IES Santiago Ramón y Cajal. Matemáticas.

Funciones Lineal, Cuadrática y de Proporcionalidad Inversa.

Teoría.

Índice:

1.- Función Lineal. Caracterización. Elementos.

El tipo de funciones más sencillas son las lineales, es decir, las que tienen la forma

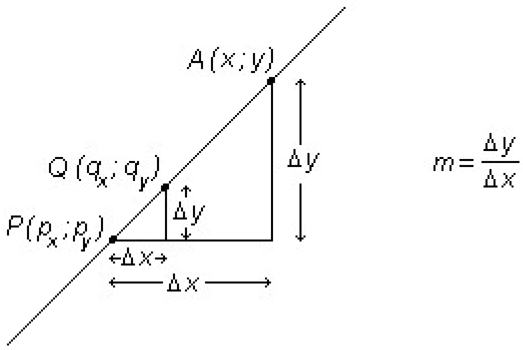
$$f(x) = mx + b$$

Las funciones lineales tienen dos parámetros: la *pendiente*, m, y la *ordenada en el origen*, b. Además de estos dos parámetros, hay otras cosas interesantes, como los puntos de corte, el crecimiento o el signo.

Pendiente: La pendiente es la inclinación de la recta, se puede calcular como:

- $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Para esto hace falta saber dos puntos de la recta $P\lfloor p_x ; p_y \rfloor$ y $Q\lfloor q_x ; q_y \rfloor$. Entonces

  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{p_y - q_y}{p_x - q_x}$ ó $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{q_y - p_y}{q_x - p_x}$



Da igual que par de puntos tomemos, siempre la proporción $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es la misma y es igual a m.

- La coordenada de x cuando y está despejada.
- Las unidades que la recta sube (si m es positiva) o baja (si m es negativa) en el eje OY por cada unidad que avanza a lo largo del eje OX.

Dos rectas paralelas tienen la misma inclinación y, por tanto, la misma pendiente.

$$m_{//} = m$$

Aunque necesitamos conocimientos de vectores para hablar de perpendicularidad, diremos que cuando dos rectas son perpendiculares entonces sus pendientes satisfacen:

$$m_{\perp} = -\frac{1}{m}$$

Ordenada en el origen: La ordenada en el origen se puede ver como:

- La altura de la recta cuando $x = 0$,
- El punto de corte de la recta con el eje de ordenadas (eje OY),
- El término independiente en la expresión algebraica $y = mx + b$
- Las condiciones iniciales (en problemas de física, química, etc).

Puntos de corte con los ejes: Los puntos de corte con los ejes de coordenada de cualquier función siempre se calculan de la misma manera.

- Eje de abscisas. Son los puntos de corte con el eje OX, por tanto $y = 0$, es decir, son los puntos de la gráfica donde la altura es 0. Hay que hallar los valores de x que tiene una altura 0. Se iguala la expresión a 0 y se despeja x.
- Eje de ordenadas. Son los puntos de corte con el eje OY, por tanto $x = 0$, es decir, es el punto del plano $(0; f(0))$. Tan solo hay que sustituir $x = 0$ en la expresión y hallar la altura.

Signo: Para hallar el signo de una función, primero se hallan los puntos de corte y, después, se hace un dibujo aproximado de la gráfica, si la función es sencilla o se hace una tabla de signos, si la función es más complicada.

Con la gráfica, la función es positiva donde la altura esté por encima del eje OX y es negativa donde esté por debajo.

Con una tabla de signos, el signo sale directamente de la tabla. Una vez hecha la tabla se debe escribir el signo como intervalos.

Ejemplo:

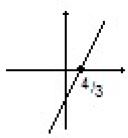
Hallar el signo de la función lineal $f(x) = 3x - 4$.

Solución:

Se hallar el punto de corte con el eje OX: $x = \frac{4}{3}$. Se observa si la pendiente es positiva o negativa para saber si la recta sube (crece) o baja (decrece): $m = 3$, luego sube (crece).

Se hace un dibujo y se elabora una tabla de signos con la expresión $3x - 4$

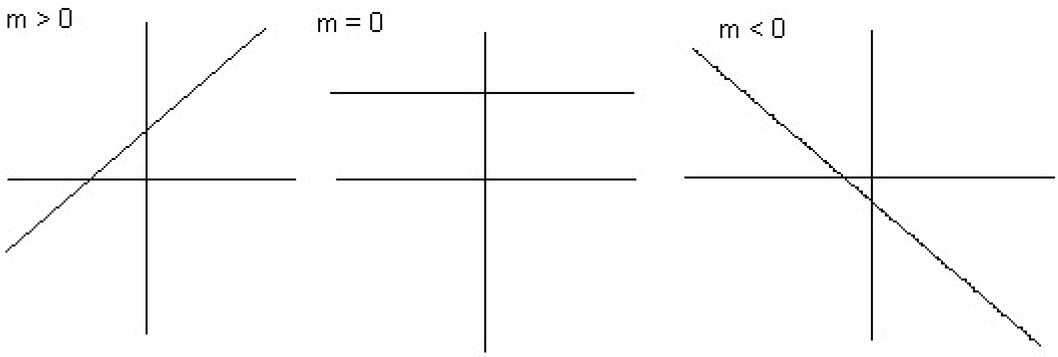
$4/3$		$4/3$	
	$3x - 4$	−	+



Y finalmente se expresa el signo por intervalos : f es positiva en $\left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$ y negativa en $\left(-\infty; \frac{4}{3}\right)$.

<u>Crecimiento</u>: El crecimiento en las funciones lineales viene dado por la pendiente. El crecimiento se mira de izquierda a derecha.

- Si $m > 0$, positiva, la gráfica de la función es una recta creciente.
- Si $m = 0$, cero, la gráfica de la función es una recta horizontal.
- Si $m < 0$, negativa, la gráfica de la función es una recta decreciente.



<u>Ejemplo:</u> Hallar los puntos de corte con los ejes, el signo y el crecimiento de la función lineal $f(x) = \dfrac{x-3}{2}$

Solución:

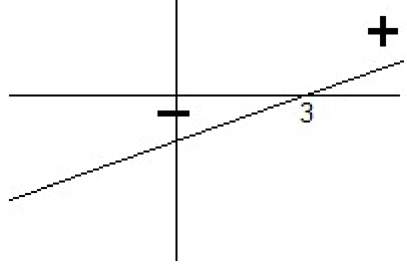
Puntos de corte: eje OX: $y = 0 \quad \rightarrow \quad \dfrac{x-3}{2} = 0 \quad \Big/ \quad M \cdot 2$

$x - 3 = 0 \quad \Big/ \quad M + 3$

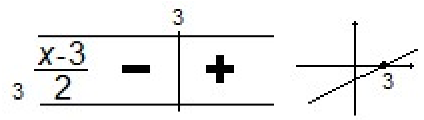
$x = 3$ El punto de corte es $(3;0)$

eje OY: $x = 0 \quad \rightarrow \quad f(0) = \dfrac{0-3}{2} = -\dfrac{3}{2}$. El punto de corte es $\left(0; -\frac{3}{2}\right)$.

Signo: Como la función es muy sencilla, los puntos de corte y una gráfica aproximada basta para ver el signo. Corta al eje OX en $x = 3$ y $m = \frac{1}{2} > 0$ así que la recta es creciente (desde la izquierda hacia la derecha, sube). Una gráfica aproximada es



De la gráfica se puede ver que las alturas son negativas cuando $x < 3$ y las alturas son positivas cuando $x > 3$. La tabla de signos es



f es positiva para $x \in (3; +\infty)$ y negativa para $x \in (-\infty; 3)$.

Crecimiento: Como ya hemos dicho, al ser $m = \frac{1}{2} > 0$, la gráfica de la función es una recta creciente, es decir, *f* es creciente en todo **R**.

<u>*Ejemplo:*</u>

Hallar la función lineal cuya gráfica pasa por los puntos $A[-2;2]$ y $B[1;3]$.

Solución:

Una función lineal es de la forma $f(x) = mx + b$. Tenemos que hallar m y b. Sabemos que la gráfica pasa por los puntos A y B. Esto quiere decir que $f(-2) = 2$ y $f(1) = 3$. Por tanto, al sustituir x por -2 se obtiene 2 y al sustituir x por 1 se obtiene 3.

$f(-2) = 2 \quad \rightarrow \quad 2 = -2m + b$

$f(1) = 3 \quad \rightarrow \quad 3 = \quad m + b$

Restando, queda $-1 = -3m$, de donde $m = \frac{1}{3}$.

Sustituyendo en la segunda ecuación tenemos $3 = \frac{1}{3} + b \quad \rightarrow \quad b = \frac{8}{3}$

$\boxed{\text{Solución: } f(x) = \frac{x+8}{3}}$.

<u>*Ejemplo:*</u>

Hallar la expresión de una función lineal que sea perpendicular a la recta de ecuación $r: 2x - 3y + 2 = 0$ y tenga la misma ordenada en el origen que la recta dada.

Solución:

Para encontrar la función $f(x) = mx + b$ hay que hallar m y b.

Sabemos que la gráfica de *f* es una recta perpendicular a *r*. Así que su pendiente es la opuesta de la inversa de la pendiente de *r*.

$2x - 3y + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad y = \frac{2x+2}{3} \quad \rightarrow \quad m_r = \frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad m_\perp = -\frac{3}{2}$

Para hallar la ordenada en el origen, sabemos que ésta es la misma que la de *r*, así que es $b = b_r = \frac{2}{3}$.

$\boxed{\text{Solución: } f(x) = -\frac{3x}{2} + \frac{2}{3} = \frac{-9x+4}{6}}$.

2.- FUNCIÓN CUADRÁTICA. ELEMENTOS.

Las funciones cuadráticas son aquellas cuya expresión es un polinomio de segundo grado, es decir,

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Las ecuaciones cuadráticas presentan 3 parámetros. Los más interesantes son el coeficiente de x^2, a, y el término independiente, c. La gráfica de la función cuadrática se llama *parábola* y es una de las 4 cónicas. Las características interesantes de la función cuadrática son: los puntos de corte, la curvatura, el signo, el vértice y la monotonía (el crecimiento y el decrecimiento).

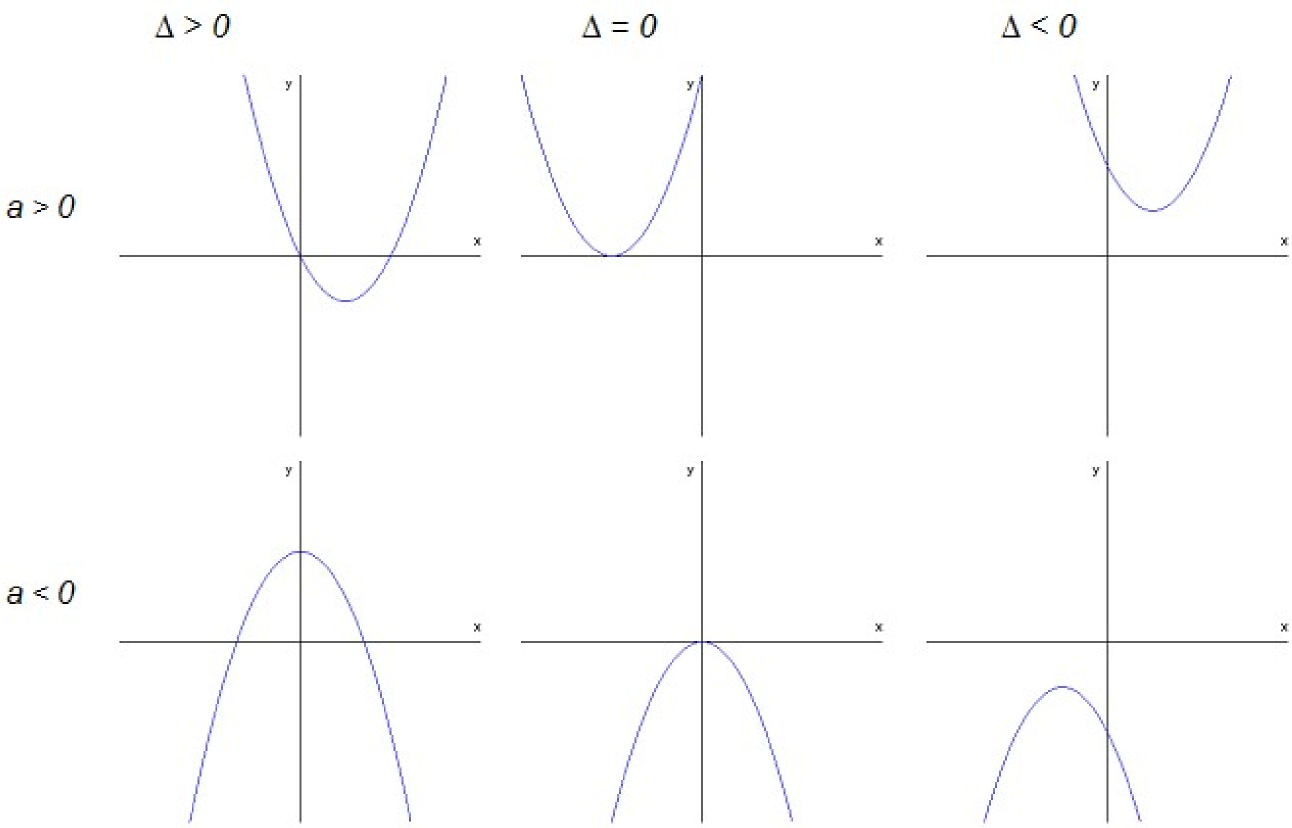
Puntos de corte: Como con cualquier función, los puntos de corte se calculan:

- Con el eje de abscisas (eje OX). Son aquellos puntos donde la altura vale 0, es decir, la respuesta al sustituir x por un número es 0 y se trata de averiguar qué número hemos sustituido. Así que resolvemos la ecuación $f(x) = 0 \quad \rightarrow \quad ax^2 + bx + c = 0$. Esta ecuación se resuelve en general con la fórmula cuadrática, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, aunque los casos en que $b = 0$ ó $c = 0$ son más fáciles de resolver directamente despejando o sacando x factor común.
- Con el eje de ordenadas (eje OY). El es punto $[0; f(0)]$, es decir, $[0; c]$.

La fórmula cuadrática tiene una raíz. La expresión que hay dentro se llama discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si el discriminante es negativo, la raíz no se puede hacer. Esto significa que no hay punto de corte con el eje OX y la parábola está siempre por encima o por debajo del eje.
- Si el discriminante es 0, la raíz es 0 y el signo $\pm$ no sirve. Es decir hay un único punto de corte con el eje.
- Si el discriminante es positivo, la raíz se puede calcular, sale un número positivo y hay dos soluciones, una con el signo + y otra con el $-$, de donde hay dos puntos de corte.

Curvatura: Igual que en las rectas la pendiente indica si la recta "sube" o "baja", en las funciones cuadráticas, es el coeficiente de x^2 el que indica algo parecido llamado curvatura. La gráfica está doblada, pues no es recta. Lo poco o mucho que esté doblada se denomina curvatura y se mide con el radio de curvatura, que no estudiaremos aquí. Nosotros sólo nos interesaremos por saber si la parábola tiene los brazos curvados hacia la parte positiva del eje OY, cuando $a > 0$, o hacia la parte negativa de éste, cuando $a < 0$. El caso en el que $a = 0$ no es realmente una parábola sino una recta.



Signo: El signo depende de los puntos de corte y de la curvatura. Como se puede ver en los dibujos anteriores, si $a > 0$ el signo es positivo en la izquierda, negativo entre los puntos de corte y positivo en la derecha. Si $a < 0$ es al contrario. Pero todo dependerá de cuántos puntos de corte haya.

Vértice: El vértice es el punto de altura máxima de la parábola cuando ésta tiene curvatura negativa y el punto de altura mínima cuando la parábola tiene curvatura positiva. Sus coordenadas son $V[x_v; y_v]$ y se calculan de alguna de las siguientes formas:

- $x_v = \dfrac{-b}{2a}$, $y_v = f(x_v)$
- x_v es el punto medio de los puntos de corte.
- x_v es el punto donde la *derivada* es cero (cuando se estudien derivadas).

En el vértice la monotonía cambia. La parábola deja de crecer y comienza a decrecer cuando $a < 0$ y al contrario cuando $a > 0$.

Monotonía (Crecimiento y decrecimiento): Cuando $a < 0$, la función crece (su gráfica aumenta) y una vez que llega al vértice comienza a decrecer (la gráfica baja). Cuando $a > 0$ lo hace justo al contrario.

Simetría: Las parábolas tienen una simetría axial respecto de la recta vertical que pasa por el vértice, es decir, la recta de ecuación $0y + x - x_v = 0$. Se escribe más fácilmente $x = x_v$.

Gráfica: Para esbozar la parábola de una función cuadrática es necesario calcular los puntos de corte, el vértice y saber cómo es su curvatura. Una vez hecho esto, se elabora una tabla de valores con puntos que estén alrededor del vértice. Al elaborar la tabla de valores, se puede utilizar la simetría respecto del vértice. Así, puntos que estén a la misma distancia del vértice tendrán la misma altura. Cuando x_v sea una fracción con denominador distinto de 2, se complica y es mejor no utilizar simetría.

Ejemplo:

Estudiar las características de la función cuadrática $f(x) = x^2 + 2x - 3$ y dibujar su parábola.

Solución:

– Puntos de corte:

eje OX: $y = 0$, $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 4\cdot 3}}{2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} =$

$$\frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

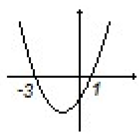
eje OY: $x = 0$, $y = f(0) = 0^2 + 2\cdot 0 - 3 = -3$

Luego los puntos de corte son $[1;0]$, $[-3;0]$ y $[0;-3]$.

– Curvatura: Se mira el signo de a, el coeficiente de x^2. Como $a = 1 > 0$ la parábola está curvada hacia el eje positivo del eje OY.

– Signo:

1 -3		-3		1	
x^2+2x-3	+		−		+



Luego f es positiva en $(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$ y negativa en $(-3;1)$.

– Vértice: Hallamos la coordenada V_x con la fórmula del vértice y la coordenada V_y con la expresión de la función. $V_x = -\frac{b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1$. También se puede hacer como el punto medio de los puntos de corte: $V_x = \frac{-3+1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$. Lo hallamos por el método que prefiramos y después $V_y = f(V_x) = (-1)^2 + 2\cdot(-1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$, luego $V[-1;-4]$ es el vértice.

– Monotonía: Como la parábola está curvada hacia la parte positiva del eje OY, primero baja (decrece) y después del vértice sube (crece). Así que f es decreciente en $(-\infty;-1)$ y creciente en $(1;+\infty)$.

– Simetría: La parábola tiene una simetría axial de eje la recta vertical $x = -1$.

– Gráfica: Hacemos una tabla de valores *alrededor* del vértice. Ponemos el vértice y los puntos de corte.

		corte OX		V	corte OY	corte OX	
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y		0		-4	-3	0	

Ahora completamos la tabla intentando utilizar la simetría. Primero la parte de la derecha del vértice, que está más llena.

$x = 2 \to y = 2^2 + 2\cdot 2 - 3 = 4 + 4 - 3 = 5$

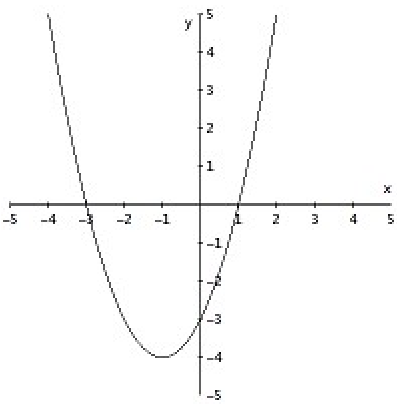
Ahora, por simetría tenemos que:

en $x = -2$ vale lo mismo que en $x = 0$, es decir, $y = -3$

en $x = 2$, que está 3 unidades alejado del vértice, vale lo mismo que en $x = -4$, es decir, $y = 5$.

				V			
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	5	0	-3	-4	-3	0	5

Y ya podemos dibujar la gráfica:



Ejemplo:

Hallar una función cuadrática que tenga puntos de corte en $x=-1$, $x=3$ y que la altura en su vértice sea $y_v = 1$.

Solución:

Sabemos que una función cuadrática es de la forma $f(x)=ax^2+bx+c$. Hay que averiguar qué números son $a,b,c\in\mathbf{R}$. Sabiendo los puntos de corte x_1 y x_2 la función también se puede escribir como $f(x)=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$. En nuestro caso es $f(x)=a\cdot(x+1)\cdot(x-3)$.

Como el vértice está en el punto medio de los puntos de corte, sabemos que $V_x=\frac{-1+3}{2}=1$ y como $V_y=f(V_x)$, podemos sustituir las coordenadas del vértice en la función y hallar a.

$V[1;1] \quad\rightarrow\quad 1=a\cdot(1+1)\cdot(1-3) \quad\rightarrow\quad 1=-4a \quad\rightarrow\quad a=-\frac{1}{4}$

Luego $f(x)=-\frac{1}{4}\cdot(x+1)\cdot(x-3)=-\frac{1}{4}(x^2-2x-3)=-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+\frac{3}{4}=\frac{-x^2+2x+3}{4}$

$\boxed{\text{Solución: } f(x)=\frac{-x^2+2x+3}{4}}$.

<u>Ejemplo:</u>

Hallar la parábola que pasa por los puntos $A[-1;-2]$, $B[0;1]$ y $C[1;2]$ (Hay que resolver un SEL)

Solución:

Sabemos que una función cuadrática es de la forma $f(x)=ax^2+bx+c$. Hay que averiguar qué números son $a,b,c\in\mathbf{R}$. Cuando se conoce un punto de la función, podemos sustituir sus coordenadas en la expresión y se obtiene una ecuación. Como hay tres incógnitas y tres datos, tendremos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Los métodos que tenemos para resolverlos son un poco *brutos*, pero cuando sepamos determinantes será más rápido.

$A[-1;-2] \quad\rightarrow\quad -2=a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c \quad\rightarrow\quad -2=a-b+c$

$B[0;1] \quad\rightarrow\quad 1=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c \quad\rightarrow\quad 1=c$

$C[1;2] \quad\rightarrow\quad 2=a\cdot 1^2+b\cdot 1+c \quad\rightarrow 2=a+b+c$

El sistema es

$$\begin{cases} a-b+c=-2 \\ c=1 \\ a+b+c=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a-b+1=-2 \\ a+b+1=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a-b=-3 \\ a+b=1 \end{cases}$$

Sumando las dos ecuaciones, queda

$2a=-2 \quad\rightarrow\quad a=-1$

y sustituyendo en la segunda ecuación, tenemos que $a+b=1 \quad\rightarrow\quad -1+b=1 \quad\rightarrow\quad b=2$

$\boxed{\text{Solución: } f(x) = x^2 + 2x + 1}$.

3.- FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD INVERSA.

Dos magnitudes son *directamente proporcionales* cuando al aumentar una por un factor multiplicativo, la otra aumenta siempre con el mismo factor. Es decir, si una aumenta el doble, entonces la otra también aumenta el doble. Este tipo de magnitudes tiene una relación de la forma

$$M_1 = \alpha \cdot M_2$$

donde α es un número cualquiera. Por tanto, mantienen una relación lineal y sin término independiente.

De forma análoga, dos magnitudes son *inversamente proporcionales* cuando al aumentar una por un factor multiplicativo, entonces la otra disminuye por ese mismo factor. Es decir, si una aumenta el doble, entonces la otra disminuye la a la mitad. Este tipo de magnitudes tiene una relación funcional de la forma

$$M_1 = \alpha \frac{1}{M_2}$$

o equivalentemente

$$M_1 \cdot M_2 = \alpha$$

donde α es un número cualquiera.

Ejemplo: En un movimiento rectilíneo uniforme, la fórmula que relaciona la velocidad, el espacio recorrido y el tiempo transcurrido es

$$v = \frac{s}{t}$$

hay tres magnitudes: la velocidad v, el espacio recorrido s, y el tiempo transcurrido t.

Esta nueva relación funcional se llama *de proporción inversa*. La forma general es

$$f(x) = \frac{k}{x}$$

La gráfica es también una de las 4 cónicas. En este caso la *hipérbola*. Sus características principales son:

Dominio: Es el conjunto de los números reales que podemos sustituir por x y las operaciones se pueden calcular. Ahora, al haber una fracción, no podemos sustituir x por 0. Así que el dominio es $\mathrm{Dom}(f) = \mathbf{R} - \{0\}$.

Asíntotas: Las asíntotas son rectas bien verticales, bien horizontales, bien inclinadas (oblicuas), a las que la gráfica de la función se acerca cada vez más. La función $f(x)=\frac{k}{x}$ tiene dos asíntotas

Vertical: $x=0$

Horizontal: $y=0$

es decir, los ejes de coordenadas.

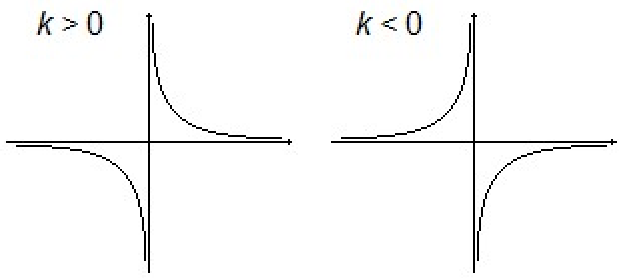
Simetría: La función $f(x)=\frac{k}{x}$ tiene simetría puntual respecto del punto donde se cortan las asíntotas, es decir, $[0;0]$. También tiene una simetría axial respecto de la recta $y=x$, es decir, la bisectriz del primer cuadrante. Esto nos permitirá dibujar muchos puntos a partir de sólo dos o tres que obtendremos en una tabla de valores.

Puntos de corte con los ejes: No hay puntos de corte.

Con el eje OY no hay porque no se puede sustituir x por 0. Esto significa que la gráfica no pasa por encima ni por debajo de $x=0$.

Con el eje OX tampoco hay porque da igual qué sustituyamos en x, la fracción $\frac{k}{x}$ nunca es 0.

Signo: El signo de una fracción es positivo cuando numerador y denominador tienen el mismo signo y es negativo cuando numerador y denominador tienen signos contrarios. El signo de la función $f(x)=\frac{k}{x}$ depende del signo de k.



Monotonía: La función $f(x)=\frac{k}{x}$ tiene dos ramas y las dos tienen la misma monotonía. Cuando $k>0$ f es creciente en $(-\infty;0)$ y en $(0;+\infty)$ y si $k<0$ es decreciente en $(-\infty;0)$ y en $(0;+\infty)$.

Curvatura: La curvatura de la función $f(x)=\frac{k}{x}$ es, cuando $k>0$, negativa en $(-\infty;0)$ y positiva en $(0;+\infty)$ y al contrario cuando $k<0$.

<u>Gráfica:</u> La gráfica de la función $f(x)=\frac{k}{x}$ es una hipérbola, como ya hemos dicho. Para dibujarla, se dibujan primero las asíntotas vertical y horizontal. Después se hallan dos puntos, que siempre son fáciles, $x=1$, que tiene altura k, y $x=k$, que tiene altura 1. Finalmente, se utiliza la simetría para dibujar el resto de la gráfica.

<u>Ejemplo:</u> Estudiar y dibujar la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$

Solución:

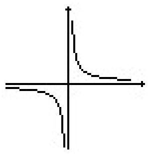
Dominio: Podemos sustituir en x cualquier número menos 0, por tanto el dominio es $\mathbf{R}-\{0\}$.

Asíntotas: vertical $\rightarrow$ $x=0$ y horizontal $\rightarrow$ $x=0$.

Puntos de corte: No hay

Simetría: puntual, respecto del punto $[0;0]$ y axial respecto de la recta $y=x$.

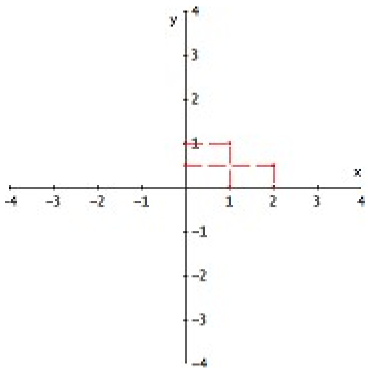
Signo, monotonía y curvatura: Como $k=1>0$, la gráfica tiene una pinta como:



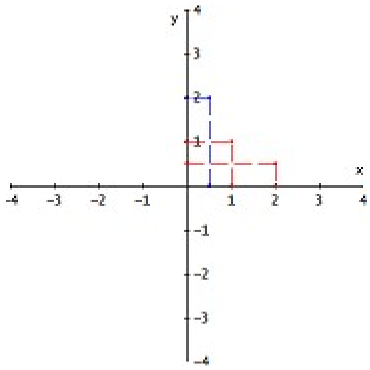
Intervalo:	Signo:	Monotonía:	Curvatura:
$(-\infty;0)$	negativo	decreciente	negativa
$(0;+\infty)$	positivo	decreciente	positiva

Gráfica: En una tabla de valores ponemos los puntos $x=1$ cuya y es $y=f(1)=\frac{1}{1}=1$. En este caso, el otro punto sugerido es $x=k=1$, es decir, el mismo. Así que debemos tomar un segundo punto adicional, para tener mejor idea. Por ejemplo $x=2$, cuya y es $y=f(2)=\frac{1}{2}$.

Dibujamos estos dos puntos:

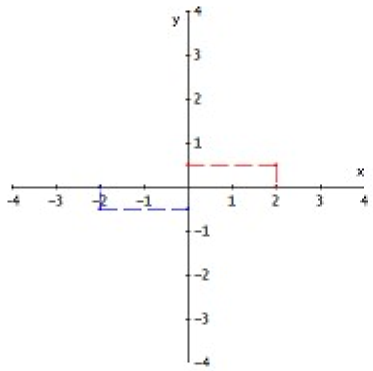


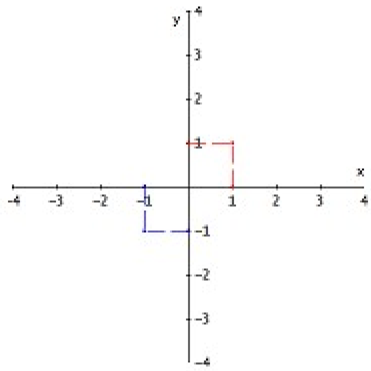
Utilizamos la simetría axial para encontrar más. La simetría respecto de la recta $y=x$ intercambia x con y. El punto $[2;\frac{1}{2}]$ se transforma en el punto $[\frac{1}{2};2]$ y el punto $[1;1]$ se transforma en sí mismo.

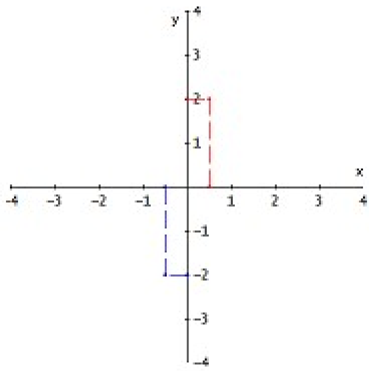


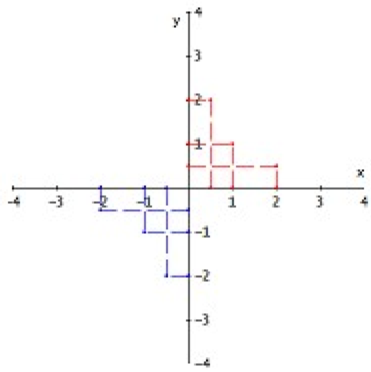
Ahora utilizamos la transformación puntual. Respecto del $[0;0]$ es muy fácil, puesto que esta transformación sólo cambia los signos de las dos coordenadas.

El punto $\left[2;\frac{1}{2}\right]$ se transforma en el punto $\left[-2;-\frac{1}{2}\right]$. El punto $[1;1]$ se transforma en el punto $[-1;-1]$. Y el punto $\left[\frac{1}{2};2\right]$ se transforma en el punto $\left[-\frac{1}{2};-2\right]$.

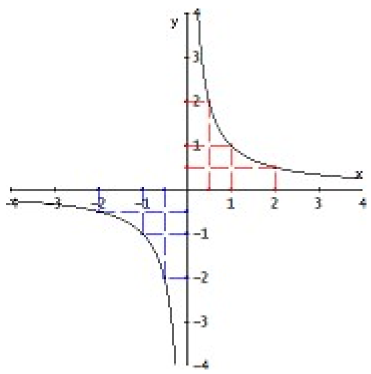








Ya tenemos 6 puntos en total. Teniendo en cuenta que los ejes de coordenadas son las asíntotas, dibujamos la gráfica:



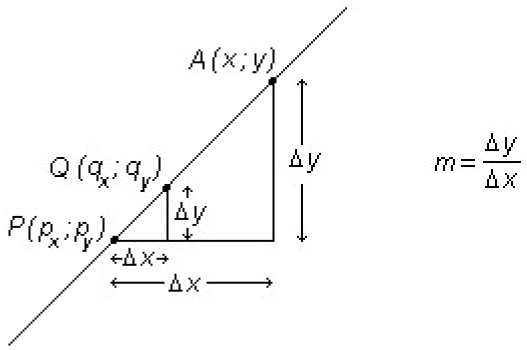
4.- ANEXO I: LA FUNCIÓN LINEAL Y SU GRÁFICA.

Teorema:

Las funciones lineales son aquellas cuya gráfica es una línea recta.

Demostración:

En efecto, consideremos los puntos de una recta r, que no sea vertical. Tomemos dos puntos cualesquiera de la recta, $P(p_x; p_y)$ y $Q(q_x; q_y)$. Entonces, un punto cualquiera del plano $A(x; y)$ está en la recta si, y sólo si, está alineado con P y Q,



es decir, los triángulos rectángulos que se pueden formar con lados paralelos a los ejes de coordenadas (como en el dibujo) son triángulos semejantes. Por tanto, el cociente de lados homólogos es el mismo. A ese cociente se le llama pendiente de la recta, m.

Utilizando las coordenadas de los puntos, la condición de estar alineados se traduce a que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{constante} = \frac{p_y - q_y}{p_x - q_x} = \frac{p_y - y}{p_x - x}$$

$\frac{p_y - q_y}{p_x - q_x} = \frac{p_y - y}{p_x - x}$ / $M \cdot (p_x - p_y) \cdot (p_x - x)$

$(p_y - q_y) \cdot (p_x - x) = (p_x - q_x) \cdot (p_y - y)$ / Multiplicamos los paréntesis donde están x e y.

$p_x \cdot (p_y - q_y) - x \cdot (p_y - q_y) = p_y \cdot (p_x - q_x) - y \cdot (p_x - q_x)$ / $M - p_y \cdot (p_x - q_x)$

$-x \cdot (p_y - q_y) + p_x \cdot (p_y - q_y) - p_y \cdot (p_x - q_x) = -y \cdot (p_x - q_x)$ / $M \cdot (-1)$

$x \cdot (p_y - q_y) - p_x \cdot (p_y - q_y) + p_y \cdot (p_x - q_x) = y \cdot (p_x - q_x)$ / Ordenamos la ecuación

$y \cdot (p_x - q_x) = x \cdot (p_y - q_y) + p_x \cdot q_y - p_y \cdot q_y$ / $M : (p_x - q_x)$

$y = x \cdot \frac{p_y - q_y}{p_x - q_x} + \frac{p_x \cdot q_y - p_y \cdot q_y}{p_x - q_x}$ / A $\frac{p_y - q_y}{p_x - q_x}$ le habíamos llamado pendiente, m.

$y = mx + b$

donde b es el número que salga de los cálculos $\frac{p_x q_y - p_y q_x}{p_x - q_x}$ y al que luego daremos un sentido más visual.

Por tanto, lo que hemos demostrado es que si $A(x;y)$ es un punto del plano que está alineado con P y con Q, es decir, está en la misma recta que ellos, entonces las coordenadas de A satisfacen la ecuación $y = mx + b$, donde m y b son números que dependen de P y Q.

Falta por ver el recíproco, es decir, si consideramos el conjunto de todos los puntos del plano $A(x;y)$ que satisfacen una ecuación de la forma $y = mx + b$, entonces esos puntos están alineados. Dicho de otra forma, la gráfica de la función $y = mx + b$ es una línea recta.

En efecto, tomemos dos puntos cualesquiera P y Q que satisfagan la ecuación. Veremos que cualquier otro punto que también satisfaga la ecuación, tiene que estar alineado con P y con Q.

$P(p_x;p_y)$ con $p_y = m \cdot p_x + b$

$Q(q_x;q_y)$ con $q_y = m \cdot q_x + b$

Sea $A(a_x;a_y)$ un punto que cumple la ecuación, es decir, $a_y = m \cdot a_x + b$.

Tenemos que ver que la inclinación, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, es igual tomando los puntos A y P que la que sale tomando los puntos P y Q, es decir, es una inclinación constante.

Tomando P y Q tenemos: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{p_y - q_y}{p_x - q_x} = \frac{(m \cdot p_x + b) - (m \cdot q_x + b)}{p_x - q_x} = \frac{m \cdot (p_x - q_x)}{p_x - q_x} = m$

Tomando P y A tenemos: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{p_y - a_y}{p_x - a_x} = \frac{(m \cdot p_x + b) - (m \cdot a_x + b)}{p_x - a_x} = \frac{m \cdot (p_x - a_x)}{p_x - a_x} = m$

Así que los puntos A, P y Q están alineados. De aquí se deduce que todos los puntos de la gráfica de la función $y = mx + b$ están alineados con P y Q, y por tanto, esta gráfica es la de una recta.

☺

<u>Observación:</u> Este teorema necesita que la recta no sea vertical. Por un lado, las rectas verticales no son la gráfica de ninguna función, pues para un mismo valor de x, habría infinitos valores de y. Por otro lado, una recta vertical tiene pendiente "infinita", o simplemente no tiene, pues en la expresión $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ el denominador se anula, al ser la coordenada x siempre el mismo número.