**Boletín 21. Distribuciones de probabilidad**

**1.** Supongamos que la probabilidad de hacer blanco un torpedo lanzado desde un submarino es 0,2. Si se lanzan 5 torpedos, hallar:
a) Probabilidad de que el barco enemigo se salve.
b) Probabilidad de hundir el objetivo.
c) Probabilidad de que impacten 3 torpedos.

**2. Galicia 2019.** Unha fábrica produce pezas cuxo grosor segue unha distribución normal de media 8 cm e desviación típica 0.01 cm. Calcula a probabilidade de que unha peza teña un grosor comprendido entre 7.98 e 8.02 cm.

**3. Galicia 2019.** A probabilidade de que un determinado xogador de fútbol marque gol desde o punto de penalti é $p$=0.7. Se lanza 5 penaltis, calcula as seguintes tres probabilidades: de que non marque ningún gol; de que marque polo menos 2 goles; e de que marque 5 goles. Se lanza 2100 penaltis, calcula a probabilidade de que marque polo menos 1450 goles. Estase a asumir que os lanzamentos son sucesos independentes.

**4. Galicia 2018.**
a) Un exame tipo test consta de 10 preguntas, cada unha con 4 respostas das cales só unha é correcta. Se se contesta ao azar, cal é a probabilidade de contestar ben polo menos dúas preguntas?
b) A duración dun certo tipo de pilas eléctricas é unha variable que segue unha distribución normal de media 50 horas e desviación típica 5 horas. Calcula a probabilidade de que unha pila eléctrica deste **tipo, elixida ao azar, dure menos de 42 horas.**

**5. Galicia 2018.** Nun bombo temos 10 bolas idénticas numeradas do 0 ao 9 e cada vez que facemos una extracción devolvemos a bola ao bombo
a) Se facemos 5 extraccións, calcula a probabilidade de que o 7 saia menos de dúas veces.
b) Se facemos 100 extraccións, calcula a probabilidade de que o 7 saia menos de nove veces.

**6. Galicia 2017.** O total de vendas diarias nun pequeno restaurante é unha variable que segue unha distribución normal de media 1220€ ao día e desviación típica 120€ ao día.
a) Calcula a probabilidade de que nun día elixido ao azar as vendas excedan de 1400€.
b) Se o restaurante debe vender polo menos 980€ ao día para cubrir os gastos, ¿cal é a probabilidade de que un día elixido ao azar, o restaurante non cubra gastos?

**Soluciones.**

**1.**

a) P(0 éxitos) 0,3277

b) P(se hunda)= 0,6723

c) P(3 éxitos)= 0,0512

**2.**

b) Unha fábrica produce pezas cuxo grosor segue unha distribución normal de media 8 cm e desviación típica 0.01 cm. Calcula a probabilidade de que unha peza teña un grosor comprendido entre 7.98 e 8.02 cm.

**Solución:**

4.a) Damos nomes aos sucesos: $R$ = "o mozo rega" e $S$ = "a roseira sobrevive".

Sabemos que $P(R) = \frac{2}{3}$ (logo $P(\bar{R}) = \frac{1}{3}$), $P(S|R) = 0.7$ e $P(S|\bar{R}) = 0.2$.

Pídese $P(\bar{R}|S) = \frac{P(\bar{R}\cap S)}{P(S)}$.

- De $0.7 = P(S|R) = \frac{P(S\cap R)}{P(R)} = \frac{P(S\cap R)}{\frac{2}{3}}$, dedúcese que $P(S \cap R) = \frac{2}{3} \cdot 0.7 = \frac{7}{15} = 0.4\bar{6}$.
- De $0.2 = P(S|\bar{R}) = \frac{P(S\cap \bar{R})}{P(\bar{R})} = \frac{P(S\cap \bar{R})}{\frac{1}{3}}$, dedúcese que $P(S \cap \bar{R}) = \frac{1}{3} \cdot 0.2 = \frac{1}{15} = 0.0\bar{6}$.

Polo tanto, $P(S) = P(S \cap R) + P(S \cap \bar{R}) = \frac{7}{15} + \frac{1}{15} = \frac{8}{15} = 0.5\bar{3}$ e, en consecuencia,

$$P(\bar{R}|S) = \frac{P(\bar{R} \cap S)}{P(S)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{8}{15}} = \frac{1}{8} = 0.125.$$

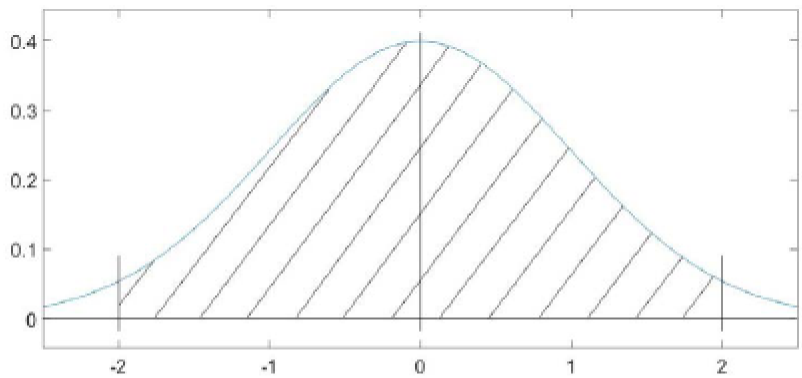
4.b) $X$ = "grosor das pezas".

$$X \to N(8{,}0.01) \Rightarrow Z = \frac{X-8}{0.01} \to N(0{,}1).$$

Logo

$$P(7.98 \le X \le 8.02) = P\left(\frac{7.98-8}{0.01} \le Z \le \frac{8.02-8}{0.01}\right) = P(-2 \le Z \le 2)$$
$$= P(Z \le 2) - P(Z < -2) = P(Z \le 2) - P(Z > 2)$$
$$= P(Z \le 2) - \{1 - P(Z \le 2)\} = 2P(Z \le 2) - 1 \approx 2 \cdot 0.9772 - 1 = 0.9544$$

é a probabilidade pedida.




A área da zona raiada é igual á probabilidade pedida $P(-2 \le Z \le 2)$.

**3.**

b) A probabilidade de que un determinado xogador de fútbol marque gol desde o punto de penalti é $p = 0.7$. Se lanza 5 penaltis, calcula as seguintes tres probabilidades: de que non marque ningún gol; de que marque polo menos 2 goles; e de que marque 5 goles. Se lanza 2100 penaltis, calcula a probabilidade de que marque polo menos 1450 goles. Estase a asumir que os lanzamentos son sucesos independentes.

**Solución:**

4.a) Temos

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.2 = 0.8$.
- $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.4 = 0.6$.
- Da igualdade $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dedúcese que $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.2 + 0.4 - 0.5 = 0.1$.
- Segundo unha das leis de De Morgan, $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$, de onde $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 01 = 0.9$.

Por último, os sucesos $A$ e $B$ non son independentes, porque $P(A \cap B) = 0.1 \neq 0.08 = 0.2 \cdot 0.4 = P(A)P(B)$.

4.b) Se $X =$ "n.º de goles en 5 lanzamentos de penalti", entón $X \to B(5{,}0.7)$, distribución binomial de parámetros $n = 5$ e $p = 0.7$. Tense entón $q = 1 - p = 0.3$ e, polo tanto,

- $P(X = 0) = \binom{5}{0} p^0 q^5 = 0.3^5 = 2.43 \times 10^{-3}$.
- Como $P(X = 1) = \binom{5}{1} p^1 q^4 = 5 \cdot 0.7 \cdot 0.3^4 = 0.02835$, tense que $P(X \geq 2) = 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1)\} = 1 - \{0.00243 + 0.02835\} = 1 - 0.03078 = 0.96922$.
- $P(X = 5) = \binom{5}{5} p^5 q^0 = 0.7^5 = 0.16807$.

Supoñamos agora que $X =$ "n.º de goles en 2100 lanzamentos de penalti", co cal $X \to B(2100{,}0.7)$. Os valores de $n$, $p$ e $q$ neste caso son $n = 2100$, $p = 0.7$ e $q = 0.3$. A probabilidade $P(X \geq 1450)$ é difícil de calcular directamente. É posible, non obstante, razoar do xeito seguinte: ao ser $np = 1470 > 5$ e $nq = 630 > 5$, a variable $X$ pode ser aproximada por unha normal $\tilde{X}$ de media $np$ e desviación típica $\sqrt{npq} = \sqrt{441} = 21$.

$$\tilde{X} \to N(1470{,}21) \Rightarrow Z = \frac{\tilde{X} - 1470}{21} \to N(0{,}1),$$

de onde

corrección de $\frac{1}{2}$ punto

$$P(X \geq 1450) \approx P(\tilde{X} > 1449.5) = P\left(Z > \frac{1449.5 - 1470}{21}\right) = P\left(Z > \frac{-20.5}{21}\right) \approx P(Z > -0.98)$$
$$= P(Z < 0.98) \approx 0.8365.$$

**4.**

**a)** Sexa $X$ = nº de respostas acertadas. Trátase dunha distribución binomial $B(10; 0{,}25)$, pois a probabilidade de contestar ben unha pregunta é a mesma nos dez casos: 0,25

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - \binom{10}{0} \cdot 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^{10} - \binom{10}{1} \cdot 0{,}25^1 \cdot 0{,}75^9 = 1 - 0{,}0563 - 0{,}1877 \\ &= \boxed{0{,}756} \end{aligned}$$

**b)** Sea $X$ la duración, en horas, de las pilas. $X$ sigue una distribución normal $N(50; 5)$

Tipificación $\qquad \frac{X-50}{5} = Z \longrightarrow N(0{,}1)$

$$\begin{aligned} P(X < 42) = P\left(\frac{X-50}{5} < \frac{42-50}{5}\right) &= P(Z < -1{,}6) = P(Z > 1{,}6) = 1 - P(Z \leq 1{,}6) \\ &= 1 - 0{,}9452 = \boxed{0{,}0548} \end{aligned}$$

**5.**

Sexa $X$ = "nº de extraccións nas que obtemos un 7"

**a)** Evidentemente trátase de probas independentes, nas que a probabilidade de éxito non cambia

$$\left.\begin{array}{l} \text{número de extraccións} = n = 5 \\ \text{probabilidade de éxito} = p = 0{,}1 \end{array}\right\} \quad X \rightarrow Bi(5; 0{,}1)$$

$$P(X < 2) = p(X = 0) + p(X = 1) = \binom{5}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^5 + \binom{5}{1} \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^4 = 0{,}5905 + 0{,}3281 = 0{,}9185$$

$$\boxed{P(X < 2) = 0{,}9185}$$

**b)** Neste caso

$$X \rightarrow Bi(100; 0{,}1)$$

Pero como

nxp= 10 > 5

nxq= 90 > 5

aproximamos a binomial $X$ pola normal $X'$ con media $\mu = n \times p = 100 \times 0{,}1 = 10$ e desviación típica $\sigma = \sqrt{n \times p \times q} = \sqrt{100 \times 0{,}1 \times 0{,}9} = 3$

$$X \rightarrow Bi(100; 0{,}1)\ ; \quad X' \rightarrow N(10; 3)$$

Ademais aplicamos a corrección de medio punto ou corrección de Yates. Así

Tipificación $\qquad Z = \frac{X'-10}{3} \rightarrow N(0{,}1)$

$$\begin{aligned} P(X < 9) = P(X' \leq 8{,}5) = P\left(\frac{X'-10}{3} \leq \frac{8{,}5-10}{3}\right) &= P(Z \leq -0{,}5) = P(Z \geq 0{,}5) \\ &= 1 - P(Z \leq 0{,}5) = 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(X < 9) = 0{,}3085}$$