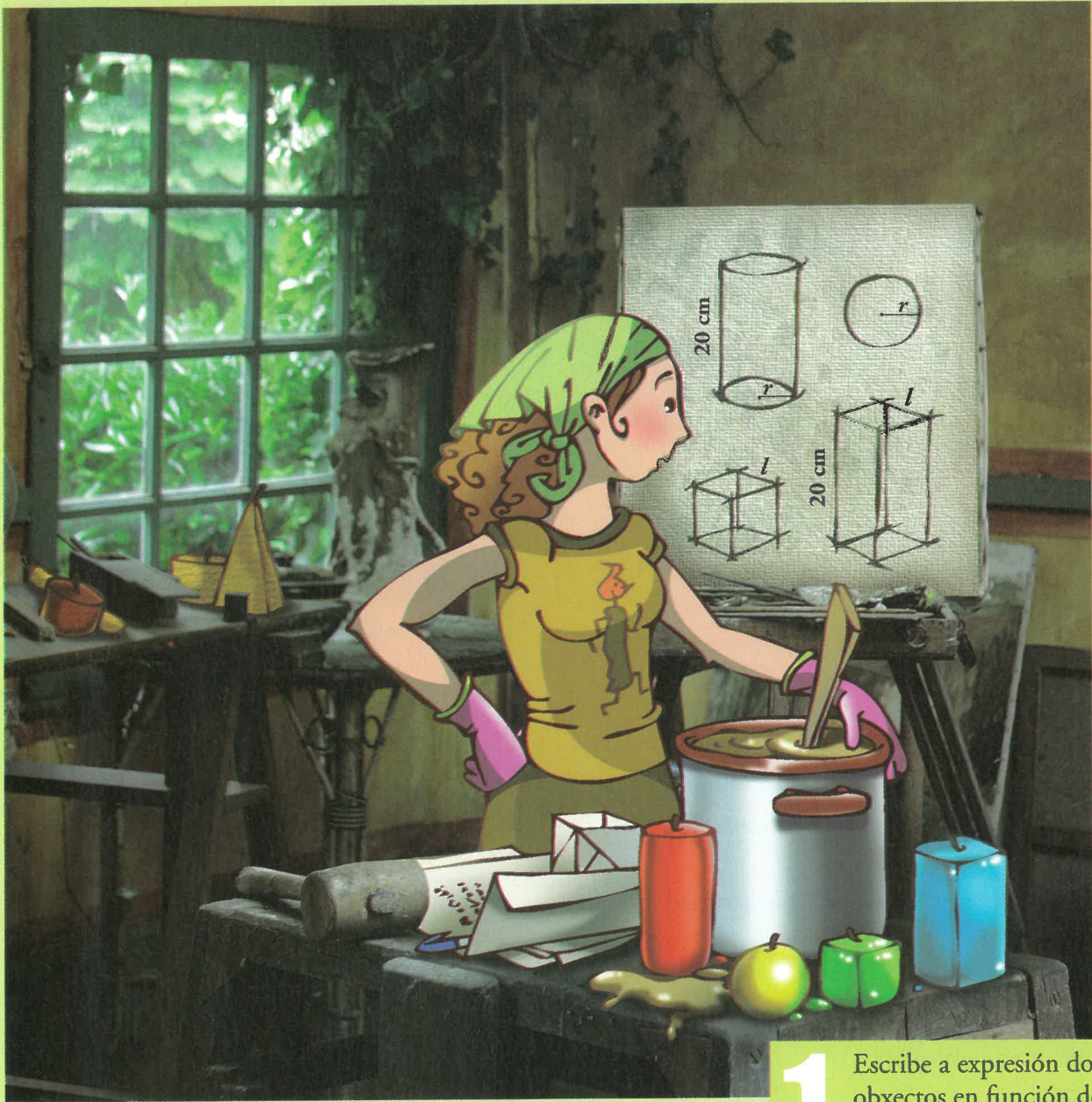



5E Expresións alxébricas



Amparo quere fabricar as catro velas que deseñou sobre o lenzo, pero aínda non se decidiu sobre algunha das súas dimensións. Para facelo necesita saber o seu volume (canta cera gastará?) e a súa superficie total (canto lle custará pintalas?).

1 Escribe a expresión do volume dos catro obxectos en función de r ou de l . Indaga o seu valor para $r = 6$ cm e para $l = 10$ cm.

2 Escribe a expresión da superficie total destes catro obxectos en función de r ou de l . Indaga o seu valor para $r = 6$ cm e para $l = 10$ cm.

 1. Solucións a estes problemas.

1 Monomios

Observa

Hai moitas situacións nas que aparecen monomios:

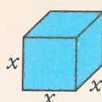


área $\rightarrow x^2$

perímetro $\rightarrow 4x$



área $\rightarrow xy$



volumen $\rightarrow x^3$

superficie $\rightarrow 6x^2$

As seguintes expresións alxébricas son monomios:

$$3x^2 \quad 2y \quad -5x^2y \quad -\frac{2}{3}x^3$$

Monomio é o produto indicado dun número por unha ou máis letras:

— As letras (**parte literal**) representan números de valor descoñecido. Por iso conservan todas as propiedades dos números e as súas operacións.

— **Coficiente** é o número que intervéen.

Chámaselle **grao** dun monomio ao número de factores que forman a súa parte literal.

Un número pode ser considerado como un monomio de grao 0, pois $x^0 = 1$.

Por exemplo:

MONOMIO	$3x^2$	$2y$	$-5x^2y$	$-\frac{3}{2}x^3$	x	7
COEFICIENTE	3	2	-5	$-\frac{3}{2}$	1	7
PARTE LITERAL	x^2	y	x^2y	x^3	x	non ten
GRAO	2	1	3	3	1	0

Dous **monomios** son **semellantes** cando teñen idéntica a parte literal.

Por exemplo: $2x$, $-5x$, $\frac{3}{4}x$, x son semellantes.

$5x^2$, $\sqrt{2}x^2$, $\frac{3}{5}x^2$, x^2 son semellantes.

Valor numérico dun monomio para certo valor de cada unha das letras que interveñen é o resultado que se obtén ao efectuar as operacións cos números que resultan da substitución.

Por exemplo, o valor numérico de $3xy$ para $x = 2$, $y = -5$ é $3 \cdot 2 \cdot (-5) = -30$.

2. Actividades para **reforzar** a tradución de enunciados á linguaxe alxébrica.

Actividades

1 Indica o coeficiente e o grao destes monomios:

- a) $-2x^7$ b) x^9 c) x d) 5

2 Acha o valor numérico dos seguintes monomios para $x = 3$, $y = -2$:

- a) $5x^3$ b) $2xy$ c) xy^2 d) $-xy$

3 Di cales dos seguintes monomios son semellantes a $5x^2$:

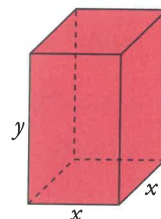
$$7x^2, 5x^3, 5x, 5xy, x^2, 3x^2y$$

4 Escribe dous monomios semellantes en cada caso:

- a) $-5xy$ b) $2x^3$ c) x

5 A base dun ortoedro é un cadrado de lado x . A súa altura é y . Expresa:

- a) A área dunha base.
b) A área dunha cara lateral.
c) O perímetro da base.
d) O volume.



20 Operacións con monomios

Suma e resta de monomios

A **suma** de monomios semellantes é outro monomio, tamén semellante a eles, cuxo coeficiente é a suma dos seus coeficientes.

Se dous monomios non son semellantes, a súa suma non se pode simplificar e hai que deixala indicada.

A **resta** é un caso particular da suma.

Por exemplo: $7x^2 + 11x^2 = 18x^2$

$$3xy - 4xy + 7xy = 6xy$$

$$7x - 2x^2 \text{ non se pode simplificar.}$$

Produto de monomios

O **produto** de dous monomios é outro monomio cuxo coeficiente é o produto dos coeficientes, e a súa parte literal, o produto das partes literais dos factores.

Por exemplo: $(2x) \cdot (3x^2) = 6x^3$

$$(2x) \cdot (3xy) = 6x^2y$$

$$(2x^2)^3 = 2^3 \cdot (x^2)^3 = 8x^6$$

$$3 \cdot 2xy = 6xy$$

$$3x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}y = \frac{3}{\sqrt{3}}x^2y = \sqrt{3}x^2y$$

$$(\sqrt{3}x)^2 = (\sqrt{3})^2x^2 = 3x^2$$

Cociente de monomios

O **cociente** de dous monomios é un monomio ou non o é, dependendo de como sexan o numerador e o denominador.

$$\frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2}x; \quad \frac{2x^2}{xy} = \frac{2x}{y} \text{ non é un monomio (ten parte literal no denominador).}$$

Actividades

1 Efectúa as seguintes sumas de monomios. Cando o resultado non poida simplificarse, déixao indicado:

a) $5x - 3x + 4x + 7x - 11x + x$

b) $8x^2 - 5x^2 + \frac{2}{3}x^2 + x^2 - \frac{x^2}{3} + \frac{7}{3}x^2$

c) $x + 7x - x^2 + 3x + 5x^2 - 2x^2$

d) $3x^2y - 5x^2y + 2x^2y + x^2y$

e) $7x^3 - 11x^3 + 3y^3 - y^3 + 2y^3 - 4$

2 Opera.

a) $(3x^2) \cdot (5xy)$

c) $(3xy)^2 : (2x^2)$

b) $(\sqrt{3}x) \cdot (\sqrt{3}y)$

d) $(\sqrt{3}x)^2 \cdot (2x)$

3 $A = 5x^2$, $B = 4x$, $C = -2x^2$. Calcula:

a) $A + C$

d) B^3

g) $(A \cdot B) : C$

b) $A \cdot B$

e) $A^2 - C$

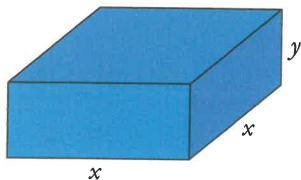
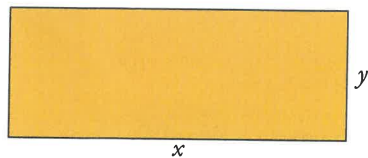
h) $C : B$

c) $2A + 3C$

f) $A + B^2 + 10C$

i) $(A : C) \cdot B$

3 Polinomios



Área dunha base = $x \cdot x = x^2$
 Área dunha cara lateral = $x \cdot y$

Imos escribir en linguaxe alxébrica algúns enunciados:

a) O perímetro do rectángulo da marxe:

$$\text{Perímetro} \rightarrow 2x + 2y$$

b) O cadrado dun número máis o seu triplo $\rightarrow x^2 + 3x$

c) A superficie do ortoedro da marxe:

$$\text{Superficie} \rightarrow 2x^2 + 4xy$$

d) A idade de Elvira máis a de Lorena, que lle saca tres anos:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Elvira} \rightarrow x \\ \text{Lorena} \rightarrow x + 3 \end{array} \right\} x + x + 3 \rightarrow 2x + 3$$

As expresións obtidas en cada un dos enunciados son *polinomios*.

Un **polinomio** é a suma de dous ou máis monomios. Cada un dos monomios que o forman chámase **termo**. Tamén os monomios poden ser considerados polinomios cun só termo.

É posible que nun polinomio haxa algúns monomios semellantes. En tal caso, convén operar con eles simplificando a expresión e obtendo o polinomio na súa **forma reducida**.

$$\begin{aligned} \text{Por exemplo: } 5x^2 + 4x^4 - 2x^2 - 3x^4 + 1 &\rightarrow x^4 + 3x^2 + 1 \\ 3x^3 - 2x^2 - 2x^3 + x - x^3 - 5 &\rightarrow -2x^2 + x - 5 \end{aligned}$$

Chámasele **grao** dun polinomio ao maior dos graos dos monomios que o compoñen cando o polinomio está na súa forma reducida.

É necesario reducir o polinomio antes de dicir o seu grao, xa que é posible que os monomios de maior grao se simplifiquen e desaparezan.

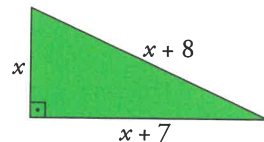
$$\begin{aligned} \text{Por exemplo: } 5x^2y + 5x - 8y^2 &\text{ ten grao 3, pois é o grao de } 5x^2y. \\ 7x^3 - 5x^2 + 3x^3 - 2x - 10x^3 &= -5x^2 - 2x \text{ ten grao 2.} \end{aligned}$$

Actividades

1 Expresa mediante un polinomio cada un destes enunciados:

- A suma dun número máis o seu cubo.
- A suma de dous números naturais consecutivos.
- O perímetro dun triángulo isóscele (chámalle x ao lado desigual e y aos outros dous lados).
- A área total dun cilindro de 4 m de altura en función do raio da base, r .
- A área total dun ortoedro cuxa base é un cadrado de lado l e cuxa altura é 5 m.

2 Expresa alxebricamente o perímetro deste triángulo rectángulo:



3 Di o grao de cada un destes polinomios:

- $x^5 - 6x^2 + 3x + 1$
- $5xy^4 + 2y^2 + 3x^3y^3 - 2xy$
- $x^2 + 3x^3 - 5x^2 + x^3 - 3 - 4x^3$
- $2x^2 - 3x - x^2 + 2x - x^2 + x - 3$

40 Operacións con polinomios

Definición

Chámaselle **oposto** dun polinomio ao que resulta de cambiar de signo todos os seus termos:

$$\begin{aligned} -(x^3 + 2x^2 - 5x - 11) &= \\ &= -x^3 - 2x^2 + 5x + 11 \end{aligned}$$

Suma e resta de polinomios

Para sumar dous polinomios, agrupamos os seus termos e simplificamos os monomios semellantes. Para restar dous polinomios, súmaselle ao minuendo o oposto do subtraendo.

Por exemplo: $A = 3x^2 + 5x - 2$, $B = x^3 + 4x^2 - 5$

$$\begin{array}{r} \boxed{A} \\ + B \\ \hline A + B \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 3x^2 + 5x - 2 \\ x^3 + 4x^2 - 5 \\ \hline x^3 + 7x^2 + 5x - 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} \boxed{A} \\ - B \\ \hline A - B \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 3x^2 + 5x - 2 \\ -x^3 - 4x^2 + 5 \\ \hline -x^3 - x^2 + 5x + 3 \end{array}$$

Ás veces escribimos directamente o resultado, quitando parénteses (se as hai) agrupando os monomios semellantes. Por exemplo:

- $(x^2 + 3x + 2) + (2x^2 - 5) = x^2 + 3x + 2 + 2x^2 - 5 = 3x^2 + 3x - 3$
- $(3x + 1) - (2x - 3) = 3x + 1 - 2x + 3 = x + 4$

Produto dun monomio por un polinomio

Para multiplicar un monomio por un polinomio, multiplícase o monomio por cada termo do polinomio.

Por exemplo: $M = x^3 - 2x^2 + 5x - 1$, $N = 3x^2$

$$\begin{array}{r} \boxed{M} \\ \times N \\ \hline M \cdot N \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} x^3 - 2x^2 + 5x - 1 \\ 3x^2 \\ \hline 3x^5 - 6x^4 + 15x^3 - 3x^2 \end{array}$$

Tamén, neste caso, podemos escribir directamente o resultado. Por exemplo:

- $(2x^2 - 3) \cdot (2x) = 4x^3 - 6x$
- $7(2x + 5) = 14x + 35$
- $(5x^2)(6x^2 - 4x + 3) = 30x^4 - 20x^3 + 15x^2$

Actividades

1 Sexan $P = x^4 - 3x^3 + 5x + 3$, $Q = 5x^3 + 3x^2 - 11$.

Acha $P + Q$ e $P - Q$.

2 Efectúa.

- | | |
|-----------------------|-------------------------|
| a) $2x(3x^2 - 4x)$ | b) $5(x^3 - 3x)$ |
| c) $4x^2(-2x + 3)$ | d) $-2x(x^2 - x + 1)$ |
| e) $-6(x^3 - 4x + 2)$ | f) $-x(x^4 - 2x^2 + 3)$ |

3 Acha os produtos seguintes:

- | | |
|---------------------------|--------------------------|
| a) $x(2x + y + 1)$ | b) $2a^2(3a^2 + 5a^3)$ |
| c) $ab(a + b)$ | d) $5(3x^2 + 7x + 11)$ |
| e) $x^2y(x + y + 1)$ | f) $5xy^2(2x + 3y)$ |
| g) $6x^2y^2(x^2 - x + 1)$ | h) $-2(5x^3 + 3x^2 - 8)$ |
| i) $3a^2b^3(a - b + 1)$ | k) $-2x(3x^2 - 5x + 8)$ |

5 Factorización de polinomios

Sacar factor común

Ten en conta

A detección de factores comúns, xunto coa aplicación das “identidades notables”, permitiranos descompoñer en factores algúns polinomios.

Cando todos os termos dun polinomio, $P(x)$, son múltiplos dun mesmo monomio, $M(x)$, podemos extraer $M(x)$ como **factor común**.

Por exemplo:

$$P(x) = 6x^4 - 9x^3 + 12x^2 - 3x$$

O monomio $M(x) = 3x$ é factor común a todos os termos de $P(x)$. Polo tanto:

$$P(x) = 3x(2x^3 - 3x^2 + 4x - 1)$$

Para convencernos de que as dúas expresións son iguais e comprobar que non nos equivocamos, podemos realizar a multiplicación, quitando a paréntese:

$$3x(2x^3 - 3x^2 + 4x - 1) = 6x^4 - 9x^3 + 12x^2 - 3x$$

Exercicio resolto

Extraer factor común en cada un dos seguintes polinomios:

a) $A(x) = 100x^5 - 80x^4 + 16x^3$

b) $B(x) = 45x^5 + 120x^3 + 80x$

c) $C(x) = x^3 + x^2 + x$

a) Todos os sumandos teñen o factor x^3 . Ademais, 100, 80 e 16 son múltiplos de 4. Por tanto, podemos sacar $4x^3$ como factor común:

$$A(x) = 4x^3(25x^2 - 20x + 4)$$

b) $5x$ é factor común aos tres sumandos:

$$B(x) = 5x(9x^4 + 24x^2 + 16)$$

c) x é factor común aos tres sumandos:

$$C(x) = x(x^2 + x + 1)$$

En todos os casos podemos comprobar que se quitamos a paréntese realizando a multiplicación obtemos as expresións iniciais.

Actividades

1 Sacar factor común en cada un dos seguintes polinomios:

a) $A(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x$

b) $B(x) = 2x^4 - 2x^3 + 2x^2$

c) $C(x) = 20x^3 + 15x$

d) $D(x) = 2x^6 + 4x^3 - 2x$

2 Extraer factor común en cada un dos polinomios seguintes:

a) $P(x) = 490x^3 - 420x^2 + 90x$

b) $R(x) = 20x^6 + 60x^4 + 45x^2$

c) $S(x) = 81x^4 - 36x^2$

d) $T(x) = 4x - 100x^5$

Lembra

Identidades notables:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$



3. Actividades coas que **repasar** a utilización das identidades notables.

Identidades notables para factorizar

Factorizar é expresar como produto de dous ou máis factores un número ou unha expresión alxébrica.

As identidades notables axudan no proceso de factorizar polinomios. Vexamos cómo a través duns exemplos.

► **Exemplos**

a) Imos expresar os polinomios seguintes como cadrado o como produto de dous binomios. Para iso, usamos as identidades notables:

$$A(x) = 4x^2 + 4x + 1 = (2x)^2 + 2 \cdot (2x) \cdot 1 + (1)^2 = (2x + 1)^2$$

$$B(x) = 9x^2 - 12x + 4 = (3x)^2 - 2 \cdot (3x) \cdot (2) + (2)^2 = (3x - 2)^2$$

$$C(x) = 4x^2 - 25 = (2x)^2 - (5)^2 = (2x + 5)(2x - 5)$$

b) Observa como factorizamos estes polinomios sacando factor común e utilizando as identidades notables:

$$D(x) = x^3(25x^2 - 20x + 4) = x^3(5x - 2)^2$$

$$E(x) = 2x(9x^4 + 24x^2 + 16) = 2x(3x^2 + 4)^2$$

$$F(x) = 4x^2(25 - 9x^4) = 4x^2(5 + 3x^2)(5 - 3x^2)$$

Unha división exacta permite factorizar

Se ao dividir $P(x) : Q(x)$ o cociente $C(x)$ é exacto (o resto é cero), entón pódese poñer $P(x) = Q(x) \cdot C(x)$.

Exercicio resolto

Dividir $(2x^3 - 7x^2 - 11x + 6) : (2x + 3)$.

Ao efectuar a división, comprobamos que o cociente é $x^2 - 5x + 2$ e o resto é cero. Por tanto:

$$2x^3 - 7x^2 - 11x + 6 = (2x + 3)(x^2 - 5x + 2)$$

Actividades

3 Sacando factor común e identificando produtos de binomios, factoriza:

- | | |
|--------------------------------|---------------------------------|
| a) $A(x) = x^2 + 4x + 4$ | b) $B(x) = x^2 - 6x + 9$ |
| c) $C(x) = x^2 - 1$ | d) $D(x) = x^4 - 10x^3 + 25x^2$ |
| e) $E(x) = 4x^2 + 12x + 9$ | f) $F(x) = x^2 - 9$ |
| g) $G(x) = x^3 - 4x$ | h) $H(x) = 9x^2 + 24x + 16$ |
| i) $I(x) = x^2 - \frac{1}{16}$ | k) $K(x) = x^2 - 0,01$ |

4 Efectúa as divisións (son exactas) e expresa o dividendo como produto:

- $(10x^3 + 11x^2 - 13x + 55) : (2x + 5)$
- $(x^4 - 3x^3 + x^2 - 4x + 3) : (x - 3)$
- $(15x^3 - 13x^2 + 20x + 32) : (5x + 4)$
- $(6x^4 - 14x^3 - 21x^2 + 82x - 77) : (3x - 7)$
- $(2x^3 + 6x^2 + 2x - 12) : (x + 2)$

Expresións de primeiro grao

Co fin de prepararte para a resolución de ecuacións, inecuacións e sistemas de primeiro grao, convenche adquirir axilidade na operatoria e simplificación de expresións de primeiro grao.

Exercicios resoltos

1. Simplificar esta expresión:

$$3(5x - 7) + 2(x - 1) - 5x + 3$$

2. Multiplicar por 36 e simplificar esta expresión:

$$-\frac{3(x+5)}{12} - \frac{2(11-x)}{9} + 6$$

3. Na expresión $4x + 3y - 3$, substituír x por $7 - 4y$ e simplificar.

4. Multiplicar por 6 e simplificar esta expresión:

$$\frac{2(x-y+4)}{3} - \frac{2x-y}{2} - \frac{5}{6}$$

$$1. 3(5x - 7) + 2(x - 1) - 5x + 3 = 15x - 21 + 2x - 2 - 5x + 3 = 12x - 20$$

$$2. -\frac{36 \cdot 3(x+5)}{12} - \frac{36 \cdot 2(11-x)}{9} + 36 \cdot 6 =$$

$$= -9(x+5) - 8(11-x) + 216 =$$

$$= -9x - 45 - 88 + 8x + 216 = -x + 83$$

$$3. 4x + 3y - 3 \rightarrow 4(7 - 4y) + 3y - 3 = 28 - 16y + 3y - 3 = -13y + 25$$

$$4. 6 \cdot \left(\frac{2(x-y+4)}{3} \right) - \frac{6(2x-y)}{2} - 6 \cdot \frac{5}{6} =$$

$$= 2 \cdot 2(x-y+4) - 3(2x-y) - 5 = 4x - 4y + 16 - 6x + 3y - 5 =$$

$$= -2x - y + 11$$

Actividades

1 Simplifica as seguintes expresións:

- $3(x - 1) + 5(x - 2) - 7x$
- $2(2x - 3) + 1 - (x - 5)$
- $5x + 3(1 - x) - 12 - 2(x - 5)$
- $10(x - 1) + 2(x + 9) - 4(2 + 3x)$
- $3x - 1 - (2x + 1) - 1 + (x + 2) + 3$

2 Multiplica polo número indicado e simplifica.

- $\frac{3(x+2)}{2} + \frac{x-1}{5} - \frac{2(x+1)}{5} - \frac{37}{10}$ por 10
- $\frac{2x-3}{2} - \frac{x+3}{4} + 4 + \frac{x-1}{2}$ por 4
- $x + \frac{2x-3}{9} + \frac{x-1}{3} - \frac{12x+4}{9}$ por 9
- $\frac{2x}{3} - \frac{3y}{2} - 2(x+y) + 3$ por 6
- $\frac{2(x+1)}{3} - \frac{y}{2} - 1$ por 6

3 Expresa alxebricamente e simplifica cada expresión:

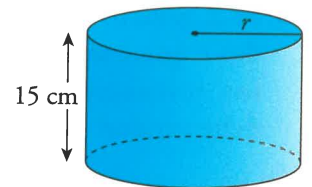
- A suma dun número máis a súa terceira parte.
- A suma das idades de Ana e Raquel, sabendo que Ana ten 8 anos máis que Raquel.
- Investín unha cantidade, x , e aumentou un 12%. Qué cantidade teño agora?
- Investín unha cantidade, x , e perdín o 5%. Que cantidade teño agora?
- A suma de tres números consecutivos.
- O triplo dun número menos a súa cuarta parte.
- A suma das idades de Alberte e do seu pai, sabendo que este ten 28 anos máis que aquel.
- Un ciclista vai a unha velocidade v . Outro ciclista vén 10 km/h máis rápido. A que velocidade se achega un ao outro?

Expresións de segundo grao

Con vistas á resolución de ecuacións de segundo grao, convenche adquirir axilidade no manexo deste tipo de expresións.

Exercicios resolto

- Simplificar esta expresión:**
 $(x + 5)^2 - 2(x + 1)(x - 3)$
 - $(x + 5)^2 - 2(x + 1)(x - 3) =$ (efectuamos as multiplicacións)
 $= x^2 + 10x + 25 - 2(x^2 - 2x - 3) =$ (suprimimos parénteses)
 $= x^2 + 10x + 25 - 2x^2 + 4x + 6 = -x^2 + 14x + 31$
- Multiplicar por 4 e simplificar esta expresión:**
 $\frac{(x - 1)^2}{2} - \frac{(x + 2)(x - 2)}{4} - \frac{3}{4}$
 - $4 \cdot \frac{(x - 1)^2}{2} - 4 \cdot \frac{(x + 2)(x - 2)}{4} - \frac{3}{4} =$
 $= 2(x - 1)^2 - (x + 2)(x - 2) - 3 = 2(x^2 - 2x + 1) - (x^2 - 4) - 3 =$
 $= 2x^2 - 4x + 2 - x^2 + 4 - 3 = x^2 - 4x + 3$
- Expresar alxebricamente o produto de dous números pares consecutivos.**
 - Un número par calquera: $2x$
 O seguinte número par: $2x + 2$
 O produto: $2x \cdot (2x + 2)$
 Simplificando: $4x^2 + 4x$
- Expresar alxebricamente a área total dun cilindro de 15 cm de altura e raio da base descoñecido.**
 - $A_{\text{TOTAL}} = 2 A_{\text{BASE}} + A_{\text{LATERAL}} = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r h$
 $h = 15 \rightarrow A_{\text{TOTAL}} = 2\pi r^2 + 30\pi r$
 É unha expresión de 2.º grao con variable r .



Actividades

- Simplifica as seguintes expresións:
 - $(x - 1)(x + 1) + (x - 2)^2 - 3$
 - $(x + 2)(x - 3) + x - 3$
 - $(x + 1)^2 - 2x(x + 2) + 14$
 - $(x + 1)^2 - (x - 1)^2 + 2 - x^2 - 6$
- Multiplica polo número indicado e simplifica:
 - $x(2x + 1) - \frac{(x - 1)^2}{2} - 3$ por 2
 - $\frac{x(x + 3)}{2} - \frac{(x + 1)^2}{3} + \frac{1}{3}$ por 6
- Expresa alxebricamente e simplifica cada expresión:
 - O produto de dous números naturais consecutivos.
 - O cadrado da hipotenusa dun triángulo rectángulo cuxos catetos miden x e $x + 5$.
 - A área dun rectángulo cuxas dimensións (longo e ancho) suman 11 dm.
 - A área dun rectángulo de 200 m de perímetro.
- A diferenza de dous números é 20. Se ao menor lle chamamos x :
 - Como se designa o maior?
 - Como se designa o seu produto?
 - Como se designa a suma dos seus cadrados?

4. Se queres **reforzar** a simplificación de expresións non polinómicas, acude ao teu CD.

Expresións non polinómicas

Hai expresións alxébricas que non son polinomios. Por exemplo:

$$\sqrt{x^2 + 7} - 2x - 2 \qquad \frac{6}{x} - \frac{4}{x-2} \qquad 2^x - x^2$$

Vexamos, con exemplos, como se manexan algunhas delas.

Problemas resoltos

1. $A = \sqrt{x^2 + 7}$, $B = 2x - 2$

Desenvolver $A^2 - B^2$ e simplificar.

2. Multiplicar a expresión

$$\frac{200}{x} + 5 - \frac{200}{x-2}$$

por $x \cdot (x-2)$ e simplificar o resultado.

3. Un vendedor pensa sacar 200 € por x reloxo iguais.

a) Expresar o prezo de cada reloxo.

b) Se 2 reloxo están estragados e quere sacar 200 € polos restantes, a canto os debe vender?

4. Se os catetos dun triángulo rectángulo miden x e $x+5$, expresar a lonxitude da hipotenusa.

1. $A^2 - B^2 = (\sqrt{x^2 + 7})^2 - (2x - 2)^2 = x^2 + 7 - (4x^2 - 8x + 4) = x^2 + 7 - 4x^2 + 8x - 4 = -3x^2 + 8x + 3$

2. $\frac{200}{x} \cdot x \cdot (x-2) = 200 \cdot (x-2)$; $\frac{200}{x-2} \cdot x \cdot (x-2) = 200 \cdot x$. Polo tanto:

$$\left(\frac{200}{x} + 5 - \frac{200}{x-2}\right) x \cdot (x-2) = 200(x-2) + 5x(x-2) - 200x = 200x - 400 + 5x^2 - 10x - 200x = 5x^2 - 10x - 400$$

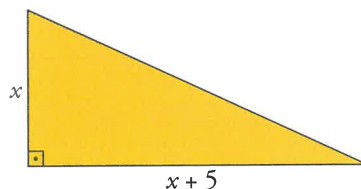
3. a) Prezo de cada un dos x reloxo:

$$\text{PREZO} = \frac{\text{CUSTO TOTAL}}{\text{CANTIDADE}} = \frac{200}{x}$$

b) Prezo de cada un dos $x-2$ reloxo:

$$\text{PREZO} = \frac{200}{x-2}$$

4.



$$\begin{aligned} \text{hipotenusa} &= \sqrt{x^2 + (x+5)^2} = \\ &= \sqrt{x^2 + x^2 + 10x + 25} = \\ &= \sqrt{2x^2 + 10x + 25} \end{aligned}$$

Actividades

8 En cada caso, desenvolve $A^2 - B^2$ e simplifica:

a) $A = \sqrt{x}$, $B = 3$

b) $A = \sqrt{x}$, $B = x - 2$

c) $A = \sqrt{4x + 5}$, $B = x + 2$

d) $A = \sqrt{x + 1}$, $B = x - 5$

e) $A = \sqrt{2x^2 - 2}$, $B = 1 - x$

f) $A = \sqrt{3x^2 + 4}$, $B = \sqrt{5x + 6}$

9 As dimensións dun rectángulo son $x - 3$ e $x + 4$. Expresa a lonxitude da hipotenusa.

10 Multiplica e simplifica.

a) $\frac{10}{x+3} + 6 - 4x$ por $x + 3$

b) $\frac{2000}{x} + 25 - \frac{2000}{x-4}$ por $x \cdot (x-4)$

c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{4}$ por x^2

11 Un grupo de x amigos aluga un autocar por 2000 €. Fallan 4 deles. Expresa alxebicamente a diferenza do prezo en ambos os casos (con todos eles ou con 4 amigos menos).

PRACTICA

Monomios

1 ■■■ Indica cal é o grao dos seguintes monomios e di cales son semellantes:

- a) $2x^2$ b) $-3x^3$ c) $\frac{1}{2}x^2$
 d) $\frac{3}{4}x$ e) $-\frac{1}{3}x$ f) x^3
 g) 3 h) $-\frac{4}{5}x^2$ i) $-\frac{1}{5}$

2 ■■■ Calcula o valor numérico de cada un de estes monomios para $x = -1$, para $x = 2$ e para $x = \frac{1}{2}$:

- a) $3x^2$ b) $\frac{2}{5}x^3$ c) $-2x$
 d) $-x^2$ e) $\frac{1}{2}x^2$ f) $-\frac{1}{4}x$

3 ■■■ Simplifica.

- a) $2x^6 - 3x^6 - x^6$ b) $3x^2 - \frac{2}{3}x^2 + 5x^2$
 c) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}x + x$ d) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{10}x^2 + x^2$
 e) $-2x^3 + x^3 - 3x^3$ f) $-\frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 + 2x^2$

4 ■■■ Dados os monomios $A = -5x^4$, $B = 20x^4$, $C = 2x$, calcula:

- a) $A + B$ b) $A - B$
 c) $3A + 2B$ d) A^3
 e) C^2 f) $A^2 + C^8$
 g) $A \cdot B$ h) $A \cdot C$
 i) $B \cdot C$ k) $B : A$
 l) $A : B$ m) $(B : C) \cdot A$

5 ■■■ Efectúa as seguintes operacións e di cal é o grao do monomio resultante:

- a) $2x \cdot (-3x^2) \cdot (-x)$ b) $\frac{3}{4}x^3 \cdot (-2x^2) \cdot 2x$
 c) $2x^3 \cdot (-x^2) \cdot 5x$ d) $x \cdot \left(-\frac{1}{2}x\right) \cdot \frac{3}{5}x$
 e) $-\frac{1}{3}x \cdot 3x^2 \cdot (-x)$ f) $\frac{2}{5}x^2 \cdot \frac{3}{4}x \cdot \frac{10}{3}x^2$

6 ■■■ Efectúa as seguintes divisións e di cal é o grao de cada monomio resultante:

- a) $(8x^3) : (2x^2)$ b) $(4x^6) : (2x)$
 c) $(3x^3) : (2x^2)$ d) $(18x^3) : (2x^3)$
 e) $\frac{20x^3}{2x^2}$ f) $\frac{-15x^6}{3x^2}$
 g) $\frac{-7x^3}{2x^2}$ h) $\frac{-2x^2}{x^2}$

Polinomios

7 ■■■ Indica cal é o grao dos seguintes polinomios (lembra que deben estar en forma reducida):

- a) $2x^4 - 3x^2 + 4x$ b) $x^2 - 3x^3 + 2x$
 c) $x^2 - 3x^2 + 4x^3$ d) $-\frac{1}{2}x^3 + 3x^2$
 e) $3x^3 - 2x^2 - 3x^3$ f) $-\frac{1}{4}x^5 - \frac{3}{5}x^2$
 g) $2x + 3$ h) $-\frac{1}{3}x + 3x$

8 ■■■ Dados os polinomios $P = 2x^4 - 5x^3 + 3x - 1$ e $Q = 6x^3 + 2x^2 - 7$, calcula $P + Q$ e $P - Q$.

9 ■■■ Sexan os polinomios:

$$M = 3x^2 - 5x - 3 \qquad N = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + 1$$

$$K = x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

Calcula:

- a) $2M + 3K$ b) $M - 4N$ c) $4N - 3K$

10 ■■■ Efectúa.

- a) $3x(2x^2 - 5x + 1)$ b) $7x^3(2x^3 + 3x^2 - 2)$
 c) $-5x(x^4 - 3x^2 + 5x)$ d) $-x^2(x^3 + 4x^2 - 6x + 3)$

11 ■■■ Opera e simplifica.

- a) $(5x - 2)(3 - 2x)$ b) $x(x - 3)(2x - 1)$
 c) $(3 + 7x)(5 + 2x)$ d) $(x + 1)(3x + 2)(x - 2)$

12 ■■■ Opera e simplifica:

- a) $(3x^3 + 1)(2x^2 - 3x + 5)$
 b) $(x^2 - 5x)(x^3 + 2x)$
 c) $(x^3 - 2x + 3)(x^2 + 4x - 1)$
 d) $(3x^2 - 2x + 2)(x^3 + 3x - 2)$

E

xercicios e problemas

13 ■■■ Calcula o cociente e o resto en cada unha destas divisións:

a) $(x^5 + 7x^3 - 5x + 1) : x$

b) $(x^3 - 5x^2 + x) : (x - 2)$

c) $(x^3 - 5x^2 + x) : (x + 3)$

14 ■■■ Acha o cociente e o resto en cada unha de estas divisións:

a) $(3x^2 - 7x + 5) : (3x + 1)$

b) $(4x^3 - x) : (2x + 3)$

c) $(5x^3 - 3x^2 + 8x) : (5x + 2)$

Factorización de polinomios

15 ■■■ Sacar factor común en cada caso:

a) $9x^2 + 6x - 3$

b) $2x^3 - 6x^2 + 4x$

c) $10x^3 - 5x^2$

d) $x^4 - x^3 + x^2 - x$

16 ■■■ Sacar factor común en cada polinomio:

a) $410x^5 - 620x^3 + 130x$

b) $72x^4 - 64x^3$

c) $5x - 100x^3$

d) $30x^6 - 75x^4 - 45x^2$

17 ■■■ Expresa os polinomios seguintes como cadrado dun binomio:

a) $x^2 + 12x + 36 = (x + \square)^2$

b) $4x^2 - 20x + 25 = (\square - 5)^2$

c) $49 + 14x + x^2$

d) $x^2 - x + \frac{1}{4}$

18 ■■■ Expresa como produto de dous binomios os seguintes polinomios:

a) $x^2 - 16 = (x + \square)(x - \square)$

b) $x^2 - 1$

c) $9 - x^2$

d) $4x^2 - 1$

e) $4x^2 - 9$

19 ■■■ Expresa como un cadrado ou como produto de dous binomios cada un dos seguintes polinomios:

a) $25x^2 + 40x + 16$

b) $64x^2 - 160x + 100$

c) $4x^2 - 25$

d) $x^4 - 1$

20 ■■■ Sacar factor común e utiliza os produtos notables para factorizar os seguintes polinomios:

a) $x^3 - 6x^2 + 9x$

b) $x^3 - x$

c) $4x^4 - 81x^2$

d) $x^3 + 2x^2 + x$

e) $3x^3 - 27x$

f) $3x^2 + 30x + 75$

Expresións de primeiro grao

21 ■■■ Simplifica.

a) $6(x + 3) - 2(x - 5)$

b) $3(2x + 1) + 7(x - 3) - 4x$

c) $5(3 - 2x) - (x + 7) - 8$

d) $4(1 - x) + 6x - 10 - 3(x - 5)$

e) $2x - 3 + 3(x - 1) - 2(3 - x) + 5$

f) $2(x + 3) - (x + 1) - 1 + 3(5x - 4)$

22 ■■■ Multiplica polo número indicado e simplifica.

a) $\frac{1 - 2x}{9} - 1 + \frac{x + 4}{6}$ por 18

b) $\frac{3x + 2}{5} - \frac{4x - 1}{10} + \frac{5x - 2}{8} - \frac{x + 1}{4}$ por 40

c) $\frac{x - 3}{2} - \frac{5x + 1}{3} - \frac{1 - 9x}{6}$ por 6

d) $\frac{x + 1}{2} + \frac{x - 3}{5} - 2x + 6 - \frac{x - 8}{5}$ por 10

e) $\frac{1 + 12x}{4} + \frac{x - 4}{2} - \frac{3(x + 1) - (1 - x)}{8}$ por 8

f) $\frac{3x - 2}{6} - \frac{4x + 1}{10} + \frac{2}{15} + \frac{2(x - 3)}{4}$ por 60

Expresións de segundo grao

23 ■■■ Simplifica as seguintes expresións:

a) $(x - 3)(x + 3) + (x - 4)(x + 4) - 25$

b) $(x + 1)(x - 3) + (x - 2)(x - 3) - (x^2 - 3x - 1)$

c) $2x(x + 3) - 2(3x + 5) + x$

d) $(x + 1)^2 - 3x - 3$

e) $(2x + 1)^2 - 1 - (x - 1)(x + 1)$

f) $x(x - 3) + (x + 4)(x - 4) - (2 - 3x)$

24 ■■■ Multiplica polo número indicado e simplifica.

a) $(3x + 1)(3x - 1) + \frac{(x-2)^2}{2} - 1 + 2x$ por 2

b) $\frac{x^2 + 2}{3} - \frac{x^2 + 1}{4} - \frac{x + 5}{12}$ por 12

c) $\frac{(2x-1)(2x+1)}{3} - \frac{3x-2}{6} - \frac{x^2}{3}$ por 6

d) $\frac{(x+1)(x-3)}{2} + x - \frac{x}{4}$ por 4

e) $x + \frac{3x+1}{2} - \frac{x-2}{3} - x^2 + 2$ por 6

f) $\frac{x(x-1)}{3} - \frac{x(x+1)}{4} + \frac{3x+4}{12}$ por 12

Expresións non polinómicas

25 ■■■ Desenvolve $A^2 - B^2$ e simplifica en cada un dos seguintes casos:

a) $A = \sqrt{x}$, $B = x - 2$

b) $A = \sqrt{25 - x^2}$, $B = x - 1$

c) $A = \sqrt{169 - x^2}$, $B = x - 17$

d) $A = \sqrt{5x + 10}$, $B = 8 - x$

e) $A = \sqrt{2x^2 + 7}$, $B = \sqrt{5 - 4x}$

f) $A = \sqrt{x + 2}$, $B = x - 4$

26 ■■■ Multiplica pola expresión indicada e simplifica.

a) $\frac{2}{x} - \frac{1}{2x} - \frac{3x}{2}$ por $2x$

b) $\frac{800}{x} - 50 - \frac{600}{x+4}$ por $x(x+4)$

c) $\frac{1}{x^2} - 2 - \frac{3-x}{3x^2}$ por $3x^2$

d) $\frac{x}{2} - 1 - \frac{2x-4}{x+4}$ por $2(x+4)$

e) $\frac{100}{x} + 5 - \frac{90}{x-4}$ por $x(x-4)$

f) $\frac{250}{x+1} - 5 - 3(4x-1)$ por $x+1$

g) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{5}{9}$ por $9x^2$

h) $\frac{2-x}{2} + \frac{4}{2+x} - 1$ por $2(2+x)$

PENSA E RESOLVE

Monomios, polinomios, factorización

27 ■■■ Ao multiplicar $P(x)$ por $3x^2$ obtivemos $-15x^4$. Canto vale $P(x)$?

28 ■■■ Ao dividir $M(x)$ entre $2x^3$ obtivemos $5x^2$. Canto vale $M(x)$?

29 ■■■ Calcula un polinomio $P(x)$ de maneira que:

$$A(x) + P(x) = 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x - 1$$

sendo: $A(x) = x^3 + 3x^2 - 5x - 1$

30 ■■■ Calcula un polinomio $P(x)$ de maneira que:

$$3A(x) - P(x) = -5x^3 + 3x^2 - 2x + 5$$

sendo: $A(x) = x^2 - 2x + 1$

31 ■■■ Calcula un polinomio $P(x)$ de maneira que:

$$A(x) - 2B(x) + P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

sendo:

$$A(x) = 2x^4 - 3x^2 - 4x + 5$$

$$B(x) = x^3 - 5x^2 - 5x + 9$$

32 ■■■ Efectúa as seguintes divisións e expresa o resultado da forma $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$:

a) $(x^2 - 3x + 2) : (x + 4)$

b) $(x^3 - 2x + 3) : (x^2 - 1)$

c) $(3x^2 - 2x + 7) : (x - 2)$

d) $(x^2 + x - 12) : (x + 3)$

33 ■■■ As seguintes divisións son exactas. Efectúaa e expresa o dividendo como produto de dous factores:

a) $(x^5 + 2x^4 + x + 2) : (x + 2)$

b) $(3x^3 + 7x^2 + 7x + 4) : (3x + 4)$

c) $(x^3 - x^2 + 9x - 9) : (x - 1)$

d) $(2x^3 - 3x^2 + 10x - 15) : (2x - 3)$

34 ■■■ Completa estas expresións:

a) $(x - 3)^2 = x^2 - \square x + 9$

b) $(2x + 1)^2 = 4x^2 + \square x + 1$

c) $(x + \square)^2 = x^2 + \square x + 16$

d) $(3x - \square)^2 = \square x^2 - \square x + 4$

E

xercicios e problemas

Enunciados: primeiro grao

35 ■■■ Expresa alxebricamente e simplifica cada expresión obtida:

- A suma das idades de Alicia e María, sabendo que esta ten 7 anos máis que Alicia.
- A idade de Alberte dentro de 22 anos.
- A cantidade que se obtén ao investir x euros e gañar o 11%.
- Entre un ordenador e un equipo de música páganse 2500 €. Se o ordenador custa x euros, canto custa o equipo de música?
- Comprar un artigo por x euros e perder o 15% do seu valor. Canto custaría agora?
- O prezo dunha cea á que acoden x persoas pagando cada unha 18 €.
- Os lados dun triángulo rectángulo no cal un dos catetos mide os $\frac{3}{5}$ da hipotenusa, e o outro cateto, 5 cm menos que esta.
- Os lados dun triángulo rectángulo isóscele de 24 cm de perímetro.

36 ■■■ Na expresión $\frac{x}{4} + \frac{y-1}{5} - 1$ substitúe x por $1 - 3y$ e simplifica.

37 ■■■ En cada caso, desenvolve $A + B$ e simplifica:

- $A = 4(x - 3) + y$ $B = 3(x + 3) - y - 18$
- $A = \frac{x+4}{5} - y + 1$ $B = \frac{x-6}{5} + y + 1$
- $A = -2\left(\frac{x+1}{3} + y - 1\right)$ $B = \frac{x-3}{4} + 2y - 1$
- $A = 6(x + 2) - 2(y + 7)$ $B = x + 2(y + 1)$

Enunciados: segundo grao

38 ■■■ Expresa alxebricamente e simplifica cada expresión obtida:

- A área dunha lámina de bronce cuxa base mide $\frac{5}{3}$ da súa altura.
- O cadrado dun número menos o seu triplo.
- O cadrado da hipotenusa dun triángulo rectángulo cuxos catetos miden $16 - x$ e $9 - x$.
- A área dun cadrado de lado $x + 3$.
- A diferenza de áreas de dous cadrados de lados x e $x + 3$, respectivamente.

f) A superficie dun xardín rectangular de base x e perímetro 70 m.

g) O cadrado da hipotenusa dun triángulo rectángulo isóscele de 24 cm de perímetro.

h) A área dun rombo sabendo que a lonxitude dunha diagonal é o triplo da outra.

39 ■■■ En cada unha das seguintes expresións, substitúe y polo que se indica e simplifica:

- $xy + 2y - 2$ y por $1 - x$
- $xy - y^2$ y por $3 - 2x$
- $2x^2 + y^2 - 9$ y por $3x - 3$
- $x^2 + y^2 - 2$ y por $3 - 2x$

40 ■■■ En cada unha das seguintes expresións, substitúe x polo que se indica e simplifica:

- $x(x - y) - 2(y^2 - 4)$ x por $-\frac{2y}{3}$
- $xy - 2$ x por $\frac{25}{2}y$
- $2xy - 3$ x por $4 - 2y$

41 ■■■ Se $A = x^2 + y^2 - 74$ e $B = 2x^2 - 3y^2 - 23$, calcula $3A + B$ e simplifica.

42 ■■■ Se $A = 3x^2 - 5y^2 - 7$ e $B = 11y^2 - 3 - 2x^2$, calcula $2A + 3B$ e simplifica.

Enunciados: expresións non polinómicas

43 ■■■ Dous números suman 40. Expresa alxebricamente a suma do menor máis a raíz cadrada do maior.

44 ■■■ O cateto dun triángulo rectángulo isóscele $\frac{24-x}{2}$. Expresa alxebricamente a lonxitude da hipotenusa e simplifica.

45 ■■■ Un grupo de x estudantes aluga un piso por 700 € ao mes. Apúntanse 2 máis para alugalo. Expresa alxebricamente a diferenza de prezo en ambos os casos (con todos eles ou con 2 máis).

46 ■■■ Un grupo de x amigos compran un regalo por 75,60 €. Tres deles non teñen diñeiro. Expresa alxebricamente a diferenza de prezo en ambos os casos (con todos eles ou con 3 menos).

Busca regularidades e xeneraliza

Triángulo e potencias

Observa, comproba e compara:

			1			
		1		1		
	1		2		1	
1		1	3		3	1
	1	4		6		4

$$(a + b)^1 = 1a + 1b$$

$$(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

Saberías engadir unha fila máis a este triángulo numérico? (Coñécese como **triángulo de Tartaglia**).

Saberías escribir o desenvolvemento de $(a + b)^5$ sen necesidade de multiplicar $(a + b)$ por si mesmo cinco veces?

Utiliza a linguaxe alxébrica

Binomios e potencias

Sabendo que $a^2 = a + 2$, transforma nunha potencia de base a as seguintes expresións:

$$3a + 2$$

$$5a + 6$$

$$11a + 10$$

$$21a + 22$$

Autoavaliación

Reflexiona sobre a túa aprendizaxe

- Sabes operar con polinomios e obter o cociente e o resto dunha división?
- Factorizas un polinomio con axilidade?
- Manexas os procedementos para simplificar distintas expresións alxébricas?
- Melloraches a túa capacidade para traducir un enunciado á linguaxe alxébrica?

Verifícao resolvendo exercicios

- 1 Multiplica e simplifica: $(2x + 3) \cdot (x^2 - 3x) - x(x + 8)$
- 2 Acha o cociente e o resto: $(2x^3 + 3x^2 - 7) : (x + 1)$
- 3 Factoriza: a) $x^4 - 16x^2$ b) $x^3 - 6x^2 + 9x$

4 Reduce: a) $6 \cdot \left(\frac{x^2 + 1}{3} - \frac{x^2 - 4}{6} - x + 1 \right)$

b) $(\sqrt{5 - 3x})^2 - (3x + 1)^2$

5 Substitúe x por $1 + 2y$ en $x^2 - y - 8$ e simplifica.

6 Expresa alxebricamente e simplifica.

- a) A diferenza dos cadrados de dous números que suman 7 unidades.
- b) Prezo final dun produto que custa x euros despois dunha suba do 8%.
- c) A hipotenusa dun triángulo rectángulo no que un cateto mide a metade do outro.

5. No teu CD-ROM tes unha **autoavaliación moito máis ampla e completa**. Nel encontrarás, ademais, orientacións e, se o desexas, as solucións dos exercicios.