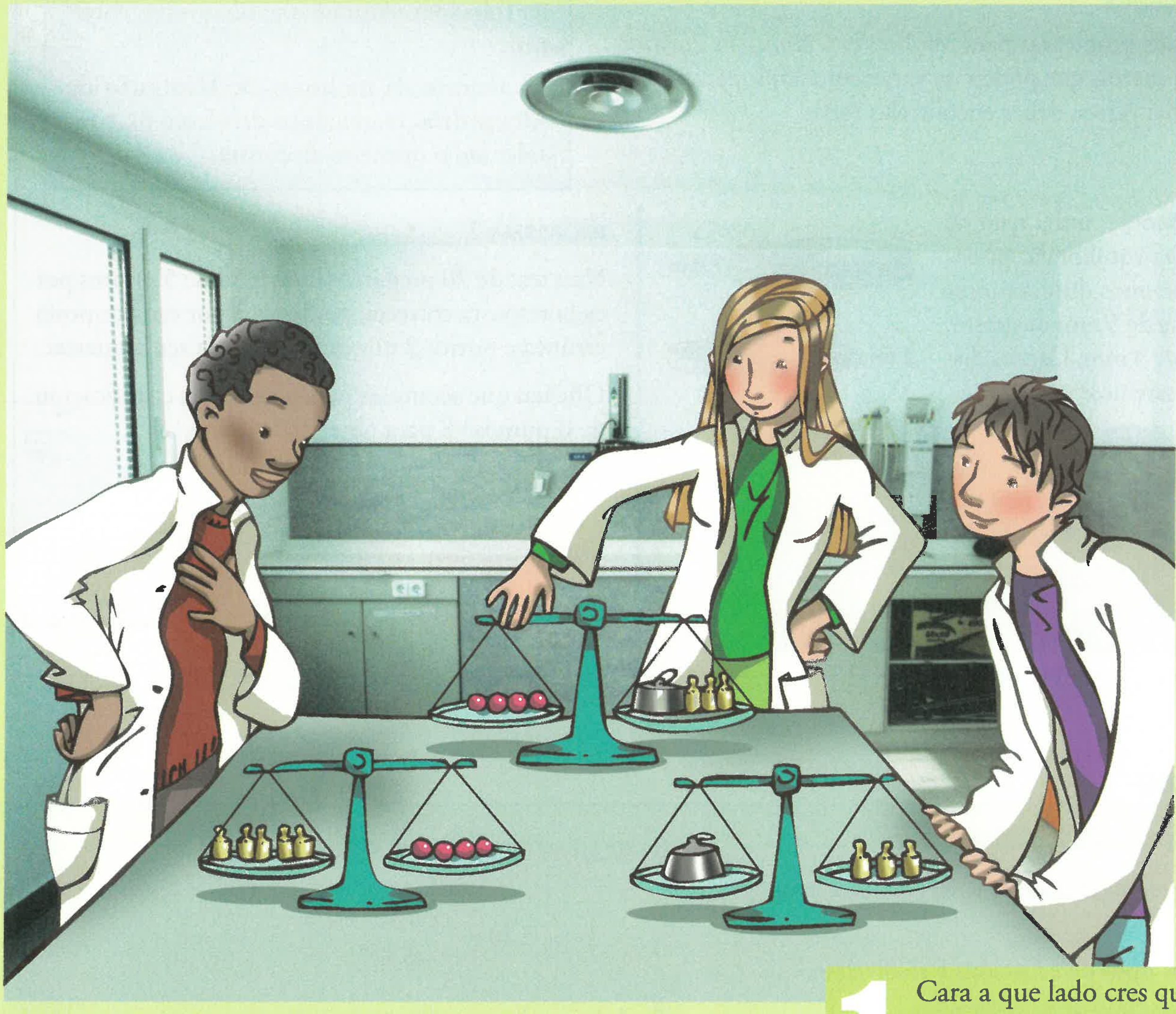
7 Sistemas de ecuacións

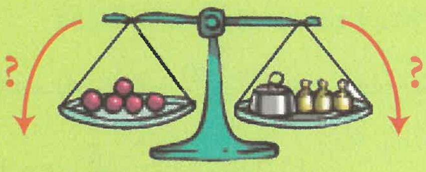


Iolanda, Óscar e Manuel están argallando algo non laboratorio do instituto cunhas balanzas e algúns obxectos. O seu obxectivo é conseguir equilibrar as súas balanzas, pero teñen o problema de que non saben exactamente canto pesa cada un dus obxectos que elixiron, polo que teñen que facer probas.

Tras moitos intentos, Óscar e Manuel conseguiron equilibrar as súas cos obxectos que ves no debuxo de arriba.

1 Cara a que lado cres que se desequilibrará a balanza de Iolanda?
Por que?

2 Antes de que Óscar equilibrara a súa balanza, probara coa seguinte combinación de obxectos:



Desequilibrouse? Cara a onde?

1. Solucións a estes problemas.

1 Ecuacións lineais con dúas incógnitas

Ten en conta

Para nomear as incógnitas non é necesario usar as letras x e y, podemos utilizar outras.

Unha ecuación lineal con dúas incógnitas pódese escribir da forma:

$ax + by = c$, onde a, b e c son números reais.

Solución dunha ecuación lineal con dúas incógnitas é todo par de valores que fan certa a igualdade

Por exemplo, $x + 2y = 4$ é unha ecuación lineal con dúas incógnitas. O par de valores $x = 2$, $y = 1$ é unha solución, pois verifica a igualdade:

$$x = 2,\ y = 1 \longrightarrow x + 2y = 2 + 2 \cdot 1 = 2 + 2 = 4$$

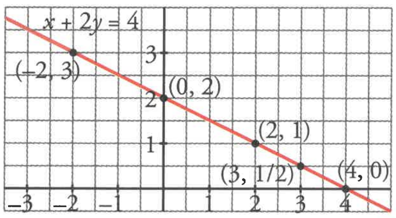
Tamén podemos escribir esta solución como (2, 1).

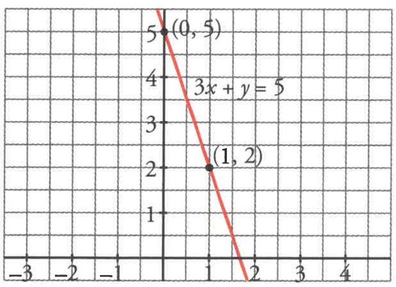
Pero esta ecuación ten moitas outras solucións; por exemplo:

$(0, 2), (4, 0), \left(3, \frac{1}{2}\right), (-2, 3), \ldots$ De feito, ten infinitas solucións.

Unha ecuación lineal con dúas incógnitas ten infinitas solucións.

Representación gráfica





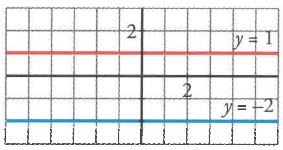
- Se interpretamos as solucións dunha **ecuación lineal con dúas incógnitas** como puntos do plano e os representamos, obtemos **unha recta.** Por exemplo, se consideramos a ecuación $x + 2y = 4$ e representamos as solucións que obtiveramos, vemos que todas están na mesma recta. Ademais, calquera outro punto da recta é solución da ecuación.
- Lembra que, para representar unha recta, basta con coñecer dous dos seus puntos. Para obtelos facilmente, ás veces resulta conveniente despexar unha das incógnitas e dar valores á outra. Por exemplo:

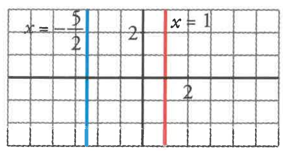
$$3x + y = 5 \longrightarrow y = 5 - 3x$$

x	0	1
y	5	2

A recta pasa por (0, 5) e por (1, 2). A súa gráfica é a que ves á marxe.

- As ecuacións da forma $y = k$ represéntanse mediante rectas horizontais, e as da forma $x = k$, mediante rectas verticais:





Actividades

1 Obtén dúas solucións de cada ecuación e representa as rectas correspondentes:

a) $2x + y = 3$ b) $x + y = 4$

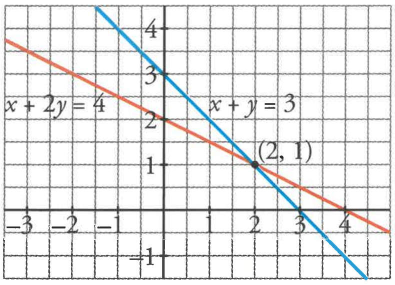
2 Representa graficamente:

a) $y = 3$ b) $y = -\frac{1}{2}$ c) $x = -2$ d) $x = \frac{3}{2}$

2 Sistemas de ecuacións lineais

Varias ecuacións forman un **sistema** cando pretendemos encontrar as solucións comúns a todas elas.

Imos centrarnos nos sistemas de dúas ecuacións lineais con dúas incógnitas. Como vimos na páxina anterior, podemos representar cada unha das ecuacións mediante unha recta.



Graficamente, a **solución** dun sistema de dúas ecuacións lineais con dúas incógnitas é o punto de corte das rectas que o forman.

Por exemplo, consideremos o sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Representando as dúas rectas nos mesmos eixes, vemos que se cortan no punto (2, 1).

A solución do sistema é: $x = 2,\ y = 1$

Número de solucións dun sistema

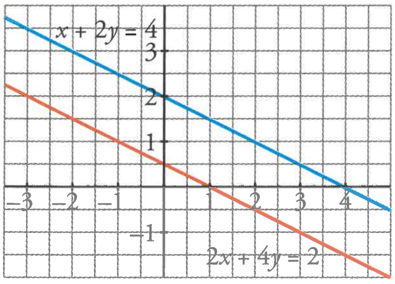
En xeral, un sistema de dúas ecuacións lineais con dúas incógnitas ten unha solución (o punto de corte das dúas rectas), pero, ás veces, non ocorre así. Vexamos qué outros casos poden darse:

- **Sistemas incompatibles (sen solución)**

  Intentemos resolver o seguinte sistema:

  $$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$$

  Representando as dúas rectas, vemos que non se cortan en ningún punto; son paralelas.



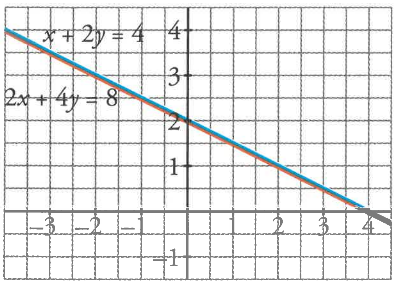
  O sistema non ten solución. (As ecuacións son contraditorias: se $x + 2y = 4$, entón $2x + 4y$ tería que ser igual a 8, non a 2).

- **Sistemas indeterminados (con infinitas solucións)**

  Consideremos agora o seguinte sistema:

  $$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$$

  Observa que as dúas ecuacións din o mesmo (a segunda é o dobre da primeira).



  Trátase da mesma recta. Por tanto, o sistema ten infinitas solucións (calquera punto da recta é solución do sistema).

Actividades

1 Representa as rectas en cada caso e di se o sistema ten unha solución, se é indeterminado (ten infinitas) ou se é incompatible (non ten solución). No caso de que teña unha solución, di cal é:

a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -x + y = 2 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$

3 Resolución de sistemas de ecuacións

Ao representar un sistema de ecuacións lineais, non sempre é fácil ver cal é a solución (en especial, cando non son valores enteiros).

Imos lembrar os tres métodos que coñecemos para resolver un sistema de ecuacións lineais de forma alxébrica.

Método de substitución

Despéxase unha incógnita nunha das ecuacións e substitúese na outra. Obtense así unha ecuación cunha incógnita. Resolvémola e, despois, achamos o valor da outra incógnita.

Ten en conta

O método se **substitución** é especialmente útil cando unha das incógnitas ten coeficiente 1 ou –1 nalgunha das ecuacións.

Exercicio resolto

Resolver polo método de substitución este sistema: $\begin{cases} \mathbf{3x - 5y = 1} \\ \mathbf{x + 2y = 15} \end{cases}$

1.° Despexamos unha das incógnitas nunha das ecuacións. Neste caso, a máis fácil de despexar é o x da segunda ecuación:

$$x = 15 - 2y$$

2.° Substituímos este valor de x na outra ecuación:

$$3(15 - 2y) - 5y = 1$$

3.° Resolvemos a ecuación que obtivemos, que ten unha soa incógnita:

$$45 - 6y - 5y = 1 \rightarrow -11y = -44 \rightarrow y = -44/-11 \rightarrow \mathbf{y = 4}$$

4.° Substituímos este valor de y na ecuación na que aparecía o x despexado (paso 1.°):

$$x = 15 - 2y = 15 - 2 \cdot 4 = 15 - 8 = 7 \rightarrow \mathbf{x = 7}$$

5.° A solución do sistema é: $x = 7$, $y = 4$

6.° Comprobamos que a solución é correcta, substituíndo no sistema inicial os valores obtidos:

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 5y = 1 \rightarrow 3 \cdot 7 - 5 \cdot 4 = 21 - 20 = 1 \\ x + 2y = 15 \rightarrow 7 + 2 \cdot 4 = 7 + 8 = 15 \end{array}\right\} \text{A solución é válida.}$$

Actividades

1 Resolve graficamente o sistema do exercicio resolto anterior:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ x + 2y = 15 \end{cases}$$

Comproba que as dúas rectas se cortan no punto (7, 4), solución que obtivemos.

2 Resolve, polo método de substitución, os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 4x + y = 9 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + 4y = 1 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 3x - y = 10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y + 2 = 5 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$

Método de igualación

O segundo dos métodos que estamos recordando, o método de igualación consiste basicamente en despexar a mesma incógnita nas dúas ecuacións e igualar os resultados.

Despéxase a mesma incógnita nas dúas ecuacións e iguálanse os dous resultados, obtendo así unha ecuación cunha soa incógnita. Áchase o valor desta incógnita resolvendo a ecuación obtida. Para achar o valor da outra incógnita, substitúese en calquera das expresións nas que estaba despexada.

Ten en conta

O método de **igualación** adóitase utilizar cando xa aparece despexada unha mesma incógnita en ambas as ecuacións. En tal caso, é como se aplicásemos o método de substitución.

Exercicio resolto

Resolver polo método de igualación este sistema: $\begin{cases} \mathbf{3x - 5y = 1} \\ \mathbf{x + 2y = 15} \end{cases}$

1.° Despexamos a mesma incógnita nas dúas ecuacións. Neste caso, a máis fácil de despexar é o x:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 1 \;\rightarrow\; 3x = 1 + 5y \;\rightarrow\; x = \dfrac{1 + 5y}{3} \\ x + 2y = 15 \;\rightarrow\; x = 15 - 2y \end{cases}$$

2.° Igualamos os resultados:

$$\frac{1 + 5y}{3} = 15 - 2y$$

3.° Resolvemos a ecuación obtida, que só ten unha incógnita:

$$1 + 5y = 3(15 - 2y) \;\rightarrow\; 1 + 5y = 45 - 6y \;\rightarrow\; 11y = 44 \;\rightarrow\; \mathbf{y = 4}$$

4.° Para achar o valor da outra incógnita, substituímos o valor de y nunha das expresións do primeiro paso, nas que o x aparece despexado:

$$x = 15 - 2y = 15 - 2 \cdot 4 = 15 - 8 = 7 \;\rightarrow\; \mathbf{x = 7}$$

5.° A solución do sistema é: $x = 7,\; y = 4$

6.° Comprobamos que a solución é correcta, substituíndo no sistema inicial os valores obtidos (igual que fixemos na páxina anterior, co método de substitución).

Actividades

1 Resolve, polo método de igualación, os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + 5y = 4 \\ x - 3y = -4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = \dfrac{3x + 1}{2} \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + y = 3 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x + 3y = 3 \\ 2x + 6y = 3 \end{cases}$

Método de redución

Prepáranse as dúas ecuacións (multiplicando polos números que conveña) para que unha das incógnitas teña o mesmo coeficiente en ambas as dúas pero con distinto signo. Ao sumalas, desaparece esa incógnita e podemos obter facilmente o valor da outra. O valor achado substitúese nunha das ecuacións iniciais e resólvese. Obtemos, así, a solución.

Ten en conta

O método de **redución** é moi cómodo de aplicar cando unha incógnita ten o mesmo coeficiente nas dúas ecuacións, ou ben os seus coeficientes son un múltiplo do outro.

Exercicios resoltos

1. Resolver polo método de redución: $\begin{cases} \mathbf{3x - 5y = 1} \\ \mathbf{x + 2y = 15} \end{cases}$

1.° Multiplicamos a segunda ecuación por –3 e sumamos:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ x + 2y = 15 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \xrightarrow{\cdot(-3)} \end{array} \quad \begin{array}{r} 3x - 5y = 1 \\ -3x - 6y = -45 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Sumando:} \quad -11y = -44 \rightarrow \mathbf{y = 4}$$

2.° Substituímos este valor de y nunha das ecuacións iniciais para obter o valor de x. Neste caso, é máis fácil na segunda ecuación:

$$x + 2y = 15 \rightarrow x + 8 = 15 \rightarrow \mathbf{x = 7}$$

3.° A solución do sistema é: $x = 7$, $y = 4$

2. Resolver $\begin{cases} \mathbf{8x + 11y = -18} \\ \mathbf{12x + \ \ 7y = -8} \end{cases}$**, aplicando dúas veces o método de redución.**

- Obtemos o valor de x:

$$\begin{cases} 8x + 11y = -18 \\ 12x + \ \ 7y = -8 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{\cdot(-7)} \\ \xrightarrow{\cdot 11} \end{array} \quad \begin{array}{r} -56x - 77y = 126 \\ 132x + 77y = -88 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Sumando:} \quad 76x = 38 \rightarrow \mathbf{x} = \frac{38}{76} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

- Obtemos o valor de y:

$$\begin{cases} 8x + 11y = -18 \\ 12x + \ \ 7y = -8 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{\cdot 3} \\ \xrightarrow{\cdot(-2)} \end{array} \quad \begin{array}{r} 24x + 33y = -54 \\ -24x - 14y = 16 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Sumando:} \quad 19y = -38 \rightarrow \mathbf{y} = \frac{-38}{19} = \mathbf{-2}$$

- A solución é: $x = \frac{1}{2}$, $y = -2$

Actividades

1 Resolve, polo método de igualación, os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 3y = 5 \\ 5x - 3y = 13 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y = 11 \\ 5x + 6y = 14 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 7x + 2y = 25 \\ 3x - 5y = -1 \end{cases}$

4 Sistemas de ecuacións lineais máis complexos

Cando nos encontramos cun sistema no que as ecuacións teñen unha fisionomía complicada, debemos empezar simplificándoas ata que aparezan na forma $ax + by = c$. Despois, resolvemos por un dos tres métodos que vimos nas páxinas anteriores.

Exercicio resolto

Resolver este sistema: $\begin{cases} \dfrac{2(x-y+4)}{3} - \dfrac{2x+y}{2} = \dfrac{5}{6} \\ -2(x-y+1) + \dfrac{x+y}{3} = -3 \end{cases}$

- Empezamos simplificando cada unha das dúas ecuacións:

$$\begin{cases} \dfrac{2(x-y+4)}{3} - \dfrac{2x+y}{2} = \dfrac{5}{6} \\ -2(x-y+1) + \dfrac{x+y}{3} = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{2x-2y+8}{3} - \dfrac{2x+y}{2} = \dfrac{5}{6} \\ -2x+2y-2 + \dfrac{x+y}{3} = -3 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2(2x-2y+8) - 3(2x+y) = 5 \\ -6x+6y-6+x+y = -9 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 4x-4y+16-6x-3y = 5 \\ -5x+7y = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x-7y = -11 \\ -5x+7y = -3 \end{cases}$$

- Aplicamos un dos tres métodos que coñecemos. Neste caso, resulta moi adecuado o de redución:

$$\begin{cases} -2x-7y = -11 \\ -5x+7y = \ \ -3 \end{cases}$$

Sumando: $-7x \quad = -14 \rightarrow \boldsymbol{x = 2}$

- Achamos o valor de y:

$$-2x-7y = -11 \rightarrow -4-7y = -11 \rightarrow -7y = -7 \rightarrow \boldsymbol{y = 1}$$

- A solución do sistema é: $x = 2$, $y = 1$

Actividades

1 Resolve, simplificando previamente:

a) $\begin{cases} 2(x-y+3) - 3x = 0 \\ \dfrac{2(x+1)}{3} - \dfrac{y}{2} = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{2x}{3} - \dfrac{3y}{2} = 2(x+y) + 3 \\ \dfrac{x-y}{3} = \dfrac{5}{3} \end{cases}$

5 Sistemas non lineais

Ten en conta

Os sistemas de ecuacións non lineais resólvense de forma esencialmente igual aos sistemas lineais.

Son aqueles nos que unha das dúas ecuacións, ou ambas as dúas, son non lineais, é dicir, teñen monomios de segundo grao $(x^2, y^2, x \cdot y)$ ou de grao superior, ou radicais, ou algunha incógnita no denominador…

Para resolvelos, podemos despexar unha incógnita nunha ecuación e substituír o resultado na outra (método de substitución), ou eliminar unha incógnita simplificando entre as dúas ecuacións (método de redución), ou calquera outro método polo que poidamos pasar a unha ecuación cunha incógnita.

Exercicio resolto

Resolver os seguintes sistemas de ecuacións:

a) $\begin{cases} y - x = 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 58 \\ x^2 - y^2 = 40 \end{cases}$

a) Aplicamos o método de substitución:

$$\begin{cases} y - x = 1 & \rightarrow \quad y = 1 + x \\ x^2 + y^2 = 5 & \rightarrow \quad x^2 + (1 + x)^2 = 5 \rightarrow x^2 + 1 + x^2 + 2x = 5 \rightarrow \end{cases}$$

$$\rightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 0 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \rightarrow y_1 = 1 + 1 = 2 \\ x_2 = -2 \rightarrow y_2 = 1 - 2 = -1 \end{cases}$$

Hai dúas solucións: $x_1 = 1,\ y_1 = 2$

$x_2 = -2,\ y_2 = -1$

b) Aplicamos o método de redución:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 58 \\ x^2 - y^2 = 40 \end{cases}$$

Sumando: $2x^2 = 98 \rightarrow x^2 = 49 \rightarrow x = \pm 7$

Si $x = 7 \rightarrow 49 + y^2 = 58 \rightarrow y^2 = 9 \rightarrow y = \pm 3$

Si $x = -7 \rightarrow 49 + y^2 = 58 \rightarrow y^2 = 9 \rightarrow y = \pm 3$

Hai catro solucións: $x_1 = 7,\ y_1 = 3$

$x_2 = 7,\ y_2 = -3$

$x_3 = -7,\ y_3 = 3$

$x_4 = -7,\ y_4 = -3$

Non o esquezas

Se hai raíces ou incógnitas no denominador, ao resolver a ecuación pode aparecer algunha solución falsa. Por iso, en tales casos, é necesario comprobar todas as solucións sobre o sistema inicial.

2. Actividades para **reforzar** a resolución de sistemas non lineais.

Actividades

1 Resolve os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x - y = 15 \\ x \cdot y = 100 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21 \\ x + y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x^2 + xy = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = \sqrt{x + 1} \\ y = 5 - x \end{cases}$

6 Resolución de problemas mediante sistemas

Para resolver problemas mediante ecuacións ou sistemas de ecuacións, traducimo á linguaxe alxébrica os datos que nos dan.

Hai moitos problemas que se poden resolver mediante ecuacións cunha incógnita, pero resultan máis fáciles de formular se os resolvemos mediante sistemas de ecuacións con dúas incógnitas.

Problemas resoltos

1. Elvira pagou 14 € por 4 bocadillos de xamón e 5 refrescos, e Lorena gastou 8,40 € en 3 bocadillos de xamón e 2 refrescos. Canto custa un bocadillo de xamón? E un refresco?

- Temos dúas incógnitas: $\begin{cases} x = \text{prezo dun bocadillo de xamón} \\ y = \text{prezo dun refresco} \end{cases}$
- Formulamos un sistema cos datos que nos dan e resolvémolo:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Elvira} \rightarrow 4x + 5y = 14 \\ \text{Lorena} \rightarrow 3x + 2y = 8{,}40 \end{array}\right\} \text{ A súa solución é: } x = 2;\ y = 1{,}2$$

- *Solución*: Un bocadillo de xamón custa 2 €, e un refresco, 1,20 €.

2. A suma das dúas cifras dun número é 9. Se invertemos a orde das súas cifras, o novo número supera o inicial en 45 unidades. De que número se trata?

- O número que buscamos ten dúas cifras. Chamámoslle x á das decenas e y á das unidades:

$$\underset{D}{\boxed{x}}\ \ \underset{U}{\boxed{y}} \rightarrow \text{O número é } 10x + y.$$

A suma das súas cifras é 9 $\rightarrow$ $\boldsymbol{x + y = 9}$

- Invertendo a orde das cifras, obtemos:

$$\underset{D}{\boxed{y}}\ \ \underset{U}{\boxed{x}} \rightarrow \text{O novo número é } \mathbf{10y + x}.$$

Este número supera o inicial en 45 unidades. É dicir:

$$10y + x = (10x + y) + 45$$

- Resolvemos o sistema formado polas dúas ecuacións:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 9 \\ 10y + x = 10x + y + 45 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + y = 9 \\ -9x + 9y = 45 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + y = 9 \\ -x + y = 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 7 \end{array}$$

- *Solución*: O número que buscamos é o 27.

Actividades

1 Tres quilos de peras e dous de laranxas custan 6,70 €; un quilo de peras e cinco de laranxas custan 7 €. A como está o quilo de peras? E o de laranxas?

2 A suma das dúas cifras dun número é 5. Se invertemos a orde das cifras, o número é 9 unidades menor que o inicial. De que número se trata?

3. Un investidor dispón de 100 000 €. Inviste unha parte nun banco que lle paga o 4% anual e o resto nunhas accións que lle produciron un 5% ao final do ano. En total, gaña 4 700 €. Que cantidade destinou a cada operación?

3.

	CAPITAL	PORCENTAXE	XUROS
BANCO	x	4%	4% de $x = 0{,}04x$
ACCIÓNS	y	5%	5% de $y = 0{,}05y$
TOTAL	100 000 €		4 700

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 100\,000 \\ 0{,}04x + 0{,}05y = 4\,700 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 4x + 4y = 400\,000 \\ 4x + 5y = 470\,000 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{Restando 2.ª – 1.ª:} \\ y = 70\,000 \end{array}$$

$x = 100\,000 - y = 100\,000 - 70\,000 = 30\,000$

Solución: Investiu 30 000 € no banco e 70 000 € en accións.

4. Lola está en A, e Félix, en B. A e B están a 110 km. Saen, en bicicleta, simultaneamente, a encontrarse. Tardan 2 h en coincidir.

Ao día seguinte, Félix sae nunha dirección. Unha hora e media despois, Lola corre a alcanzalo e conségueo 2 h despois. Se manteñen constantes as súas velocidades, cal é a velocidade de cada un?

4. Velocidade de Lola: v_1 km/h

Velocidade de Félix: v_2 km/h

Tardan 2 horas

A velocidade de achegamento é $v_1 + v_2$. Por tanto:

$$(v_1 + v_2) \cdot 2 = 110 \rightarrow v_1 + v_2 = 55$$

Ao día seguinte:

Félix está 1,5 h + 2 h = 3,5 h pedaleando. Percorre $3{,}5 \cdot v_2$ km.

Lola está 2 h pedaleando. Percorre $2 \cdot v_1$ km e alcánzao.

Por tanto, $3{,}5v_2 = 2v_1$.

Obtense así un sistema de dúas ecuacións con dúas incógnitas:

$$\left.\begin{array}{r} v_1 + v_2 = 55 \\ 3{,}5v_2 = 2v_1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} v_1 + v_2 = 55 \\ 4v_1 - 7v_2 = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 7v_1 + 7v_2 = 385 \\ 4v_1 - 7v_2 = 0 \end{array}\right\} \quad 11v_1 = 385$$

$v_1 = 385 : 11 = 35 \rightarrow v_2 = 55 - 35 = 20$

Solución: A velocidade de Félix é 20 km/h, e a de Lola, 35 km/h.

3. Problemas para **reforzar** a tradución de enunciados a sistemas de ecuacións.

Actividades

3 Xaime ten 20 000 €. Coloca unha parte ao 7%, e o resto, ao 3%. Gaña 760 € nun ano. Canto puxo en cada sitio?

4 Sofía ten un capital de 200 000 €. Deposita unha parte nun banco, ao 4% anual. O resto invísteo en accións, coas que perde o 11%. Ao final do ano gañou 4 250 €. Canto destinou a cada investimento?

5 As estacións A e B están separadas 600 km. Un Talgo sae de A cara a B e, simultaneamente, un tren de mercancías sae de B cara a A. Crúzanse 3 h despois. Outro día sae da estación C o mercancías e 2 h despois sae o Talgo na mesma dirección. Alcánzao 4 h despois.

Supoñendo que manteñen a velocidade e que non paran, indaga que velocidade leva cada un deles.

Exercicios e problemas

PRACTICA

Sistemas lineais

1 Comproba se o par (3, –1) é solución dalgún dos seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = 11 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 4x + y = 8 \end{cases}$

2 Completa para que os seguintes sistemas teñan como solución $x = -1$, $y = 2$:

a) $\begin{cases} x - 3y = \dots \\ 2x + y = \dots \end{cases}$ b) $\begin{cases} y - x = \dots \\ 2y + x = \dots \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + y = \dots \\ \dots + y/2 = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dots - 2x = 4 \\ 3y + \dots = 1 \end{cases}$

3 Busca dúas solucións para cada unha destas ecuacións e representa as rectas correspondentes:

a) $3x + y = 5$ b) $2x - y = 4$

4 Resolve graficamente cada un dous seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x + y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - y = 7 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + 3 = 0 \end{cases}$

5 Dous dos seguintes sistemas teñen solución única; un deles é incompatible (non ten solución) e outro é indeterminado (ten infinitas solucións). Intenta saber de que tipo é cada un, simplemente observando as ecuacións. Despois, resólveos graficamente para comprobalo:

a) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ y - x = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ x - y = -2 \end{cases}$

6 Dada a ecuación $x + 3y = 1$, busca outra ecuación que forme con ela un sistema cuxa única solución sexa $x = -2$, $y = 1$. Busca tamén outra ecuación que forme con ela un sistema incompatible e outra que forme con ela un sistema indeterminado.

7 Resolve estes sistemas polo método de substitución:

a) $\begin{cases} 3x - 5y = 5 \\ 4x + y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 8x - 7y = 15 \\ x + 6y = -5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 5y = -1 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 5x + 4y = 7 \end{cases}$

8 Resolve os seguintes sistemas polo método de igualación:

a) $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = \dfrac{x - 3}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + y = 8 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 6y = -2 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x - 5y = -2 \\ 3x + 2y = 10 \end{cases}$

9 Resolve os seguintes sistemas polo método de redución:

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 5y = 11 \\ 4x - 3y = -4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 6y = -4 \\ 3x - 5y = 11 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x - 2y = 3 \\ 10x + 3y = -1 \end{cases}$

10 Resolve polo método que consideres máis adecuado:

a) $\begin{cases} 7x + 6y = 2 \\ y + 5 = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3(x + 2) = y + 7 \\ x + 2(y + 1) = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 3 \\ 2(x + y) = 16 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x - 3 = 2y - 21 \\ 3y = \dfrac{15 - x}{2} \end{cases}$ f) $\begin{cases} \dfrac{-x + 7}{2} = y + 4 \\ 2x = \dfrac{3y - 10}{5} \end{cases}$

11 Resolve os sistemas de ecuacións seguintes polo método que consideres oportuno e comproba a solución que obteñas:

a) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x + 3y = -7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 3x - y = -1{,}25 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ x + 4y = -5/3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{x + 1}{3} + y = 1 \\ \dfrac{x - 3}{4} + 2y = 1 \end{cases}$

12 Resolve os sistemas de ecuacións seguintes:

a) $\begin{cases} 4(x-3)+y=0 \\ 3(x+3)-y=18 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x}{4}+\dfrac{y+1}{5}=1 \\ x+3y=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x+4}{5}-y=-1 \\ \dfrac{x-6}{5}+y=-1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x=\dfrac{y-4}{3}+1 \\ y+\dfrac{1}{3}=\dfrac{x+4}{3} \end{cases}$

Sistemas non lineais

13 Acha as solucións destes sistemas:

a) $\begin{cases} x+y=1 \\ xy+2y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ xy-y^2=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x-y=3 \\ 2x^2+y^2=9 \end{cases}$

14 Resolve os sistemas seguintes polo método de redución e comproba que teñen catro solucións:

a) $\begin{cases} x^2+y^2=74 \\ 2x^2-3y^2=23 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x^2-5y^2=7 \\ 2x^2=11y^2-3 \end{cases}$

15 Resolve os seguintes sistemas (non esquezas comprobar as solucións):

a) $\begin{cases} y=\sqrt{x+2} \\ x-2y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y=x+1 \\ y=\sqrt{x}+7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} xy=2 \\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{25}{2} \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2xy=3 \\ x+2y=4 \end{cases}$

16 Resolve os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=11-3x \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+2y=0 \\ x(x-y)=2(y^2-4) \end{cases}$

PENSA E RESOLVE

Sistemas lineais

17 Catro barras de pan e seis litros de leite custan 6,80 €; tres barras de pan e catro litros de leite custan 4,70 €.

Canto vale unha barra de pan? Canto custa un litro de leite?

18 Unha empresa aceiteira envasou 3 000 *l* de aceite en 1 200 botellas de 2 *l* e de 5 *l*. Cantas botellas de cada clase se utilizaron?

19 Un test consta de 48 preguntas. Por cada acerto súmase 0,75 puntos e por cada erro réstase 0,25. A miña puntuación foi de 18 puntos. Cantos acertos e erros tiven?

20 A suma de dous números é 14. Engadíndolle un ao maior obtense o dobre do menor. Acha os dous números.

21 Un fabricante de lámpadas obtén un beneficio de 0,80 € por cada peza que sae do seu taller para a venda, pero sofre unha perda de 1 € por cada peza defectuosa que debe retirar. Nun día fabricou 2 255 lámpadas, e obtivo uns beneficios de 1 750 €. Cantas lámpadas válidas e cantas defectuosas se fabricaron ese día?

22 O perímetro dun rectángulo é de 14 cm e sabemos que a súa base é 3 cm máis longa que a súa altura. Acha as dimensións do rectángulo.

23 Encontra dous números de forma que engadindo tres ao primeiro se obteña o segundo, e en cambio, engadindo dous ao segundo, se obteña o dobre do primeiro.

24 A suma de dous números é 15. A metade dun deles máis a terceira parte do outro é 6. De que números se trata?

25 **Exercicio resolto**

Sara comprou a semana pasada unha camisa e un xersei por 76 €. Agora, Rosa pagou 65,80 € polos mesmos artigos, pois a camisa ten un 15% de rebaixa, e o xersei, un 12%. Canto custaba cada artigo antes da rebaixa?

	ANTES DA REBAIXA	CON REBAIXA
CAMISA	x	$0{,}85x$
XERSEI	y	$0{,}88y$

$\begin{cases} x+y=76 \\ 0{,}85x+0{,}88y=65{,}8 \end{cases}$

Resolve o sistema e expresa a solución no contexto do problema.

Exercicios e problemas

26 Por unha calculadora e un caderno pagariamos, hai tres días, 10,80 €. O prezo da calculadora aumentou un 8%, e o caderno ten unha rebaixa do 10%. Con estas variacións, os dous artigos cústannos 11,34 €.

Canto custaba cada un dos artigos hai tres días?

27 Unha persoa compra un equipo de música e un ordenador por 2 500 €. Despois dalgún tempo, véndeos por 2 157,50 €. Co equipo de música perdeu o 10% do seu valor, e co ordenador, o 15%.

Canto lle custou cada un?

28 Nunha cafetería utilizan dúas marcas de café, unha de 6 €/kg e outra de 8,50 €/kg. O encargado quere preparar 20 kg dunha mestura dos dous cuxo prezo sexa 7 €/kg.

Canto ten que poñer de cada clase?

29 Cantos litros de leite cun 10% de graxa debemos mesturar con outra leite que ten un 4% de graxa para obter 18 litros cun 6% de graxa?

30 **Problema resolto**

A idade dun pai é hoxe o triplo que a do fillo e hai 6 anos era cinco veces a idade do fillo. Cantos anos ten cada un?

	IDADE ACTUAL	IDADE HAI 6 ANOS
PAI	y	$y-6$
FILLO	x	$x-6$

$$\left.\begin{array}{l} y = 3x \\ y-6 = 5(x-6) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 3x \\ y-5x = -24 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Método de substitución}$$

$$3x - 5x = -24 \rightarrow -2x = -24 \rightarrow x = 12$$

O fillo ten 12 anos, e o pai, $3 \cdot 12 = 36$ anos.

31 A idade dun pai é hoxe sete veces a idade do fillo e dentro de 10 anos será só o triplo. Calcula a idade actual de cada un.

32 Sábese que Noelia lle saca 27 anos a Marcos e que dentro de 12 anos o dobrará en idade. Que idade ten cada un?

33 A distancia entre dúas cidades, A e B, é d 400 km. Un coche sae desde A cara a B a unha veloci dade de 90 km/h. Simultaneamente, sae outro coch desde B cara a A a 110 km/h. Canto tempo tardarán e cruzarse? A que distancia de A se producirá o encontro

	ESPAZO	VELOCIDADE	TEMPO
A	x	90 km/h	t
B	$400-x$	110 km/h	t

Sistemas non lineais

34 A diferenza de dous números é 6, e a dos seus ca drados, 144. Acha os números.

35 Calcula dous números cuxa suma sexa 24, e o se produto, 135.

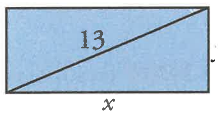
36 Acha dous números cuxa suma sexa 20, e a do seus cadrados, 232.

37 A idade actual de Rosa é o cadrado da da súa fi lla e dentro de 9 anos será soamente o triplo. Que ida de ten cada unha?

38 A idade actual dunha nai é o cadrado da que ter a súa filla dentro de dous anos, momento no que a ida de da filla será a sexta parte da idade que ten actual mente a nai. Calcula a idade de ambas as dúas.

39 **Exercicio resolto**

Achar a dimensións dun rectángulo cuxo perímetro é 34 m, e a súa diagonal, 13 m.



$$\left.\begin{array}{l} 2x + 2y = 34 \\ x^2 + y^2 = 13^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x + y = 17 \rightarrow y = 17 - x \\ x^2 + (17-x)^2 = 169 \rightarrow \end{array}$$

$$\rightarrow 2x^2 - 34x + 120 = 0 \rightarrow x^2 - 17x + 60 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 12 \text{ m} \rightarrow y = 5\text{m} \\ x = 5 \text{ m} \rightarrow y = 12 \text{ m} \end{array}\right.$$

Os lados do rectángulo miden 12 m e 5 m.

40 O perímetro dun rectángulo é de 20 cm, e a sú área, de 21 cm^2. Cales son as súas dimensións?

41 Nun rombo, unha diagonal é o triplo da outra a área é de 6 cm^2. Canto mide cada diagonal?

Desenvolve as túas competencias

Utiliza a linguaxe alxébrica

Igualando

Ao maior de tres irmáns tócalle a lotería, polo que, xeneroso, decide dobrar o capital dos dous menores. Ao facelo, danse conta de que, nese caso, o máis rico é o mediano, que, tamén xeneroso, dobra o capital dos outros dous.

Agora resulta que o máis rico é o pequeno, que, por non ser menos, dobra o capital dos dous maiores. Por fin!, agora están igualados, pois cada un ten 16 000 €.

Canto tiña cada un ao principio?

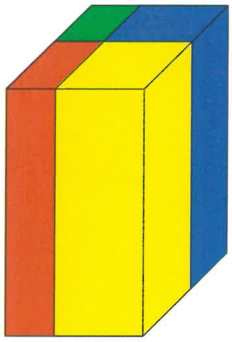
Volumes varios

Estas catro pezas de plástico son ortoedros (caras perpendiculares).

Os seus volumes son:

- Peza azul, 225 cm^3.
- Peza vermella,120 cm^3.
- Peza verde, 90 cm^3.

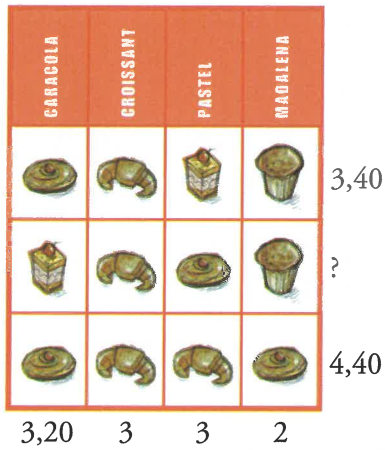
Cal é o volume da peza amarela?

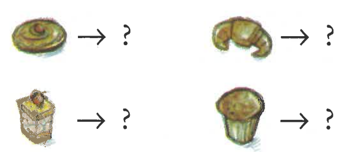


Utiliza o teu enxeño

Doce problema

Cales son os prezos de cada tipo de bolo?





Autoavaliación

Reflexiona sobre a túa aprendizaxe

- Sabes resolver con soltura sistemas lineais?
- Recoñeces un sistema non lineal e sabes como resolvelo?
- Adquiriches destreza na formulación e a resolución de problemas con sistemas de ecuacións?

Verifícao resolvendo exercicios

1 Resolve:

a) $\begin{cases} y + 1 = 6 - x \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 12 \end{cases}$　　b) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + y = \dfrac{5}{2} \\ 2x + 6y = 15 \end{cases}$

2 Resolve os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x^2 - y = 8 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$　　b) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 34 \\ 2x^2 - y^2 = -7 \end{cases}$

3 Dous bocadillos e un refresco custan 5,35 €; tres bocadillos e dous refrescos custan 8,60 €. Calcula o prezo dun bocadillo e o dun refresco.

4 Acha as dimensións dun rectángulo do que coñecemos o seu perímetro, 30 m, e a súa diagonal, $\sqrt{113}$ m.

5 Por un cinto e unha gravata paguei a semana pasada 86 €. Esta semana, o cinto ten unha rebaixa do 20%, e a gravata, do 25%. Calcula o prezo inicial de cada artigo sabendo que esta semana pagaría 66,10 €.

6 A idade de Ana é o cadrado da da súa filla e, dentro de catro anos, será o cuádruplo. Calcula a idade actual de cada unha.

4. No teu CD-ROM tes unha **autoavaliación moito máis ampla e completa.** Nel encontrarás, ademais, orientacións e, se o desexas, as solucións dous exercicios.