Ejercicios resueltos

2.1-1 Realiza la suma de los siguientes polinomios:

a) $p(x) = x^5 + x^4 - 4x^3 + 6x^2 + x - 7$
$q(x) = x^6 + 2x^4 + x^2 + 5$

b) $p(x) = 9x^5 - 2x^4 + 12x^3 + x^2 - x + 10$
$q(x) = -x^5 + 5x^4 - 12x^3 - 2x^2 + x - 15$

c) $p(x) = -5x^4 + 6x^3 - 2x^2 + 3x + 8$
$q(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4$

d) $p(x) = 3x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 14$
$q(x) = 6x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 3x$
$r(x) = 2x + 14$

e) $p(x) = -x^6 + 4x^5 - 2x^4 - 7x^3 + 6x^2 + x - 2$
$q(x) = 3x^6 + 2x^5 - x^3 + 2x^2 - 2x + 5$
$r(x) = -2x^6 - 6x^5 + 2x^4 + 8x^3 - 8x^2 + x - 3$

f) $p(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 7x + 11$
$q(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^3 - x^2 - 7$
$r(x) = -3x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 + 3x - 4$

Solución

a) $\left.\begin{array}{l} p(x) = x^5 + x^4 - 4x^3 + 6x^2 + x - 7 \\ q(x) = x^6 + 2x^4 + x^2 + 5 \end{array}\right\}$

$p(x) + q(x) = x^6 + x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 7x^2 + x - 2$

b) $\left.\begin{array}{l} p(x) = 9x^5 - 2x^4 + 12x^3 + x^2 - x + 10 \\ q(x) = -x^5 + 5x^4 - 12x^3 - 2x^2 + x - 15 \end{array}\right\}$

$p(x) + q(x) = 8x^5 + 3x^4 - x^2 - 5$

G3w Conocimientos básicos de Matemáticas.   Bloque 2. Álgebra. **Tema 1. Polinomios**
Ana Allueva – José Luis Alejandre – José Miguel González   **MATEMÁTICA APLICADA- Universidad Zaragoza**

Ejercicios resueltos 1

c) $p(x) = -5x^4 + 6x^3 - 2x^2 + 3x + 8$
$q(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4$

$p(x) + q(x) = -3x^4 + 3x^3 + 3x + 4$

d) $p(x) = 3x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 14$
$q(x) = 6x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 3x$
$r(x) = 2x + 14$

$p(x) + q(x) + r(x) = \left[p(x) + q(x) \right] + r(x) =$
$$= \left[9x^4 - 7x^3 - 2x - 14 \right] + 2x + 14 = 9x^4 - 7x^3$$

e) $p(x) = -x^6 + 4x^5 - 2x^4 - 7x^3 + 6x^2 + x - 2$
$q(x) = 3x^6 + 2x^5 - x^3 + 2x^2 - 2x + 5$
$r(x) = -2x^6 - 6x^5 + 2x^4 + 8x^3 - 8x^2 + x - 3$

$p(x) + q(x) + r(x) = \left[p(x) + q(x) \right] + r(x) =$
$$= \left[2x^6 + 6x^5 - 2x^4 - 8x^3 + 8x^2 - x + 3 \right] +$$
$$+ \left[-2x^6 - 6x^5 + 2x^4 + 8x^3 - 8x^2 + x - 3 \right] = 0$$

f) $p(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 7x + 11$
$q(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^3 - x^2 - 7$
$r(x) = -3x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 + 3x - 4$

$p(x) + q(x) + r(x) = \left[p(x) + q(x) \right] + r(x) =$
$$= \left[2x^5 - 2x^4 - 2x^3 - 7x + 4 \right] + \left[-3x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 + 3x - 4 \right] =$$
$$= -x^5 - 7x^3 + 8x^2 - 4x$$

G3w

Conocimientos básicos de Matemáticas.   Bloque 2. Álgebra.   Tema 1. Polinomios
Ana Allueva – José Luis Alejandre – José Miguel González   **MATEMÁTICA APLICADA- Universidad Zaragoza**

Ejercicios resueltos   2

2.1-2 Realiza la resta de los siguientes polinomios:

a) $p(x) = x^6 + 2x^5 - 3x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x - 4$

$q(x) = -x^6 + 2x^5 - 5x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x - 8$

b) $p(x) = -3x^3 + 7x^2 - 3x - 2$

$q(x) = 5x^3 + 5x^2 + 5x + 5$

c) $p(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 7x + 10$

$q(x) = -2x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 3x + 11$

d) $p(x) = -x^5 + 5x^3 + 4x^2 - x + 1$

$q(x) = x^4 + 9x^3 - 3x^2 + x - 1$

e) $p(x) = -7x^3 + x^2 - 12x - 2$

$q(x) = -6x^3 + 3x^2 - 13x + 15$

f) $p(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 2x + 14$

$q(x) = -x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 3x + 14$

Solución

a) $\left.\begin{array}{l} p(x) = x^6 + 2x^5 - 3x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x - 4 \\ q(x) = -x^6 + 2x^5 - 5x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x - 8 \end{array}\right\}$

$p(x) - q(x) = p(x) + \left[-q(x)\right] =$

$= x^6 + 2x^5 - 3x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x - 4 -$

$-\left[-x^6 + 2x^5 - 5x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x - 8\right]$

$p(x) - q(x) = 2x^6 + 2x^4 + 2x^2 + x + 4$

b) $\left.\begin{array}{l} p(x) = -3x^3 + 7x^2 - 3x - 2 \\ q(x) = 5x^3 + 5x^2 + 5x + 5 \end{array}\right\}$

$p(x) - q(x) = p(x) + \left[-q(x)\right] =$

$= -3x^3 + 7x^2 - 3x - 2 - \left[5x^3 + 5x^2 + 5x + 5\right]$

$p(x) - q(x) = -8x^3 + 2x^2 - 8x - 7$

Conocimientos básicos de Matemáticas.   Bloque 2. Álgebra. Tema 1. Polinomios

Ana Allueva – José Luis Alejandre – José Miguel González   MATEMÁTICA APLICADA- Universidad Zaragoza

Ejercicios resueltos 3

c) $p(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 7x + 10$
   $q(x) = -2x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 3x + 11$

$$p(x) - q(x) = p(x) + \left[-q(x)\right] =$$
$$= x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 7x + 10 - \left[-2x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 3x + 11\right]$$

$$p(x) - q(x) = 3x^4 - x^3 + 6x^2 + 4x - 1$$

d) $p(x) = -x^5 + 5x^3 + 4x^2 - x + 1$
   $q(x) = x^4 + 9x^3 - 3x^2 + x - 1$

$$p(x) - q(x) = p(x) + \left[-q(x)\right] =$$
$$= -x^5 + 5x^3 + 4x^2 - x + 1 - \left[x^4 + 9x^3 - 3x^2 + x - 1\right]$$

$$p(x) - q(x) = -x^5 - x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 2x + 2$$

e) $p(x) = -7x^3 + x^2 - 12x - 2$
   $q(x) = -6x^3 + 3x^2 - 13x + 15$

$$p(x) - q(x) = p(x) + \left[-q(x)\right] =$$
$$= -7x^3 + x^2 - 12x - 2 - \left[-6x^3 + 3x^2 - 13x + 15\right]$$

$$p(x) - q(x) = -x^3 - 2x^2 + x - 17$$

f) $p(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 2x + 14$
   $q(x) = -x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 3x + 14$

$$p(x) - q(x) = p(x) + \left[-q(x)\right] =$$
$$= x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 2x + 14 - \left[-x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 3x + 14\right]$$

$$p(x) - q(x) = x^5 + 3x^4 - 3x^2 + 5x$$

G3w

Conocimientos básicos de Matemáticas.   Bloque 2. Álgebra. Tema 1. Polinomios
Ana Allueva – José Luis Alejandre – José Miguel González   MATEMÁTICA APLICADA- Universidad Zaragoza

Ejercicios resueltos 4

2.1-3 Realiza el producto de los siguientes polinomios:

a) $p(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x + 1$

   $q(x) = 2x$

b) $p(x) = -x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

   $q(x) = -5x^4$

c) $p(x) = 2x^6 + 3x^4 + x^2 - 6$

   $q(x) = x^3 + x$

d) $p(x) = x^2 + 2x + 3$

   $q(x) = -x^2 + x + 4$

e) $p(x) = x^5 + 3x^3 + 6x$

   $q(x) = -x^2 + 2x - 2$

   $r(x) = 2x^3 + 5x^2 - 2x + 3$

f) $p(x) = -x^2 + 2x + 3$

   $q(x) = x^2 + x + 1$

   $r(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 4$

Solución

a) $\left. \begin{array}{l} p(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x + 1 \\ q(x) = 2x \end{array} \right\}$

$$p(x) \cdot q(x) = \left[x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x + 1 \right] \cdot 2x =$$
$$= x^4 \cdot 2x + 2x^3 \cdot 2x - x^2 \cdot 2x + 3x \cdot 2x + 1 \cdot 2x =$$
$$= 2x^5 + 4x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 2x$$

b) $\left. \begin{array}{l} p(x) = -x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \\ q(x) = -5x^4 \end{array} \right\}$

$$p(x) \cdot q(x) = \left[-x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \right] \cdot \left(-5x^4 \right) =$$
$$= 5x^9 - 5x^8 + 5x^7 - 5x^6 + 5x^5 - 5x^4$$

Conocimientos básicos de Matemáticas.   Bloque 2. Álgebra.   Tema 1. Polinomios

Ana Allueva – José Luis Alejandre – José Miguel González   **MATEMÁTICA APLICADA- Universidad Zaragoza**

Ejercicios resueltos 5

c) $p(x) = 2x^6 + 3x^4 + x^2 - 6$
$q(x) = x^3 + x$

$$p(x) \cdot q(x) = \left[2x^6 + 3x^4 + x^2 - 6\right] \cdot \left[x^3 + x\right] =$$
$$= \left[2x^6 + 3x^4 + x^2 - 6\right] \cdot x^3 + \left[2x^6 + 3x^4 + x^2 - 6\right] \cdot x =$$
$$= \left[2x^9 + 3x^7 + x^5 - 6x^3\right] + \left[2x^7 + 3x^5 + x^3 - 6x\right] =$$
$$= 2x^9 + 5x^7 + 4x^5 - 5x^3 - 6x$$

d) $p(x) = x^2 + 2x + 3$
$q(x) = -x^2 + x + 4$

$$p(x) \cdot q(x) = \left[x^2 + 2x + 3\right] \cdot \left[-x^2 + x + 4\right] =$$
$$= \left[x^2 + 2x + 3\right] \cdot \left(-x^2\right) + \left[x^2 + 2x + 3\right] \cdot x + \left[x^2 + 2x + 3\right] \cdot 4 =$$
$$= -x^4 - 2x^3 - 3x^2 + x^3 + 2x^2 + 3x + 4x^2 + 8x + 12 =$$
$$= -x^4 - x^3 + 3x^2 + 11x + 12$$

e) $p(x) = x^5 + 3x^3 + 6x$
$q(x) = -x^2 + 2x - 2$
$r(x) = 2x^3 + 5x^2 - 2x + 3$

$$p(x) \cdot q(x) \cdot r(x) = \left[p(x) \cdot q(x)\right] \cdot r(x) =$$
$$= \left[\left(x^5 + 3x^3 + 6x\right) \cdot \left(-x^2 + 2x - 2\right)\right] \cdot \left(2x^3 + 5x^2 - 2x + 3\right) =$$
$$= \left(-x^7 - 3x^5 - 6x^3 + 2x^6 + 6x^4 + 12x^2 - 2x^5 - 6x^3 - 12x\right) \cdot$$
$$\cdot \left(2x^3 + 5x^2 - 2x + 3\right)$$

$$p(x) \cdot q(x) \cdot r(x) = \left(-x^7 + 2x^6 - 5x^5 + 6x^4 - 12x^3 + 12x^2 - 12x\right) \cdot$$
$$\cdot \left(2x^3 + 5x^2 - 2x + 3\right)$$

$$p(x) \cdot q(x) \cdot r(x) =$$
$$= -2x^{10} + 4x^9 - 10x^8 + 12x^7 - 24x^6 + 24x^5 - 24x^4 -$$
$$-5x^9 + 10x^8 - 25x^7 + 30x^6 - 60x^5 + 60x^4 - 60x^3 +$$
$$+2x^8 - 4x^7 + 10x^6 - 12x^5 + 24x^4 - 24x^3 + 24x^2 -$$
$$-3x^7 + 6x^6 - 15x^5 + 18x^4 - 36x^3 + 36x^2 - 36x$$

$$p(x) \cdot q(x) \cdot r(x) =$$
$$= -2x^{10} - x^9 + 2x^8 - 20x^7 + 22x^6 - 63x^5 + 78x^4 - 120x^3 + 60x^2 - 36x$$

Conocimientos básicos de Matemáticas.   Bloque 2. Álgebra.   Tema 1. Polinomios
Ana Allueva – José Luis Alejandre – José Miguel González   **MATEMÁTICA APLICADA- Universidad Zaragoza**

Ejercicios resueltos   6

f) $p(x) = -x^2 + 2x + 3$
$q(x) = x^2 + x + 1$
$r(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 4$

$p(x) \cdot q(x) \cdot r(x) = \left[p(x) \cdot q(x) \right] \cdot r(x) =$
$$= \left[\left(-x^2 + 2x + 3 \right) \cdot \left(x^2 + x + 1 \right) \right] \cdot \left(x^4 + x^3 + x^2 + x + 4 \right)$$

$p(x) \cdot q(x) \cdot r(x) = \left[p(x) \cdot q(x) \right] \cdot r(x) =$
$$= \left(-x^4 + 2x^3 + 3x^2 - x^3 + 2x^2 + 3x - x^2 + 2x + 3 \right) \cdot$$
$$\cdot \left(x^4 + x^3 + x^2 + x + 4 \right)$$

$p(x) \cdot q(x) \cdot r(x) = \left[p(x) \cdot q(x) \right] \cdot r(x) =$
$$= \left(-x^4 + x^3 + 4x^2 + 5x + 3 \right) \cdot \left(x^4 + x^3 + x^2 + x + 4 \right)$$

$p(x) \cdot q(x) \cdot r(x) = \left[p(x) \cdot q(x) \right] \cdot r(x) =$
$$= -x^8 + x^7 + 4x^6 + 5x^5 + 3x^4 -$$
$$- x^7 + x^6 + 4x^5 + 5x^4 + 3x^3 -$$
$$- x^6 + x^5 + 4x^4 + 5x^3 + 3x^2 -$$
$$- x^5 + x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 3x -$$
$$- 4x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x + 12$$

$p(x) \cdot q(x) \cdot r(x) =$
$$= -x^8 + 4x^6 + 9x^5 + 9x^4 + 16x^3 + 24x^2 + 23x + 12$$

Conocimientos básicos de Matemáticas.   Bloque 2. Álgebra. Tema 1. Polinomios
Ana Allueva – José Luis Alejandre – José Miguel González   MATEMÁTICA APLICADA- Universidad Zaragoza

Ejercicios resueltos 7

2.1-4 Dados los siguientes polinomios, realiza la operación que se indica:

a) $\left. \begin{array}{l} p(x) = x^3 + 6x^2 - x + 2 \\ q(x) = 2x^2 + 4x - 3 \end{array} \right\}$ $\big(p(x) + q(x)\big) \cdot \big(p(x) - q(x)\big)$

b) $\left. \begin{array}{l} p(x) = x^2 - 5x + 2 \\ q(x) = -x^2 + 3x - 4 \end{array} \right\}$ $\big(3 \cdot p(x) + q(x)\big) \cdot \big(p(x) - 2 \cdot q(x)\big)$

Solución

a) $\left. \begin{array}{l} p(x) = x^3 + 6x^2 - x + 2 \\ q(x) = 2x^2 + 4x - 3 \end{array} \right\}$ $\big(p(x) + q(x)\big) \cdot \big(p(x) - q(x)\big)$

$\left. \begin{array}{l} p(x) + q(x) = x^3 + 8x^2 + 3x - 1 \\ p(x) - q(x) = x^3 + 4x^2 - 5x + 5 \end{array} \right\}$

$\big(p(x) + q(x)\big) \cdot \big(p(x) - q(x)\big) = \big(x^3 + 8x^2 + 3x - 1\big) \cdot \big(x^3 + 4x^2 - 5x + 5\big)$

$$\begin{aligned} \big(p(x) + q(x)\big) \cdot \big(p(x) - q(x)\big) = \; & x^6 + 8x^5 + 3x^4 - x^3 + \\ & + 4x^5 + 32x^4 + 12x^3 - 4x^2 - \\ & - 5x^4 - 40x^3 - 15x^2 + 5x + \\ & + 5x^3 + 40x^2 + 15x - 5 \end{aligned}$$

$\big(p(x) + q(x)\big) \cdot \big(p(x) - q(x)\big) = x^6 + 12x^5 + 30x^4 - 24x^3 + 21x^2 + 20x - 5$

b) $\left. \begin{array}{l} p(x) = x^2 - 5x + 2 \\ q(x) = -x^2 + 3x - 4 \end{array} \right\}$ $\big(3 \cdot p(x) + q(x)\big) \cdot \big(p(x) - 2 \cdot q(x)\big)$

$\left. \begin{array}{l} 3 \cdot p(x) + q(x) = 3x^2 - 15x + 6 - x^2 + 3x - 4 = 2x^2 - 12x + 2 \\ p(x) - 2 \cdot q(x) = x^2 - 5x + 2 + 2x^2 - 6x + 8 = 3x^2 - 11x + 10 \end{array} \right\}$

$\big(3 \cdot p(x) + q(x)\big) \cdot \big(p(x) - 2 \cdot q(x)\big) = \big(2x^2 - 12x + 2\big) \cdot \big(3x^2 - 11x + 10\big)$

$$\begin{aligned} \big(3 \cdot p(x) + q(x)\big) \cdot \big(p(x) - 2 \cdot q(x)\big) = \; & 6x^4 - 36x^3 + 6x^2 - \\ & - 22x^3 + 132x^2 - 22x + \\ & + 20x^2 - 120x + 20 \end{aligned}$$

$\big(3 \cdot p(x) + q(x)\big) \cdot \big(p(x) - 2 \cdot q(x)\big) = 6x^4 - 58x^3 + 158x^2 - 142x + 20$

G3w Conocimientos básicos de Matemáticas. Bloque 2. Álgebra. Tema 1. Polinomios
Ana Allueva – José Luis Alejandre – José Miguel González   **MATEMÁTICA APLICADA- Universidad Zaragoza**

Ejercicios resueltos 8

2.1-5 Calcula las siguientes potencias de binomios utilizando el desarrollo del binomio de Newton:

a) $\left(x+1\right)^{4}$ $\qquad$ d) $\left(x^{2}+2\right)^{3}$

b) $\left(x-4\right)^{3}$ $\qquad$ e) $\left(x^{3}+1\right)^{5}$

c) $\left(2x+3\right)^{5}$ $\qquad$ f) $\left(3x^{2}-1\right)^{4}$

Solución

a) $\left(x+1\right)^{4}=\dbinom{4}{0}x^{4}+\dbinom{4}{1}x^{3}\cdot1^{1}+\dbinom{4}{2}x^{2}\cdot1^{2}+\dbinom{4}{3}x\cdot1^{3}+\dbinom{4}{4}1^{4}=$

$$=\frac{4!}{4!\cdot0!}x^{4}+\frac{4!}{3!\cdot1!}x^{3}+\frac{4!}{2!\cdot2!}x^{2}+\frac{4!}{1!\cdot3!}x+\frac{4!}{0!\cdot4!}=$$

$$=x^{4}+4x^{3}+6x^{2}+4x+1$$

b) $\left(x-4\right)^{3}=\dbinom{3}{0}x^{3}+\dbinom{3}{1}x^{2}\cdot\left(-4\right)^{1}+\dbinom{3}{2}x\cdot\left(-4\right)^{2}+\dbinom{3}{3}\left(-4\right)^{3}=$

$$=\frac{3!}{3!\cdot0!}x^{3}-4\frac{3!}{2!\cdot1!}x^{2}+16\frac{3!}{1!\cdot2!}x-64\frac{3!}{0!\cdot3!}=$$

$$=x^{3}-12x^{2}+48x-64$$

c) $\left(2x+3\right)^{5}=$

$$=\dbinom{5}{0}\left(2x\right)^{5}+\dbinom{5}{1}\left(2x\right)^{4}\cdot\left(3\right)^{1}+\dbinom{5}{2}\left(2x\right)^{3}\cdot\left(3\right)^{2}+$$

$$+\dbinom{5}{3}\left(2x\right)^{2}\cdot\left(3\right)^{3}+\dbinom{5}{4}\left(2x\right)^{1}\cdot\left(3\right)^{4}+\dbinom{5}{5}\left(3\right)^{5}=$$

$$=32\frac{5!}{5!\cdot0!}x^{5}+48\frac{5!}{4!\cdot1!}x^{4}+72\frac{5!}{3!\cdot2!}x^{3}+$$

$$+108\frac{5!}{2!\cdot3!}x^{2}+162\frac{5!}{1!\cdot4!}x+243\frac{5!}{0!\cdot5!}=$$

$$=32x^{5}+240x^{4}+720x^{3}+1080x^{2}+810x+243$$

Conocimientos básicos de Matemáticas.   Bloque 2. Álgebra.   Tema 1. Polinomios
Ana Allueva – José Luis Alejandre – José Miguel González   MATEMÁTICA APLICADA- Universidad Zaragoza

Ejercicios resueltos 9

d) $\left(x^2+2\right)^3=\binom{3}{0}\left(x^2\right)^3+\binom{3}{1}\left(x^2\right)^2\cdot(2)^1+\binom{3}{2}\left(x^2\right)^1\cdot(2)^2+\binom{3}{3}(2)^3=$

$$=\frac{3!}{3!\cdot 0!}x^6+2\frac{3!}{2!\cdot 1!}x^4+4\frac{3!}{1!\cdot 2!}x^2+8\frac{3!}{0!\cdot 3!}=$$

$$=x^6+6x^4+12x^2+8$$

e) $\left(x^3+1\right)^5=$

$$=\binom{5}{0}\left(x^3\right)^5+\binom{5}{1}\left(x^3\right)^4\cdot(1)^1+\binom{5}{2}\left(x^3\right)^3\cdot(1)^2+$$

$$+\binom{5}{3}\left(x^3\right)^2\cdot(1)^3+\binom{5}{4}\left(x^3\right)^1\cdot(1)^4+\binom{5}{5}(1)^5=$$

$$=\frac{5!}{5!\cdot 0!}x^{15}+\frac{5!}{4!\cdot 1!}x^{12}+\frac{5!}{3!\cdot 2!}x^9+\frac{5!}{2!\cdot 3!}x^6+\frac{5!}{1!\cdot 4!}x^3+\frac{5!}{0!\cdot 5!}=$$

$$=x^{15}+5x^{12}+10x^9+10x^6+5x^3+1$$

f) $\left(3x^2-1\right)^4=$

$$=\binom{4}{0}\left(3x^2\right)^4+\binom{4}{1}\left(3x^2\right)^3\cdot(-1)^1+$$

$$+\binom{4}{2}\left(3x^2\right)^2\cdot(-1)^2+\binom{4}{3}\left(3x^2\right)^1\cdot(-1)^3+\binom{4}{4}(-1)^4=$$

$$=\frac{4!}{4!\cdot 0!}81x^8-\frac{4!}{3!\cdot 1!}27x^6+\frac{4!}{2!\cdot 2!}9x^4-\frac{4!}{1!\cdot 3!}3x^2+\frac{4!}{0!\cdot 4!}=$$

$$=81x^8-108x^6+54x^4-12x^2+1$$

G3w Conocimientos básicos de Matemáticas.   Bloque 2. Álgebra. Tema 1. Polinomios
Ana Allueva – José Luis Alejandre – José Miguel González   **MATEMÁTICA APLICADA- Universidad Zaragoza**

Ejercicios resueltos 10

2.1-6 Realiza la división entera de los siguientes polinomios:

a) $p(x) = x^2 - 6x + 4$

$q(x) = x^2 - 2$

b) $p(x) = x^5 + 3x^3 + 6x - 2$

$q(x) = x^3 + x$

c) $p(x) = x^6 + 3$

$q(x) = x^2 + 2x - 4$

d) $p(x) = x^6 + 2x^5 - x^4 + 2x^3 + 6x^2 - x + 3$

$q(x) = x^3 + 10x^2 - 2x + 3$

Solución

a) $\left.\begin{array}{l} p(x) = x^2 - 6x + 4 \\ q(x) = x^2 - 2 \end{array}\right\} \Rightarrow p(x) = c(x) \cdot q(x) + r(x)$

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 6x + 4 & \underline{x^2 - 2} \\ \underline{-x^2 + 2} & 1 \\ -6x + 6 & \end{array}$$

$\left.\begin{array}{l} c(x) = 1 \\ r(x) = -6x + 6 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - 6x + 4 = 1 \cdot (x^2 - 2) + (-6x + 6)$

b) $\left.\begin{array}{l} p(x) = x^5 + 3x^3 + 6x - 2 \\ q(x) = x^3 + x \end{array}\right\} \Rightarrow p(x) = c(x) \cdot q(x) + r(x)$

$$\begin{array}{r|l} x^5 + 3x^3 + 6x - 2 & \underline{x^3 + x} \\ \underline{-x^5 - x^3} & x^2 + 2 \\ 2x^3 + 6x - 2 & \\ \underline{-2x^3 - 2x} & \\ 4x - 2 & \end{array}$$

$\left.\begin{array}{l} c(x) = x^2 + 2 \\ r(x) = 4x - 2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^5 + 3x^3 + 6x - 2 = (x^2 + 2) \cdot (x^3 + x) + (4x - 2)$

G3W

Conocimientos básicos de Matemáticas.   Bloque 2. Álgebra.   Tema 1. Polinomios

Ana Allueva – José Luis Alejandre – José Miguel González   **MATEMÁTICA APLICADA- Universidad Zaragoza**

Ejercicios resueltos   11

c) $p(x) = x^6 + 3$
$\left.\begin{array}{l}q(x) = x^2 + 2x - 4\end{array}\right\} \Rightarrow p(x) = c(x) \cdot q(x) + r(x)$

$$
\begin{array}{r|l}
x^6 + 3 & \,x^2 + 2x - 4 \\
\underline{-x^6 - 2x^5 + 4x^4} & \,x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 24x + 80 \\
-2x^5 + 4x^4 + 3 & \\
\underline{2x^5 + 4x^4 - 8x^3} & \\
8x^4 - 8x^3 + 3 & \\
\underline{-8x^4 - 16x^3 + 32x^2} & \\
-24x^3 + 32x^2 + 3 & \\
\underline{24x^3 + 48x^2 - 96x} & \\
80x^2 - 96x + 3 & \\
\underline{-80x^2 - 160x + 320} & \\
-256x + 323 &
\end{array}
$$

$\left.\begin{array}{l}c(x) = x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 24x + 80 \\ r(x) = -256x + 323\end{array}\right\}$

$$\Rightarrow x^6 + 3 = \left(x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 24x + 80\right) \cdot \left(x^2 + 2x - 4\right) + \left(-256x + 323\right)$$

d) $p(x) = x^6 + 2x^5 - x^4 + 2x^3 + 6x^2 - x + 3$
$\left.\begin{array}{l}\\ q(x) = x^3 + 10x^2 - 2x + 3\end{array}\right\} \Rightarrow p(x) = c(x) \cdot q(x) + r(x)$

$$
\begin{array}{r|l}
x^6 + 2x^5 - x^4 + 2x^3 + 6x^2 - x + 3 & \,x^3 + 10x^2 - 2x + 3 \\
\underline{-x^6 - 10x^5 + 2x^4 - 3x^3} & \,x^3 - 8x^2 + 81x - 827 \\
-8x^5 + x^4 - x^3 + 6x^2 - x + 3 & \\
\underline{8x^5 + 80x^4 - 16x^3 + 24x^2} & \\
81x^4 - 17x^3 + 30x^2 - x + 3 & \\
\underline{-81x^4 - 810x^3 + 162x^2 - 243x} & \\
-827x^3 + 192x^2 - 244x + 3 & \\
\underline{827x^3 + 8270x^2 - 1654x + 2481} & \\
8462x^2 - 1898x + 2484 &
\end{array}
$$

$\left.\begin{array}{l}c(x) = x^3 - 8x^2 + 81x - 827 \\ r(x) = 8462x^2 - 1898x + 2484\end{array}\right\}$

$$\Rightarrow x^6 + 2x^5 - x^4 + 2x^3 + 6x^2 - x + 3 =$$

$$= \left(x^3 - 8x^2 + 81x - 827\right) \cdot \left(x^3 + 10x^2 - 2x + 3\right) + \left(8462x^2 - 1898x + 2484\right)$$

Conocimientos básicos de Matemáticas.   Bloque 2. Álgebra. Tema 1. Polinomios
Ana Allueva – José Luis Alejandre – José Miguel González   MATEMÁTICA APLICADA- Universidad Zaragoza

Ejercicios resueltos 12

2.1-7 Factoriza según sus raíces reales los siguientes polinomios:

a) $p(x) = x^2 - 4x - 5$

b) $p(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$

c) $p(x) = x^4 - 13x^2 + 36$

d) $p(x) = x^4 - 16$

Solución

a) $p(x) = x^2 - 4x - 5$

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = 5, -1$$

$$p(x) = x^2 - 4x - 5 = (x - 5) \cdot (x + 1)$$

b) $p(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$

$$x^3 - 5x^2 + 6x = x \cdot (x^2 - 5x + 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = 3, 2$$

$$p(x) = x^3 - 5x^2 + 6x = x \cdot (x - 3) \cdot (x - 2)$$

c) $p(x) = x^4 - 13x^2 + 36$

$$x^2 = t \Rightarrow x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \Rightarrow t^2 - 13t + 36 = 0$$

$$t^2 - 13t + 36 = 0 \Rightarrow x^2 = t = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} = 9, 4$$

$$x = \pm\sqrt{9}, \pm\sqrt{4} = 3, -3, 2, -2$$

$$p(x) = x^4 - 13x^2 + 36 = (x - 3) \cdot (x + 3) \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)$$

d) $p(x) = x^4 - 16 = (x^2 - 4) \cdot (x^2 + 4)$

$$(x^2 - 4) \cdot (x^2 + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ x^2 + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, -2 \\ x^2 = \pm\sqrt{-4} \notin \mathbb{R} \end{cases}$$

$$p(x) = x^4 - 16 = (x^2 - 4) \cdot (x^2 + 4) = (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x^2 + 4)$$

Conocimientos básicos de Matemáticas.   Bloque 2. Álgebra.   Tema 1. Polinomios
Ana Allueva – José Luis Alejandre – José Miguel González   MATEMÁTICA APLICADA- Universidad Zaragoza

Ejercicios resueltos   13

a) $p(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

b) $p(x) = x^3 + 3x^2 - 13x - 15$

c) $p(x) = x^3 - 7x^2 + x - 7$

d) $p(x) = x^4 - 2x^3 - x + 2$

e) $p(x) = x^5 - x^4 - 10x^3 + 9x^2 + 9x$

f) $p(x) = x^4 - \dfrac{5}{6}x^3 - \dfrac{7}{3}x^2 - \dfrac{1}{6}x + \dfrac{1}{3}$

Solución

a) $p(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

Divisores enteros del término independiente: 1, –1, 2, –2, 4, –4, 8, –8

$$
\begin{array}{r|rrr}
 & 1 & -3 & -6 & 8 \\
1 & & 1 & -2 & -8 \\
\hline
 & 1 & -2 & -8 & \boxed{0} \\
\end{array}
\quad \text{Resto cero}
$$

$$p(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = (x^2 - 2x - 8) \cdot (x - 1)$$

Ahora, el polinomio de grado 2 se puede factorizar obteniendo sus raíces:

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = 4, -2$$

Por tanto:

$$p(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = (x - 4) \cdot (x + 2) \cdot (x - 1)$$

b) $p(x) = x^3 + 3x^2 - 13x - 15$

Divisores enteros del término independiente: 1, –1, 3, –3, 5, –5, 15, –15

$$
\begin{array}{r|rrr}
 & 1 & 3 & -13 & -15 \\
-1 & & -1 & -2 & 15 \\
\hline
 & 1 & 2 & -15 & \boxed{0} \\
\end{array}
\quad \text{Resto cero}
$$

Conocimientos básicos de Matemáticas.   Bloque 2. Álgebra.   Tema 1. Polinomios
Ana Allueva – José Luis Alejandre – José Miguel González   MATEMÁTICA APLICADA- Universidad Zaragoza

Ejercicios resueltos 14

$$p(x) = x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = (x^2 + 2x - 15) \cdot (x + 1)$$

Ahora, el polinomio de grado 2 se puede factorizar obteniendo sus raíces:

$$x^2 + 2x - 15 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2} = 3, -5$$

Por tanto:

$$p(x) = x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = (x - 3) \cdot (x + 5) \cdot (x + 1)$$

c) $p(x) = x^3 - 7x^2 + x - 7$

Divisores enteros del término independiente: 1, –1, 7, –7

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -7 & 1 & -7 \\
7 & & 7 & 0 & 7 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0}
\end{array}
$$
Resto cero

$$p(x) = x^3 - 7x^2 + x - 7 = (x^2 + 1) \cdot (x - 7)$$

Ahora, el polinomio de grado 2 se puede factorizar obteniendo sus raíces:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \text{ , que no son raíces reales.}$$

Por tanto:

$$p(x) = x^3 - 7x^2 + x - 7 = (x^2 + 1) \cdot (x - 7)$$

d) $p(x) = x^4 - 2x^3 - x + 2$

Divisores enteros del término independiente: 1, –1, 2, –2

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -2 & 0 & -1 & 2 \\
1 & & 1 & -1 & -1 & -2 \\
\hline
 & 1 & -1 & -1 & -2 & \boxed{0}
\end{array}
$$
Resto cero

$$p(x) = x^4 - 2x^3 - x + 2 = (x^3 - x^2 - x - 2) \cdot (x - 1)$$

Para el polinomio de grado 3 que resulta utilizamos otra vez Ruffini con los divisores enteros del término independiente: 1, –1, 2, –2

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -1 & -1 & -2 \\
2 & & 2 & 2 & 2 \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & \boxed{0}
\end{array}
$$
Resto cero

Conocimientos básicos de Matemáticas.   Bloque 2. Álgebra. Tema 1. Polinomios
Ana Allueva – José Luis Alejandre – José Miguel González   MATEMÁTICA APLICADA- Universidad Zaragoza

Ejercicios resueltos 15

Por tanto:

$$p(x) = x^4 - 2x^3 - x + 2 = \left(x^2 + x + 1\right) \cdot \left(x - 2\right) \cdot \left(x - 1\right)$$

Ahora, el polinomio de grado 2 se puede factorizar obteniendo sus raíces:

$$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}, \text{ que no son raíces reales.}$$

Por tanto:

$$p(x) = x^4 - 2x^3 - x + 2 = \left(x^2 + x + 1\right) \cdot \left(x - 2\right) \cdot \left(x - 1\right)$$

e) $p(x) = x^5 - x^4 - 10x^3 + 9x^2 + 9x$

Podemos factorizar fácilmente el polinomio sacando *x* factor común:

$$p(x) = x^5 - x^4 - 10x^3 + 9x^2 + 9x = \left(x^4 - x^3 - 10x^2 + 9x + 9\right) \cdot x$$

Para el polinomio de grado 4 que resulta utilizamos Ruffini con los divisores enteros del término independiente: 1, −1, 3, −3, 9, −9

	1	−1	−10	9	9
3		3	6	−12	−9
	1	2	−4	−3	0

Resto cero

$$p(x) = x^5 - x^4 - 10x^3 + 9x^2 + 9x = \left(x^3 + 2x^2 - 4x - 3\right) \cdot \left(x - 3\right) \cdot x$$

Para el polinomio de grado 3 que resulta utilizamos otra vez Ruffini con los divisores enteros del término independiente: 1, −1, 3, −3

	1	2	−4	−3
−3		−3	3	3
	1	−1	−1	0

Resto cero

Por tanto:

$$p(x) = x^5 - x^4 - 10x^3 + 9x^2 + 9x = \left(x^2 - x - 1\right) \cdot \left(x + 3\right) \cdot \left(x - 3\right) \cdot x$$

Ahora, el polinomio de grado 2 se puede factorizar obteniendo sus raíces:

$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \text{ que son raíces reales.}$$

Por tanto:

Conocimientos básicos de Matemáticas.   Bloque 2. Álgebra. Tema 1. Polinomios

Ana Allueva – José Luis Alejandre – José Miguel González   **MATEMÁTICA APLICADA- Universidad Zaragoza**

Ejercicios resueltos 16

$$p(x) = \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot (x+3) \cdot (x-3) \cdot x$$

f) $\quad p(x) = x^4 - \dfrac{5}{6}x^3 - \dfrac{7}{3}x^2 - \dfrac{1}{6}x + \dfrac{1}{3}$

Como el término independiente no es entero y aparecen términos racionales, multiplicamos todo el polinomio por 6:

$$6p(x) = 6x^4 - 5x^3 - 14x^2 - x + 2$$

Para este polinomio de grado 4 que resulta utilizamos Ruffini con los divisores enteros del término independiente: 1, −1, 2, −2

	6	−5	−14	−1	2
2		12	14	0	−2
	6	7	0	−1	0

Resto cero

$$6p(x) = 6x^4 - 5x^3 - 14x^2 - x + 2 = \left(6x^3 + 7x^2 - 1\right) \cdot (x - 2)$$

Para el polinomio de grado 3 que resulta utilizamos otra vez Ruffini con los divisores enteros del término independiente: 1, −1

	6	7	0	−1
−1		−6	−1	1
	6	1	−1	0

Resto cero

Por tanto:

$$6p(x) = 6x^4 - 5x^3 - 14x^2 - x + 2 = \left(6x^2 + x - 1\right) \cdot (x+1) \cdot (x-2)$$

Ahora, el polinomio de grado 2 se puede factorizar obteniendo sus raíces:

$$6x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{12} = \frac{-1 \pm 5}{12} = \frac{1}{3}, -\frac{1}{2} \text{, son raíces reales.}$$

Por tanto:

$$6p(x) = 6x^4 - 5x^3 - 14x^2 - x + 2 = 6 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot (x+1) \cdot (x-2)$$

Finalmente:

$$p(x) = x^4 - \frac{5}{6}x^3 - \frac{7}{3}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{3} = \left(x - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot (x+1) \cdot (x-2)$$

Conocimientos básicos de Matemáticas.   Bloque 2. Álgebra.   Tema 1. Polinomios
Ana Allueva – José Luis Alejandre – José Miguel González   **MATEMÁTICA APLICADA- Universidad Zaragoza**

Ejercicios resueltos 17