix}\right\} \rightarrow A = 5 + \frac{6}{2} - 1 = 7$$

- Comproba a relación anterior con estes polígonos:



- Debuxa o maior número de polígonos que sexa posible, con diferente par (x, y) e coa área igual ou menor que 2. Cantos hai?



$x = 1$, $y = 4$ $\quad$ $x = 1$, $y = 3$ $\quad$ $x = 0$, $y = 5$

Autoavaliación

Reflexiona sobre a túa aprendizaxe

- Sabes achar o punto medio dun segmento e o simétrico dun punto respecto de outro? E comprobar se tres puntos están aliñados?
- Sabes calcular a distancia entre dous puntos?
- Obtés con soltura a ecuación dunha recta dada de distintas formas?
- Sabes achar a ecuación dunha recta paralela a outra? E a da perpendicular desde un punto a una recta dada?
- Obtés con axilidade o punto de corte de dúas rectas?

Verifícao resolvendo exercicios

1 Representa os puntos $A(-5, 0)$, $B(0, 2)$, $C(3, 7)$ e $D(-2, 5)$, e comproba analiticamente que o punto medio de AC coincide con o de BD.

2 a) Acha o simétrico de $P(-7, -15)$ respecto de $M(2, 0)$.
b) Cal é a distancia entre P e M?

3 Escribe a ecuación da recta que pasa polos puntos $A(5, -3)$ e $B(7, 0)$.

4 Obtén a ecuación das rectas r e s tales que:
r pasa por $(-3, 2)$ e é perpendicular a $8x - 3y + 6 = 0$.
s pasa por $(9, -5/2)$ e é paralela a $2x + y - 7 = 0$.

5 Acha o punto de intersección das seguintes rectas:

$$3x + 8y - 7 = 0 \quad \text{y} \quad 4x + 2y - 31 = 0$$

3. No teu CD-ROM tes unha **autoavaliación moito máis ampla e completa.** Nel encontrarás, ademais, orientacións e, se o desexas, as solucións dos exercicios.