

13 FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

EJERCICIOS PROPUESTOS

13.1 Indica cuáles de las siguientes funciones son lineales.

a) $y = -5$

d) $y = 0,3x$

b) $y = 0,04 + 23x$

e) $y = -2x^2$

c) $y = 1 - x^2$

f) $y = -0,5x + 2$

Son lineales a, b, d y f.

13.2 Expresa cada una de estas funciones mediante una fórmula e indica cuáles son lineales.

a) A cada número real le corresponde su doble.

b) A cada número real le corresponde su doble más cinco.

c) A cada número real le corresponde su cuadrado.

a) $y = 2x$

b) $y = 2x + 5$

c) $y = x^2$

Son lineales a y b.

13.3 Indica la pendiente y la ordenada en el origen de las siguientes funciones lineales.

a) $y = 3x$

c) $y = 3x + 1$

b) $y = -5x + 2$

d) $y = \frac{1}{2}x + 3$

a) $m = 3, n = 0$

c) $m = 3, n = 1$

b) $m = -5, n = 2$

d) $m = \frac{1}{2}, n = 3$

13.4 Halla la ecuación de la función lineal que pasa por el punto $A(2, 9)$ y tiene pendiente -3 .

$$m = -3 \rightarrow y = -3x + n$$

Si pasa por $A(2, 9)$, entonces: $9 = -3 \cdot 2 + n \rightarrow n = 15, y = -3x + 15$.

13.5 Determina la ecuación de la función lineal que pasa por los puntos $A(2, -1)$ y $B(5, 4)$.

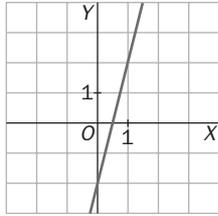
$$\left. \begin{array}{l} -1 = 2 \cdot m + n \\ 4 = 5 \cdot m + n \end{array} \right\} \begin{array}{l} m = \frac{5}{3} \\ n = -\frac{13}{3} \end{array}$$

La ecuación es: $y = \frac{5}{3}x - \frac{13}{3}$.

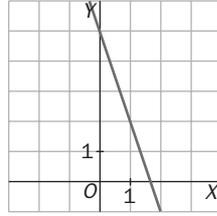
13 FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

13.6 Representa estas funciones lineales.

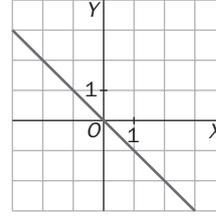
a) $y = 4x - 2$



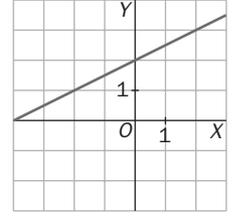
b) $y = -3x + 5$



c) $y = -x$



d) $y = \frac{1}{2}x + 2$



13.7 Escribe la ecuación de dos rectas que sean paralelas a cada una de estas funciones lineales.

a) $y = 2x - 3$

c) $y = -x + 1$

b) $y = 3x$

d) $y = -5x + 7$

a) $y = 2x$; $y = 2x + 3$

c) $y = -x + 2$; $y = -x - 7$

b) $y = 3x + 1$; $y = 3x + 10$

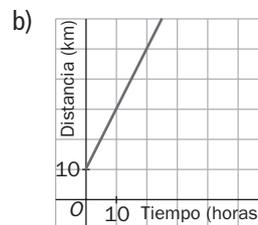
d) $y = -5x$; $y = -5x + 4$

13.8 Un ciclista parte del kilómetro 10 de una carretera a una velocidad constante de 20 kilómetros hora.

a) Halla la expresión algebraica de la función que relaciona el punto kilométrico de la carretera con el tiempo transcurrido desde el inicio.

b) Representa la función.

a) $y = 20x + 10$, donde y es el punto kilométrico de la carretera, y x , el tiempo transcurrido, en horas.

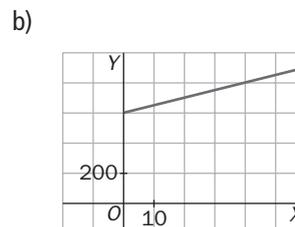


13.9 Se ha realizado una campaña de vacunación en una comunidad autónoma. Los gastos de distribución son 600 euros y los gastos de vacunación son 5 euros por cada vacuna puesta.

a) Determina la expresión algebraica de esta función.

b) Representa la función.

a) $y = 5x + 600$, donde y es el dinero que se gasta en la campaña, y x , el número de vacunas puestas.



13.10 Entre las siguientes funciones, indica cuáles son cuadráticas.

a) $y = 3x^2$

b) $y = -2x + 3$

c) $y = 5 + x^2$

d) $y = x^3$

Son cuadráticas a y c.

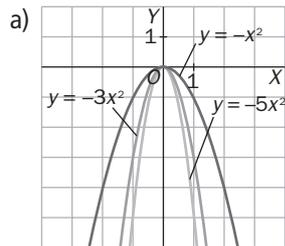
13 FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

13.11 Dadas las funciones:

$$y = -x^2 \quad y = -3x^2 \quad y = -5x^2$$

a) Representálas en un mismo gráfico.

b) ¿Qué relación existe entre el coeficiente de la parábola y la aproximación al eje OY?



b) Cuanto mayor es el coeficiente, más se aproxima la parábola al eje OY.

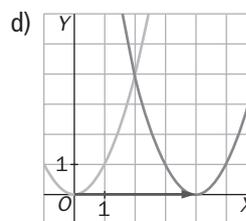
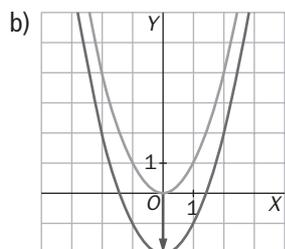
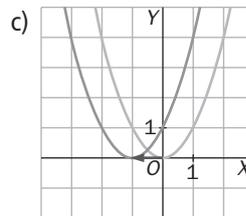
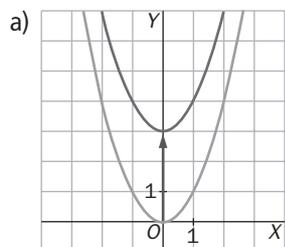
13.12 Representa por traslación estas funciones.

a) $y = x^2 + 3$

b) $y = x^2 - 2$

c) $y = (x + 1)^2$

d) $y = (x - 4)^2$



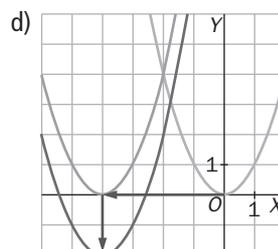
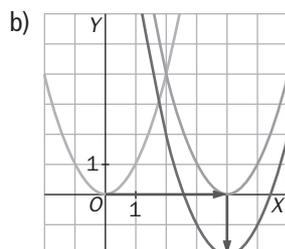
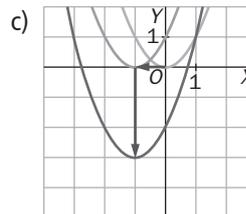
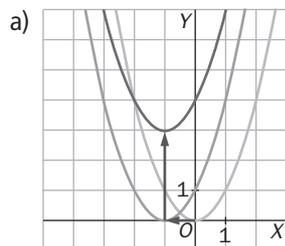
13.13 Representa por traslación las siguientes funciones.

a) $y = (x + 1)^2 + 3$

b) $y = (x - 4)^2 - 2$

c) $y = (x + 1)^2 - 3$

d) $y = (x + 4)^2 - 2$



13 FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

13.14 Representa estas funciones cuadráticas y estudia las gráficas que obtengas.

a) $y = 2x^2 - 4x - 6$

b) $y = -x^2 - 6x + 27$

a) Abierta hacia arriba, $a > 0$

Punto de corte con el eje OY : $x = 0 \rightarrow y = -6 \rightarrow (0, -6)$

Hallamos el vértice de la parábola: $-6 = 2x^2 - 4x - 6 \rightarrow$

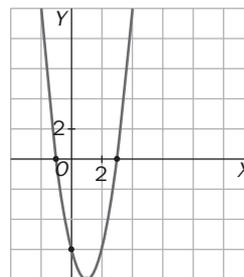
$$x = 0 \text{ o } x = 2$$

El vértice está en $x = 1, y = -8 \rightarrow V(1, -8)$

Puntos de corte con el eje OX :

$$y = 0 \rightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases} \rightarrow (3, 0) \text{ y } (-1, 0)$$



b) Abierta hacia abajo, $a < 0$

Punto de corte con el eje OY : $x = 0 \rightarrow y = 27 \rightarrow (0, 27)$

Hallamos el vértice de la parábola: $27 = -x^2 - 6x + 27 \rightarrow$

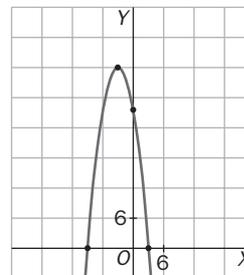
$$x = 0 \text{ o } x = -6$$

El vértice está en $x = -3, y = 36 \rightarrow V(-3, 36)$

Puntos de corte con el eje OX :

$$y = 0 \rightarrow -x^2 - 6x + 27 = 0$$

$$\rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 108}}{-2} = \frac{6 \pm 12}{-2} = \begin{cases} -9 \\ 3 \end{cases} \rightarrow (-9, 0) \text{ y } (3, 0)$$



13.15 Representa las siguientes funciones cuadráticas y analiza las gráficas obtenidas.

a) $y = 2x^2 - 6$

b) $y = x^2 - 5x$

a) Abierta hacia arriba, $a > 0$

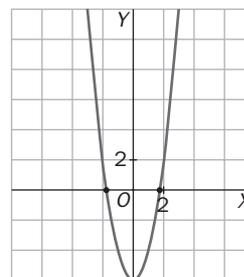
Punto de corte con el eje OY : $x = 0 \rightarrow y = -6 \rightarrow (0, -6)$

Hallamos el vértice de la parábola: $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{4} = 0$

El vértice es $V(0, -6)$

Puntos de corte con el eje OX :

$$y = 0 \rightarrow 2x^2 - 6 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \rightarrow (\sqrt{3}, 0) \text{ y } (-\sqrt{3}, 0)$$



b) Abierta hacia arriba, $a > 0$

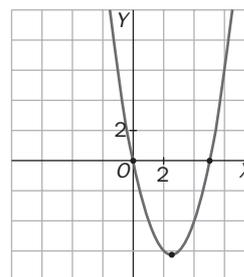
Punto de corte con el eje OY : $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

Hallamos el vértice de la parábola: $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{5}{2} = 2,5$

El vértice es $V(2,5; 6,25)$

Puntos de corte con el eje OX :

$$y = 0 \rightarrow x(x - 5) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ o } x = 5 \rightarrow (0, 0) \text{ y } (5, 0)$$



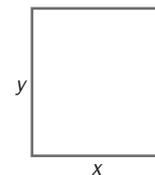
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

- 13.16 Con 5 metros de moldura se quiere construir un marco de forma rectangular y área máxima. ¿Cuáles serán sus dimensiones?

$$\text{Perímetro} = 2x + 2y = 5 \rightarrow y = \frac{5 - 2x}{2}$$

$$\text{Área} = f(x) = x \cdot y$$

$$f(x) = x \frac{5 - 2x}{2} = -x^2 + \frac{5}{2}$$



La parábola $f(x)$ es abierta hacia abajo porque $a = -1 < 0$.

El máximo de la función está en el vértice. La abscisa del vértice es $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-\frac{5}{2}}{-2} = \frac{5}{4}$.

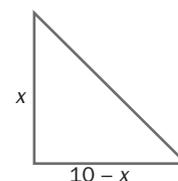
La ordenada del vértice es $y = \frac{5 - 2 \cdot \frac{5}{4}}{2} = \frac{5}{4}$. Por tanto, el marco es un cuadrado de $\frac{5}{4}$ m de lado.

- 13.17 De todos los triángulos rectángulos cuya suma de catetos es 10 centímetros, ¿cuál es el que tiene mayor superficie?

$$\text{Área} = A(x) = \frac{x(10 - x)}{2} = -\frac{x^2}{2} + 5x$$

La gráfica de esta función $A(x)$ es una parábola abierta hacia abajo. Su máximo está en el vértice.

Hallamos la abscisa del vértice: $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-5}{-2 \cdot \frac{1}{2}} = 5$



El triángulo rectángulo con mayor superficie es el que tiene los dos catetos son iguales y miden 5 cm cada uno.

13 FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Definición y caracterización de una función lineal

13.18 Una función viene dada por la siguiente tabla.

x	0	1	2	3
y	10	13	16	19

Expresa la función mediante una fórmula, utilizando como ayuda esta otra tabla.

x	0	1	2	3
y	10	10 + 3	10 + 6	10 + 9
	10	10 + 3 · 1	10 + 3 · 2	10 + 3 · 3

Luego la expresión algebraica es: $y = 10 + 3x$

13.19 Relaciona cada tabla con su ecuación correspondiente.

x	5	-10
y	6	-1

x	4	8
y	-5	-8

x	5	-3
y	-1	1

$$y = \frac{-x + 1}{4}$$

$$y = 0,2x + 1$$

$$y = \frac{-3x}{4} - 2$$

13.20 Indica cuáles de las siguientes ecuaciones corresponden a funciones lineales. En los casos que sí lo sean halla la pendiente y la ordenada en el origen.

a) $y = \frac{8x - 3}{5}$

b) $y = -\frac{x}{9} + \frac{3}{4}$

c) $y = x^2 + x - 3$

d) $y = \frac{5}{x} - 1$

a) Lineal: $m = \frac{8}{5}, n = -\frac{3}{5}$

c) No lineal

b) Lineal: $m = -\frac{1}{9}, n = \frac{3}{4}$

d) No lineal

13.21 ¿Cuáles de estas relaciones son funciones lineales?

a) A cada número le hacemos corresponder el triple del siguiente.

b) A cada número real le hacemos corresponder el mismo menos el 10% de su mitad.

c) A cada número real le hacemos corresponder el producto de su anterior por su posterior.

a) $y = 3(x + 1) = 3x + 3$

b) $y = x - \frac{10}{100} \frac{x}{2} = x - \frac{1}{20}x = \frac{19}{20}x$

c) $y = (x - 1) \cdot (x + 1) = x^2 - 1$

Son lineales a y b.

13 FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

13.22 ¿Cuál de las siguientes rectas no es paralela a las otras?

a) $y = \frac{-3x + 1}{6}$

b) $x + 2y - 3 = 0$

c) $y = \frac{-x}{2}$

d) $y = \frac{1}{2}x + 6$

Dos rectas son paralelas si tienen la misma pendiente.

a) $m = -\frac{1}{2}$

c) $m = -\frac{1}{2}$

b) $y = \frac{-x + 3}{2} \rightarrow m = -\frac{1}{2}$

d) $m = \frac{1}{2}$, no es paralela a las otras.

13.23 ¿Están alineados los puntos $(-1, 7)$, $(2, -5)$ y $(0, 3)$?

Hallamos la ecuación de la recta que pasa por dos de los puntos: $(-1, 7)$ y $(2, -5)$. Si el tercer punto, $(0, 3)$, pertenece a esa recta, es que sí están alineados.

$$\begin{cases} -7 = m + n \\ -5 = 2m + n \end{cases} \rightarrow m = -4, n = 3 \rightarrow y = -4x + 3$$

Si $x = 0 \rightarrow y = 3$. El punto $(0, 3)$ pertenece a esta recta. Sí, los tres puntos están alineados.

13.24 Halla la ecuación de la recta paralela a $y = \frac{-x + 1}{5}$ que pasa por el punto $A(-3, 4)$.

Si la recta que buscamos es paralela a $y = \frac{-x + 1}{5}$, entonces su pendiente debe ser $m = -\frac{1}{5}$.

Su ecuación tendrá la forma $y = -\frac{1}{5}x + n$.

Sustituimos las coordenadas del punto A en la ecuación de la recta para hallar la coordenada en el origen n .

$$4 = -\frac{1}{5} \cdot (-3) + n \rightarrow n = \frac{17}{5}$$

La ecuación de la recta es:

$$y = -\frac{1}{5}x + \frac{17}{5}$$

Representación y aplicación de una función lineal

13.25 Representa las siguientes funciones lineales.

a) $y = 3x - 2$

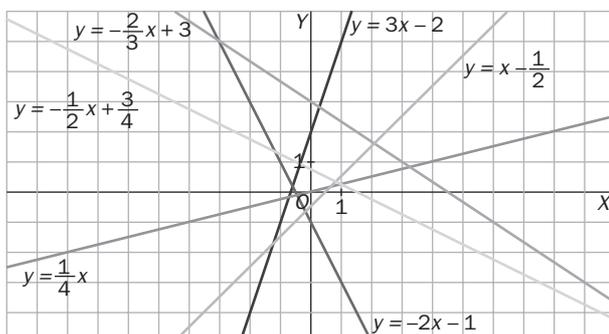
c) $y = \frac{1}{4}x$

e) $y = x - \frac{1}{2}$

b) $y = -2x - 1$

d) $y = -\frac{2}{3}x + 3$

f) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$



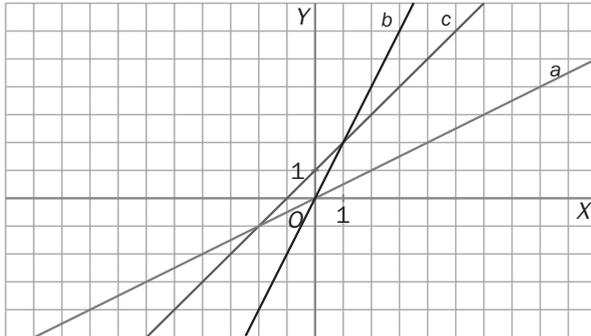
13 FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

13.26 Relaciona cada gráfica con su ecuación.

a) $y = \frac{1}{2}x$

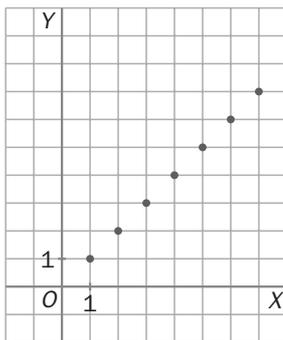
b) $y = 2x$

c) $y = x + 1$

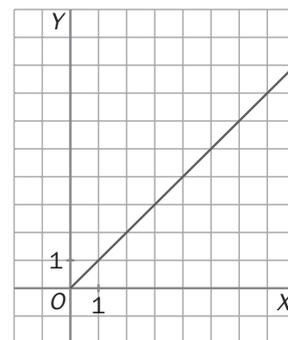


13.27 Una cooperativa agrícola vende el vinagre a granel a 1 euro el litro y las bolsas de patatas a 1 euro la bolsa.

¿Cuál de las siguientes representaciones corresponde a cada una de las funciones lineales que relacionan la cantidad de producto y el precio?



Precio de las bolsas de patatas

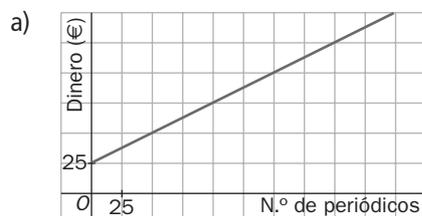


Precios de los litros de vinagre

13.28 Para colaborar con las personas sin techo, una ONG elabora un periódico de reparto callejero. Cada vendedor recibe un fijo de 25 euros al mes y, además, 50 céntimos por ejemplar vendido.

a) Escribe la fórmula y representa la gráfica de la función que relaciona el número de periódicos vendidos con el dinero recibido al mes.

b) ¿Cuántos ejemplares tiene que vender un "sin techo" para cobrar en un mes 185 euros?

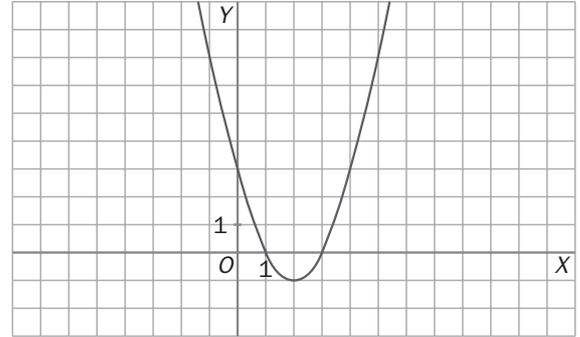


b) $185 = 25 + 0,5x \rightarrow x = 320$ periódicos

13 FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

Función cuadrática

13.29 Dada la siguiente parábola.



- ¿Cuál es su vértice?
- Halla la ecuación del eje de simetría.
- ¿Cuál es la ordenada del punto de abscisa $x = 4$?
- Escribe su ecuación.

a) $(2, -1)$

b) $x = 2$

c) $y = 3$

d) La ecuación tendrá la forma $y = ax^2 + bx + c$

La función pasa por $(0, 3)$, de donde se deduce que $c = 3$

$$\left. \begin{array}{l} \text{También pasa por } (1, 0), \text{ de donde: } 0 = a + b + 3 \rightarrow a + b = -3 \\ \text{Conocemos la abscisa del vértice: } x = \frac{-b}{2a} = 2 \rightarrow b = -4a \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -4 \end{array}$$

La ecuación es $y = x^2 - 4x + 3$

13.30 Una función cuadrática tiene su vértice en el punto $(4, -4)$. Completa la tabla utilizando la simetría de la función.

x	2	6	5	-3
y	0	0	-3	-3

Como tiene su vértice en $(4, -4)$, el eje de simetría es $x = 4$. Entonces:

$$x = 2 \text{ es un punto simétrico a } x = 6 \text{ respecto al eje, con lo que } f(6) = f(2) = 0$$

$$x = 5 \text{ es un punto simétrico a } x = 3 \text{ respecto al eje, con lo que } f(5) = f(3) = -3$$

13.31 La parábola de ecuación $y = (x + a)^2 - 5$ tiene el vértice en el punto $V(-3, b)$. Halla el valor de a y b .

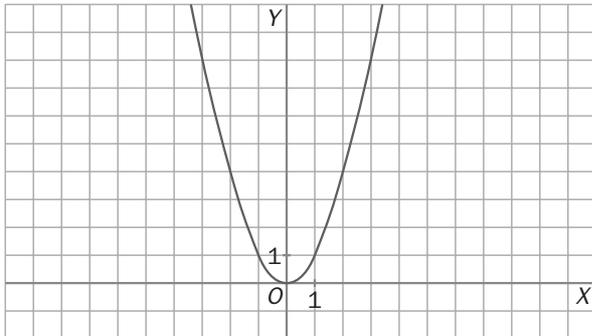
$$y = x^2 + 2ax + a^2 - 5$$

$$-3 = x_v = -a \rightarrow a = 3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = x^2 + 6x + 4 \\ x_v = -3 \end{array} \right. \rightarrow y_v = -5 \rightarrow b = -5$$

13 FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

13.32 Dada esta gráfica de una parábola.



Traslada la gráfica, sin variar la orientación ni la abertura, de forma que el vértice sea el indicado en cada caso.

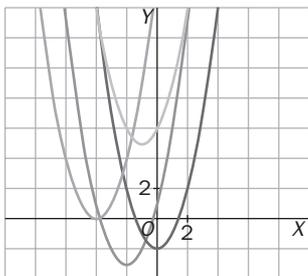
a) $(0, -2)$

c) $(-1, 5)$

b) $(-4, 0)$

d) $(-2, -3)$

Escribe, en cada caso, la ecuación de la parábola.



a) $y = x^2 - 2$

c) $y = (x + 1)^2 + 5$

b) $y = (x + 4)^2$

d) $y = (x + 2)^2 - 3$

13.33 Representa las siguientes parábolas.

a) $y = x^2 - 4x + 3$

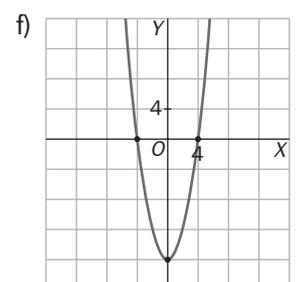
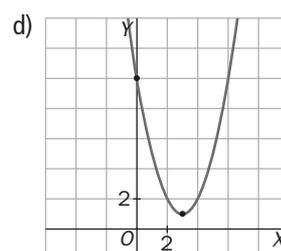
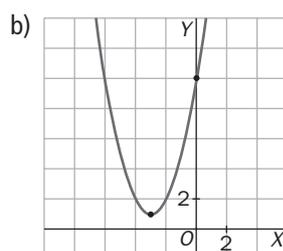
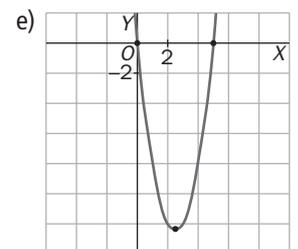
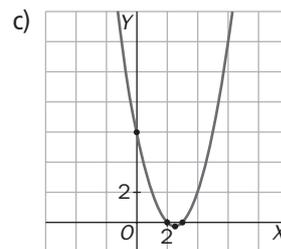
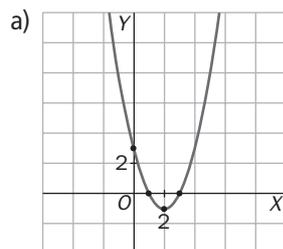
c) $y = x^2 - 5x + 6$

e) $y = 2x^2 - 10x$

b) $y = x^2 + 6x + 10$

d) $y = x^2 - 6x + 10$

f) $y = x^2 - 16$



13 FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

CUESTIONES PARA ACLARARSE

13.34 ¿Pertenece el punto (2, 3) a la recta de ecuación $y = 2x - 1$? ¿Por qué?

$3 = 2 \cdot 2 - 1$. Sí, verifica la ecuación.

13.35 Dadas estas ecuaciones de funciones lineales.

I) $y = 3x$

II) $y = 4x + 1$

III) $y = 3x + 2$

IV) $y = -2x + 1$

Indica:

- a) Cuáles son paralelas entre sí.
- b)Cuál es decreciente.
- c)Cuál pasa por el origen.
- d)Cuál es más inclinada.
- e) Cuáles tienen la misma ordenada en el origen.

a) I y II

b) IV

c) I

d) II

e) II y IV

13.36 Dadas las siguientes parábolas.

I) $y = 2x^2$

II) $y = 2x^2 - 3$

III) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

IV) $y = 5(x + 2)^2$

Indica:

- a)Cuál es la única parábola cuyas ramas se abren hacia abajo.
- b) Cuáles tienen igual abertura.
- c)Cuál es la más cerrada.
- d)Cuál tiene el vértice en el punto $(-2, 0)$.

a) III

b) I y II

c) IV

d) IV

13 FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

13.37 ¿Cuál es el único punto de una parábola que es simétrico a sí mismo con respecto al eje de la parábola?

El vértice

13.38 Indica las condiciones que debe tener una parábola para que:

- a) No corte al eje de abscisas.
- b) Corte una sola vez al eje de abscisas.
- c) No corte al eje OY .

a) Que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ no tenga solución.

b) Que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tenga una única solución.

c) No es posible que una parábola no corte al eje OY .

La condición debería ser que no pasase por $x = 0$, es decir, que no fuera continua.

13.39 ¿Pueden tener un mínimo las siguientes funciones? Justifica tu respuesta.

a) $y = -4x^2 - 2x + 1$

b) $y = 3(x + 1)^2 - 4$

a) No, al ser la parábola abierta hacia abajo.

b) Sí, el vértice es un mínimo de la función.

13.40 Dada la parábola de ecuación $y = -2x^2 - 4x - 5$, comprueba si también se puede expresar de la forma $y = -2(x + 1)^2 - 3$.

¿Qué ventajas observas en esta manera de expresar la ecuación?

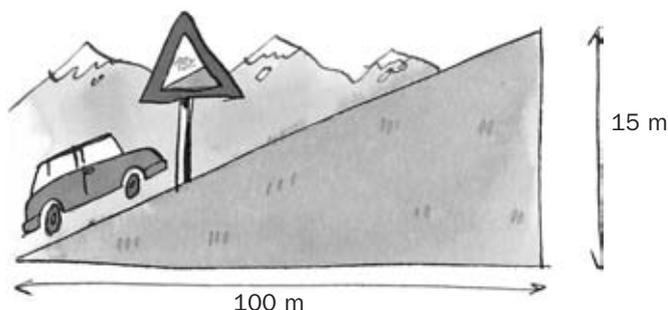
Sí, son la misma parábola, ya que: $-2(x + 1)^2 - 3 = -2(x^2 + 2x + 1) - 3 = -2x^2 - 4x - 5$.

En la segunda expresión se puede apreciar que se trata de una traslación de x^2 .

13.41 Si el eje de una parábola fuera $y = 3$, ¿podríamos decir que corresponde a una función cuadrática? Justifica tu respuesta.

No, ya que en ese caso no tendríamos una función, porque para un solo valor de x habría dos valores de y .

PROBLEMAS PARA APLICAR

13.42 **Observa el dibujo.**

- a) Calcula la pendiente de la recta sobre la que está ubicada la carretera por la que asciende el coche.
 b) Explica el significado de la señal de tráfico que aparece en la carretera.

a) $m = \frac{15}{100} = 0,15$

- b) Por cada 100 m que se avanza en la horizontal se ascienden 15 m.

13.43 **Juan recibe una factura mensual de 100 minutos de teléfono. Dos nuevas compañías telefónicas le realizan las siguientes ofertas.**



- a) ¿Cuál es más beneficiosa para Juan?
 b) ¿Existe algún número de minutos consumidos en el que la factura sea la misma en las dos compañías?

a) Compañía A: $y = 10 + 0,05x$

Si $x = 100 \rightarrow y = 15 \text{ €}$

Compañía B: $y = 0,1x$

Si $x = 100 \rightarrow y = 10 \text{ €}$

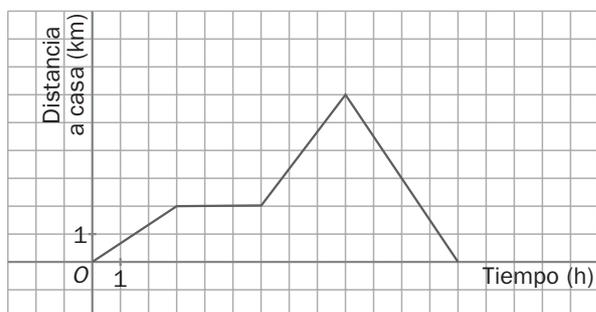
Es mejor la B para Juan.

b) $10 + 0,05x = 0,1x \rightarrow x = 200 \text{ min}$

13 FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

13.44 La siguiente gráfica muestra el recorrido que sigue una persona a lo largo del día.

Indica la fórmula de la función de cada tramo.



Primer tramo: $y = \frac{2}{3}x$

Segundo tramo: $y = 2$

Tercer tramo: $y = \frac{4}{3}x - 6$

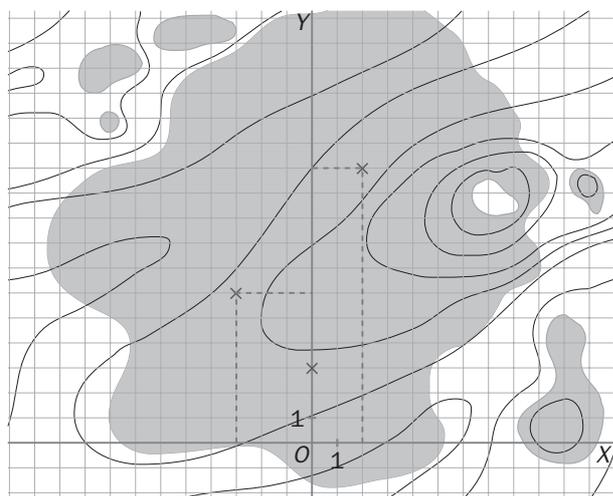
$$\text{Pasa por } (6, 2) \text{ y por } (9, 6) \rightarrow \begin{cases} 6m + n = 2 \\ 9m + n = 6 \end{cases} \rightarrow m = \frac{4}{3}, n = -6$$

Cuarto tramo: $y = -\frac{3}{2}x + \frac{39}{2}$

$$\text{Pasa por } (9, 6) \text{ y por } (13, 0) \rightarrow \begin{cases} 9m + n = 6 \\ 13m + n = 0 \end{cases} \rightarrow m = -\frac{3}{2}, n = \frac{39}{2}$$

13.45 En una zona de mucha arboleda de la Sierra de Cazorla, la Agencia de Medio Ambiente decide abrir un cortafuegos, por el peligro existente de incendios en la campaña de verano. Para su mayor efectividad tendrá que tener un trazado parabólico y atravesar tres sitios estratégicos.

Observa el mapa de la zona, con los puntos de paso señalados, y halla la ecuación de la línea del cortafuegos.



Los puntos de paso son $(0, 3)$; $(2, 11)$ y $(-3, 6)$.

Sustituimos estos puntos en la ecuación de la parábola:

$$\begin{cases} 3 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \rightarrow c = 3 \\ 11 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \rightarrow b = 4 - 2a \\ 6 = a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + c \rightarrow 3a - b = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

La ecuación de la línea del cortafuegos es $y = x^2 + 2x + 3$.

13 FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

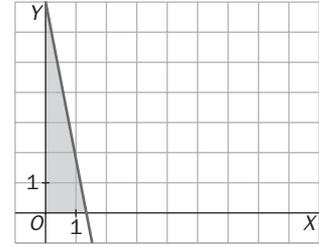
13.46 Calcula el área del triángulo que forma la recta de ecuación $y = -5x + 7$ con los ejes coordenados.

La recta corta los ejes en los puntos $(0, 7)$ y $(\frac{7}{5}, 0)$.

$$x = 0 \rightarrow y = 7$$

$$y = 0 \rightarrow -5x + 7 = 0 \rightarrow x = \frac{7}{5}$$

$$\text{El área es: } A = \frac{\frac{7}{5} \cdot 7}{2} = \frac{49}{10} u^2$$



13.47 La ecuación del espacio recorrido por un móvil es $s = 5 + 3t + 2t^2$, donde s se expresa en metros y t en segundos.

a) ¿Qué longitud ha recorrido el móvil al cabo de 5 segundos de iniciar el movimiento?

b) ¿Cuál es la longitud recorrida durante el quinto segundo?

c) ¿Cuánto tiempo ha transcurrido cuando ha recorrido 157 metros desde el inicio?

$$\text{a) } t = 5 \rightarrow s = 5 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 = 70 \text{ m}$$

$$\text{b) } t = 4 \rightarrow s = 5 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 4^2 = 49 \text{ m}$$

Durante el 5.º segundo recorre una longitud que es la diferencia entre las distancias recorridas al cabo de 5 y de 4 segundos: $70 - 49 = 21$ m.

$$\text{c) } 157 = 5 + 3t + 2t^2 \rightarrow 2t^2 + 3t - 152 = 0 \rightarrow t = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 1216}}{4} = 8 \text{ s}$$

(La respuesta negativa no tiene sentido).

13.48 Expresa el área de un triángulo equilátero en función de su lado. ¿De qué tipo de función se trata?

Llamamos L al lado, y h a la altura.

$$\left(\frac{h}{2}\right)^2 + h^2 = L^2 \rightarrow h = \sqrt{L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} = L \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A = \frac{L \cdot L \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} L^2$$

Es una función cuadrática.

13.49 Averigua cuál es el punto simétrico del punto $(-2, -5)$ con respecto al eje de simetría de la parábola $y = -2x^2 - 16x - 29$.

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -4$$

El eje de simetría es $x = -4$.

El punto simétrico a $(-2, -5)$ es $(-6, -5)$.

13 FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

13.50 Halla los vértices y el área del triángulo cuyos lados cumplen las siguientes ecuaciones.

$$y = 3$$

$$x = 2$$

$$y = -2x + 6$$

El problema se resuelve hallando los puntos de corte entre las tres rectas definidas por las ecuaciones, para encontrar los vértices del triángulo.

$$\begin{cases} y = 3 \\ x = 2 \end{cases} \rightarrow \text{Vértice } (2, 3)$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ y = -2x + 6 \end{cases} \rightarrow x = \frac{3}{2} \rightarrow \text{Vértice } \left(\frac{3}{2}, 3\right)$$

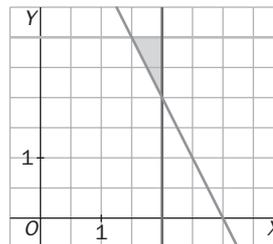
$$\begin{cases} y = 2 \\ y = -2x + 6 \end{cases} \rightarrow y = 2 \rightarrow \text{Vértice } (2, 2)$$

Se dibuja el triángulo en los ejes de coordenadas.

Es un triángulo rectángulo con las siguientes dimensiones.

$$\text{Base} \equiv b = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}. \text{ Altura} \equiv h = 3 - 2 = 1$$

El área del triángulo será: $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1}{4}u^2$.



REFUERZO

Funciones lineales

13.51 Escribe la ecuación de la función lineal paralela a $y = -7x + 1$, y que tiene la misma ordenada en el origen que $y = 4x - \frac{1}{3}$.

$$\begin{cases} \text{Paralela a } y = -7x + 1 \rightarrow m = -7 \\ \text{Misma ordenada en el origen que } y = 4x - \frac{1}{3} \rightarrow n = -\frac{1}{3} \rightarrow y = -7x - \frac{1}{3} \end{cases}$$

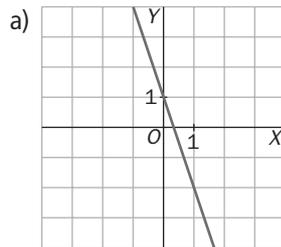
13.52 Halla la ecuación de la función lineal que pasa por los puntos $(-5, 3)$ y $(-1, -1)$.

$$y = mx + n$$

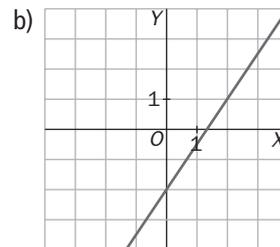
$$\begin{cases} \text{Pasa por } (-5, 3) \rightarrow 3 = -5m + n \\ \text{Pasa por } (-1, -1) \rightarrow -1 = -m + n \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} m = -1 \\ n = -2 \end{matrix} \rightarrow y = -x - 2$$

13.53 Representa las siguientes funciones lineales.

a) $y = -3x + 1$



b) $y = \frac{3}{2}x - 2$



13.54 Determina el valor de m para que la recta $y = (2m - 1)x + 2$ pase por el punto $A(-3, 2)$.

Sustituimos las coordenadas de $A(-3, 2)$ en la ecuación de la recta.

$$2 = (2m - 1) \cdot (-3) + 2 \rightarrow m = \frac{1}{2}$$

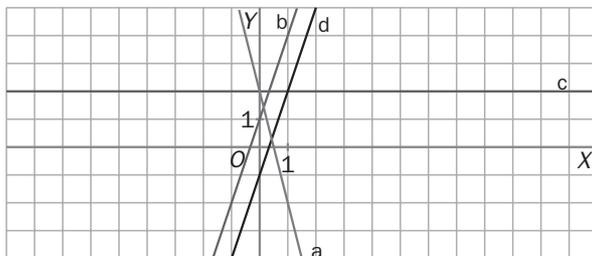
13.55 Relaciona cada gráfica con su ecuación.

a) $y = -4x + 2$

b) $y = 3x + 1$

c) $y = 2$

d) $y = 3x - 1$



13 FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

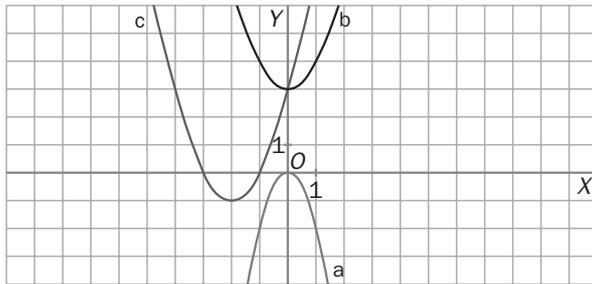
Funciones cuadráticas

13.56 **Relaciona cada parábola con su ecuación.**

a) $y = -2x^2$

b) $y = x^2 + 3$

c) $y = (x + 2)^2 - 1$



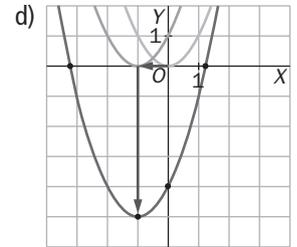
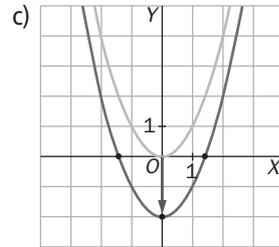
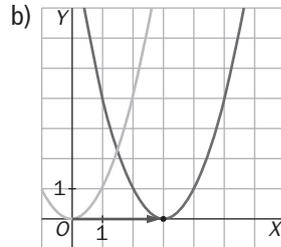
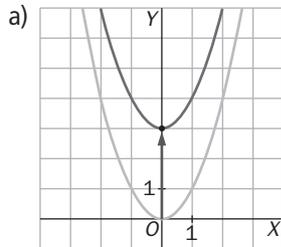
13.57 **Representa, mediante una traslación de la parábola $y = x^2$, la gráfica de cada función.**

a) $y = x^2 + 3$

b) $y = (x - 3)^2$

c) $y = x^2 - 2$

d) $y = (x + 1)^2 - 5$



13.58 **Una parábola pasa por los puntos $(-1, 3)$ y $(-5, 3)$. Escribe la ecuación de su eje.**

La ecuación del eje se puede hallar mediante estos dos puntos, pues son simétricos (tienen la misma imagen 3). Por tanto, el eje pasará por el punto intermedio entre $x = -5$ y $x = -1$.

$$\frac{-5 + (-1)}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \rightarrow \text{Eje } x = -3$$

13 FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

13.59 Representa las siguientes funciones cuadráticas y estudia la gráfica obtenida.

a) $y = -2x^2 + 12x - 10$

b) $y = x^2 - 2x + 4$

c) $y = 2x^2 - 8x + 6$

d) $y = 3x^2 + 1$

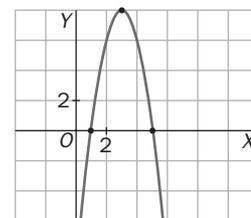
a) Abierta hacia abajo, $a < 0$

Punto de corte con el eje OY: $x = 0 \rightarrow y = -10 \rightarrow (0, -10)$

Hallamos el vértice de la parábola: $x_v = -\frac{b}{2a} = 3 \rightarrow y_v = 8 \rightarrow V(3, 8)$

Puntos de corte con el eje OX: $y = 0 \rightarrow -2x^2 + 12x - 10 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 80}}{-4} = \frac{-12 \pm 8}{-4} = \begin{cases} 1 \\ 5 \end{cases} \rightarrow (1, 0), (5, 0)$$



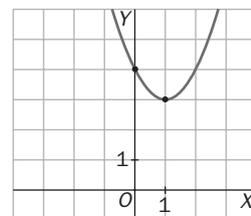
b) Abierta hacia arriba, $a > 0$

Punto de corte con el eje OY: $x = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow (0, 4)$

Hallamos el vértice de la parábola: $x_v = -\frac{b}{2a} = 1 \rightarrow y_v = 3 \rightarrow V(1, 3)$

Puntos de corte con el eje OX: $y = 0 \rightarrow 2x^2 - 2x + 4 = 0$

$$(x - 2)^2 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow (2, 0)$$



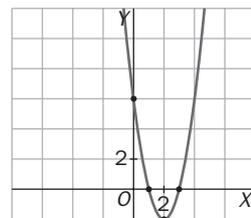
c) Abierta hacia arriba, $a > 0$

Punto de corte con el eje OY: $x = 0 \rightarrow y = 6 \rightarrow (0, 6)$

Hallamos el vértice de la parábola: $x_v = -\frac{b}{2a} = 2 \rightarrow y_v = -2 \rightarrow V(2, -2)$

Puntos de corte con el eje OX: $y = 0 \rightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{4} = \frac{8 \pm 4}{4} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases} \rightarrow (3, 0), (1, 0)$$



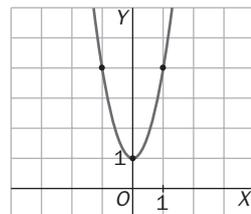
d) Abierta hacia arriba, $a > 0$

Punto de corte con el eje OY: $x = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow (0, 1)$

Hallamos el vértice de la parábola: $x_v = -\frac{b}{2a} = 0 \rightarrow y_v = 1 \rightarrow V(0, 1)$

Puntos de corte con el eje OX: $y = 0 \rightarrow 3x^2 + 1 = 0$

No es posible. La parábola no corta el eje OX.



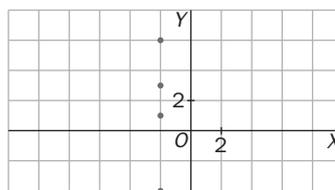
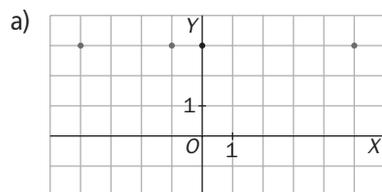
AMPLIACIÓN

13.60 Observa las dos tablas.

x	-1	-4	5	0
y	3	3	3	3

x	-2	-2	-2	-2
y	1	6	3	-4

- Dibuja las gráficas que les corresponden.
- Halla sus ecuaciones.
- ¿Son las dos funciones lineales? Justifica tu respuesta.



- $y = 3, x = -2$
- No, la segunda no es siquiera función porque $f(x)$ no tiene una única solución para $x = -2$.

13.61 Expresa el área de un hexágono regular en función de su lado.

¿Qué tipo de función es?

El hexágono regular está formado por seis triángulos equiláteros. En cada uno de ellos, la altura se expresa así en función del

$$\text{lado } L: h = \frac{\sqrt{3}L}{2}$$

$$\text{El área del hexágono es seis veces la del triángulo: } A = 6 \frac{b \cdot h}{2} = 6 \frac{L \cdot \frac{\sqrt{3}L}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} L^2$$

Es una función cuadrática.

13.62 Averigua la ecuación de la función cuadrática que cumple las siguientes condiciones:

- El eje es $x = -2$.
- El recorrido es el intervalo $[-4, \infty)$.
- La gráfica pasa por el punto $(0, 8)$.

$$\text{Eje } x = -2 \rightarrow \frac{-b}{2a} = -2 \rightarrow b = 4a$$

$$\text{Recorrido } [-4, \infty) \rightarrow f(-2) = -4 \rightarrow -4 = a(-2)^2 + b(-2) + c \rightarrow 4a + -2b + c = -4 \rightarrow -4a + c = -4$$

$$\text{Pasa por } (0, 8) \rightarrow 8 = a0^2 + b0 + c \rightarrow c = 8$$

$$\text{Como } 4a + c = -4, \text{ y } c = 8 \rightarrow a = 3$$

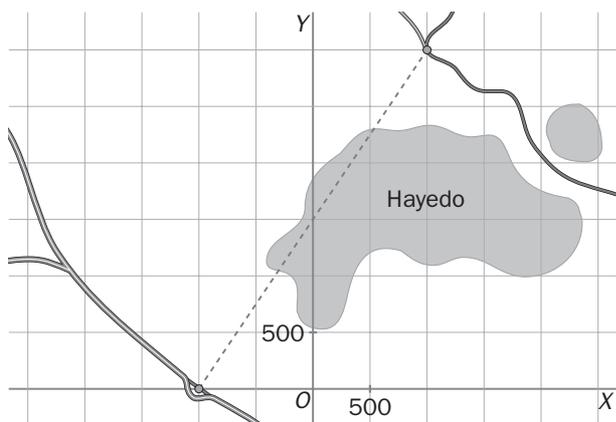
$$\text{Como } b = 4a \rightarrow b = 12$$

$$\text{La ecuación es } y = 3x^2 + 12x + 8$$

13 FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

- 13.63 El proyecto de un tramo de carretera para unir dos localidades tiene un informe de impacto ambiental negativo, por atravesar un hayedo centenario. La decisión que toman los ingenieros es la de realizar un tramo paralelo al proyectado, pero 500 metros más arriba; así se evitaría la tala de árboles.

¿Cuál es la expresión algebraica del nuevo tramo?



Actualmente pasa por $(1\ 000, 3\ 000)$ y $(-1\ 000, 0)$. Hallamos la expresión del tramo actual.

$$\begin{cases} 3\ 000 = 1\ 000\ m + n \\ 0 = -1\ 000\ m + n \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ n = 1\ 500 \end{cases}$$

La expresión del tramo actual es $y = \frac{3}{2}x + 1\ 500$.

El nuevo tramo está 500 metros más arriba y pasa por $(0, 2\ 000)$.

De donde su expresión será: $y = \frac{3}{2}x + 2\ 000$

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

13.64 La cola del supermercado

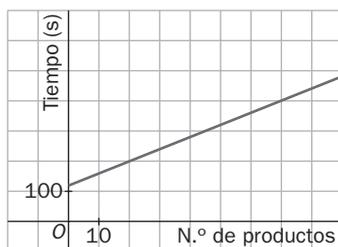
Los gerentes de un conocido supermercado han realizado un estudio sobre el tiempo que tenían que esperar los clientes en la cola de caja.

Llegaron a las siguientes conclusiones:

- El tiempo en marcar todos los productos de un cliente era proporcional al número de productos que llevaba en el carro.
 - El tiempo que tardaba la cajera en marcar un producto era de 4 segundos.
 - Entre cada dos clientes se precisaba de 2 minutos para imprimir y entregar el tique, cobrar el dinero y devolver el cambio.
- a) Calcula el tiempo que tiene que esperar un cliente si delante tiene tres personas con 20, 15 y 25 productos, respectivamente.
- b) Escribe una expresión matemática que sirva para calcular el tiempo que tiene que esperar un cliente si delante tiene una única persona con x productos en su carro. Dibuja la gráfica de la función correspondiente.

a) $(20 + 15 + 25) \cdot 4 + 3 \cdot 120 = 600 \text{ s} = 10 \text{ min}$

b) $f(x) = 4x + 120$



13.65 Variación de la temperatura

La temperatura, en grados centígrados, durante el 21 de mayo en París se puede expresar mediante la

función: $f(x) = \frac{-9x^2 + 200x + 1000}{100}$

Donde x es la hora comprendida en el intervalo $[0, 24]$.

- a) Calcula la temperatura que había al comenzar y al terminar el día.
- b) Calcula la hora en la que hubo mayor temperatura y el valor de esta.
- c) Indica la hora en que hubo menor temperatura y el valor de esta.
- d) ¿Cómo varió la temperatura entre las 12.00 y las 18.00?

a) Al comenzar el día: $f(0) = \frac{1000}{100} = 10 \text{ °C}$

Al acabar el día: $f(24) = \frac{9 \cdot 24^2 + 100 \cdot 24 + 1000}{100} = 6 \text{ °C}$

b) La máxima temperatura se alcanzó en el vértice de la parábola:

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{200}{18} = 11\text{h} \quad f(11) = \frac{9 \cdot 11^2 + 200 \cdot 11 + 1000}{100} = 21 \text{ °C}$$

c) La mínima temperatura se alcanzó al acabar el día con un valor de 6 °C.

d) La variación fue:

$$f(18) - f(12) = \frac{9 \cdot 18^2 + 200 \cdot 18 + 1000}{100} - \frac{9 \cdot 12^2 + 200 \cdot 12 + 1000}{100} = 75,16 - 46,96 = 28,2 \text{ °C}$$

13 FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

AUTOEVALUACIÓN

13.A1 Indica cuáles de las siguientes funciones son lineales y cuáles son cuadráticas.

a) $y = \frac{3x - 1}{2}$

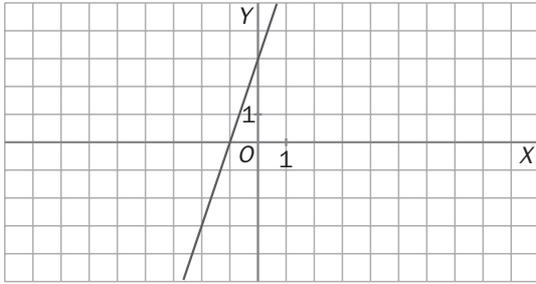
b) $y = \frac{x^2}{3} - x$

c) $x^2 = y - 1$

d) $y = -3x - 1 + x$

Las funciones a y d son lineales, y las b y c, cuadráticas.

13.A2 ¿Cuál es la ecuación de esta gráfica de función?



Pasa por los puntos $(-1, 0)$ y $(0, 3)$, con cuyas coordenadas hallamos m y n :

$$\begin{cases} 0 = -m + n \\ 3 = n \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} m = 3 \\ n = 3 \end{matrix} \rightarrow y = 3x + 3$$

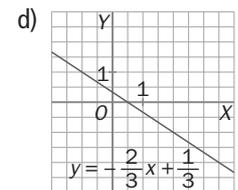
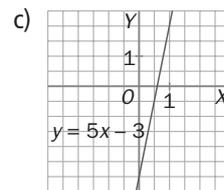
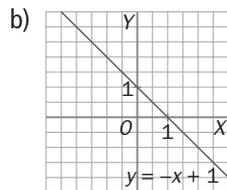
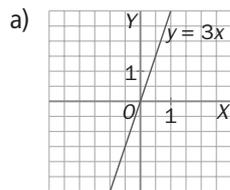
13.A3 Representa las siguientes funciones lineales.

a) $y = 3x$

c) $y = 5x - 3$

b) $y = -x + 1$

d) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$



13.A4 Halla la ecuación de la función en cada caso.

a) Pasa por los puntos $(-3, 0)$ y $(0, -1)$.

b) Es paralela a $y = \frac{-3x + 1}{4}$, y corta al eje de ordenadas en el -4 .

a) Con las coordenadas de los puntos $(-3, 0)$ y $(0, -1)$ hallamos m y n para $y = mx + n$:

$$\begin{cases} 0 = -3m + n \\ -1 = n \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} m = -\frac{1}{3} \\ n = -1 \end{matrix} \rightarrow y = -\frac{1}{3}x - 1$$

b) Si es paralela a $y = \frac{-3x + 1}{4}$, entonces tiene pendiente: $m = -\frac{3}{4}$

Con este dato, solo queda hallar n , y sabiendo que la recta pasa por el punto $(0, -4)$: $n = -4$

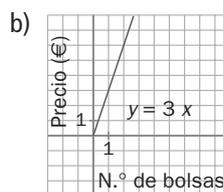
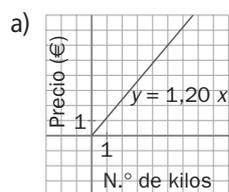
$$y = -\frac{3}{4}x - 4$$

13 FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

13.A5 Una frutería coloca en el escaparate una oferta de naranjas por kilos y otra por bolsas.



- a) Representa la gráfica de la función que relaciona el número de kilos de naranjas comprados y el precio de la compra.
- b) Dibuja la gráfica de la función que relaciona el número de bolsas de naranjas compradas y el precio de la compra.



13.A6 Halla el vértice y la ecuación del eje de cada una de estas parábolas.

a) $y = 2x^2 - 6x - 1$

c) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$

b) $y = -3x^2 + 2x + 9$

d) $y = 2x^2 + 5$

a) $x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}; y_v = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) - 1 = -\frac{11}{2} \rightarrow V\left(\frac{3}{2}, -\frac{11}{2}\right)$. Eje $x = \frac{3}{2}$

b) $x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}; y_v = -3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + 9 = \frac{28}{3} \rightarrow V\left(\frac{1}{3}, \frac{28}{3}\right)$. Eje $x = \frac{1}{3}$

c) $x_v = \frac{b}{2a} = \frac{3}{1} = 3; y_v = \frac{1}{2} \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 1 = -\frac{7}{2} \rightarrow V\left(3, -\frac{7}{2}\right)$. Eje $x = 3$

d) $x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{0}{2} = 0; y_v = 2 \cdot 0^2 + 5 = 5 \rightarrow V(0, 5)$. Eje $x = 0$

13.A7 Determina la ecuación de la parábola que resulta de trasladar el vértice de la parábola $y = x^2$ al punto $(2, 1)$.

$$y = ax^2 + bx + c$$

Sabemos que $a = 1$ porque la parábola buscada es una traslación de $y = x^2$.

$$x_v = -\frac{b}{2a} = 2 \rightarrow b = -4$$

$$y_v = 2^2 - 4 \cdot 2 + c = 1 \rightarrow c = 5$$

$$y = x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 5$$

13 FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

13.A8 Representa la parábola $y = 2x^2 + 12x + 16$, y estudia la gráfica obtenida.

Abierta hacia arriba, $a > 0$

Punto de corte con el eje OY:

$$x = 0 \rightarrow y = 16 \rightarrow (0, 16)$$

Hallamos el vértice de la parábola:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -3 \rightarrow y_v = -2 \rightarrow V(-3, -2)$$

Puntos de corte con el eje OX:

$$y = 0 \rightarrow 2x^2 + 12x + 16 = 0 \rightarrow x = -2 \text{ o } x = -4 \rightarrow (-2, 0), (-4, 0)$$

