PROBABILIDADE

Índice

1. Experimentos aleatorios. Espazo mostral

Se se deixa caer un obxecto dende unha altura de 10 metros, é posible, cuns coñecementos básicos de Física, determinar o que ocorrerá a continuación: tempo que tardará o obxecto en caer ao chan e velocidade coa que chegará. O mesmo ocorre se se pon a quentar auga no lume, pódese predicir en que momento comezará a ferver, poderíase calcular o tempo que tardará en evaporarse todo a auga etc.
Estes experimentos nos que, sempre que se repitan nas mesmas condicións, pódese predicir cal será o resultado, chámanse **experimentos deterministas**.

Hai outros experimentos nos que non se pode predicir o resultado. Por exemplo, tírase un dado con seis caras numeradas do un ao seis. Seguro que sae un número do un ao seis, pero non se pode predicir cal será. O mesmo ocorre se se tira unha moeda, non se pode predicir se sairá cara ou cruz. Estes son os experimentos dos que se ocupa a probabilidade, chámanse **experimentos aleatorios**. Son experimentos cuxo resultado non se pode predicir, depende do azar.

Chámase **espazo mostral** ao conxunto de todos os resultados dun experimento aleatorio e simbolízase pola letra *E*.

Exemplos:

- Lanzar unha moeda e observar se sae cara ou cruz: E = {cara, cruz}.
- Tirar un dado: E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
- Elixir un naipe nunha baralla de 40 cartas: E = {1, 2, 3, 4, ..., 39, 40}, supoñendo que a cada naipe asignáselle un número distinto do 1 ao 40.
- Lanzar dous dados: E = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}.

2. Sucesos

Se se tira un dado, pode saír o 1, pode saír o 5, pode saír un número par, pode saír un número impar, pode saír un número maior que 3, pode saír un número etc. Cada unha destas posibilidades asociadas a un experimento aleatorio, neste caso o de tirar un dado, chámaselle **suceso**. Para designar calquera suceso, tamén chamado **suceso aleatorio**, utilizaranse letras maiúsculas. O conxunto de todos os sucesos que ocorren nun experimento aleatorio chámase **espazo de sucesos** e desígnase coa letra *S*.
Por exemplo, para o lanzamento do dado, algúns dos sucesos son:
A = {1}, B = {número par}, C = {maior que 3} etc.

O suceso B = {número par} é un **suceso composto**, porque pode descompoñerse noutros sucesos, xa que o feito de que salga un número par ao tirar un dado é o mesmo que dicir que salga o 2, o 4 ou o 6. É dicir, B = {número par} = {2, 4, 6}. Con todo, non é posible descompoñer o suceso A = {1}, por esta razón chámaselle **suceso elemental**.

Ao espazo muestral tamén se lle chama **suceso seguro**, *E*, xa que inclúe todas as posibilidades do experimento e, con toda seguridade, unha delas ocorrerá, co que o suceso se verifica sempre. Tamén falarase do **suceso imposible**, como o suceso que nunca ocorre, e representarase polo símbolo ∅, que tamén se utiliza para representar ao conxunto que non posúe elementos, o conxunto baleiro.

2.1. Operacións con sucesos

Un suceso *A* está **incluído** (contido) noutro suceso *B* se todo suceso elemental de *A* pertence tamén a *B*. Represéntase por $A \subset B$.

Dous sucesos *A* e *B* son **iguais** se están formados polos mesmos sucesos elementais. Represéntase por $A = B$.

Chámase **unión** de dous sucesos *A* e *B*, e represéntase por $A \cup B$, ao suceso que ocorre cando ocorre *A*, ocorre *B* ou ambos.

Chámase **intersección** de dous sucesos *A* e *B*, e represéntase por $A \cap B$, ao suceso que ocorre cando ocorren *A* e *B* simultaneamente.

Por exemplo, no experimento de extraer unha carta dunha baralla española, se se chama *A* ao suceso que consiste en extraer unha carta de ouros e *B* ao suceso que consiste en elixir un as, entón, $A \cup B$ verifícase se a carta elixida é un ouro, ou un as, ou ambas as cousas, é dicir, o as de ouros. Por outra banda, $A \cap B$ verificarase unicamente cando a carta sexa o as de ouros.

Chamarase **suceso contrario** de *A*, e representarase mediante $\overline{A}$, ao que ocorre cando non ocorre *A*.

Danse as seguintes propiedades con respecto das operacións entre sucesos que se acaban de definir:

- $A \cup \overline{A} = E$, xa que sempre ocorre ou ben *A* ou ben o contrario $\overline{A}$, polo tanto é o suceso seguro.
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$, xa que *A* e o seu contrario $\overline{A}$, nunca poden ocorrer simultaneamente.
- $\overline{\overline{A}} = A$, o contrario do contrario de *A* é o propio *A*.
- $\overline{E} = \emptyset$, é dicir, o contrario do suceso seguro é o suceso imposible, e polo tanto, $\overline{\phi} = E$.

- $\begin{cases} \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \end{cases}$: Estas dúas propiedades, que se denominan **Leis de De Morgan**, din que o contrario dunha unión é a intersección de contrarios, e o contrario dunha intersección é a unión de contrarios.

Dise que dous sucesos *A* e *B* son **sucesos incompatibles** se a súa intersección é o suceso imposible, é dicir, $A \cap B = \phi$. Por exemplo, a segunda propiedade indica que un suceso e o seu contrario sempre son incompatibles.

3. Frecuencia e probabilidade. Regra de Laplace

Tírase un dado de seis caras *n* veces e anótanse os resultados obtidos, se se lle chama *A* ao suceso "saír 2", o número de veces das *n* que se obtén o número 2 chámase **frecuencia absoluta** do suceso *A*, vaise denominar n_A. O cociente entre o número de veces que se obtén o 2 e o número de veces que se tira o dado, chámase **frecuencia relativa** do suceso *A*, que representarase por $f_r(A)$, é dicir, $f_r(A) = \frac{n_A}{n}$.

Necesariamente $f_r(A)$ é un número comprendido entre 0 e 1 (podendo ser 0 ou 1), xa que $n_A \leq n$.

Que ocorrerá co número $f_r(A)$, cando o número de veces que se tira o dado sexa moi grande? Supoñendo que o dado está ben equilibrado, é razoable pensar que o número de veces que se obtén 2 será o mesmo que o número de veces que se obtén 1, igual que o número de veces que se obtén 3 etc. Polo tanto, o número de veces que se obtén 2, tenderá a ser unha sexta parte do número de veces que se tira o dado. Noutras palabras, o límite da frecuencia relativa, cando *n* tende a infinito será $\frac{1}{6}$:

$\lim_{n\to\infty} f_r(A) = \frac{1}{6}$.

Este feito non se pode demostrar, senón que é un feito empírico, experimental, sempre que se comproba ocorre. Da mesma maneira que se se tira unha moeda equilibrada un gran número de veces, espérase que máis ou menos a metade das veces obtéñase cara, e a outra metade obtéñase cruz.

Este límite ideal da frecuencia relativa dun suceso cando o número de veces que se repite o experimento tende a infinito é o que poderíase chamar *probabilidade*, porque mide a maior ou menor disposición dun suceso para verificarse.

Baseándose nas características das frecuencias relativas, pódese definir a **probabilidade** como calquera función *P* que fai corresponder un número real a cada suceso e que verifique as seguintes propiedades:

- $P(A) \geq 0$, para calquera suceso *A*.
- $P(E) = 1$, é dicir, a probablidad do suceso seguro é 1.
- Se A e B son dos sucesos incompatibles, entón $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

A estas propiedades chámaselles **axiomas da probabilidade** e a partir delas pódense deducir as seguintes propiedades, que tamén verifica a probabilidade:

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, que permite calcular a probabilidade dun suceso coñecida a do seu contrario.
- $P(\emptyset) = 0$, é dicir, a probabilidade do suceso imposible é 0.
- Se *A* e *B* son sucesos calquera, compatibles, entón:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Polo xeral traballarase con experimentos aleatorios cuxos espazos mostrales estarán compostos por sucesos simples igualmente probables. Para estes casos, o problema práctico do cálculo de probabilidades é bastante sinxelo.

Por exemplo, no caso do dado, o espazo muestral E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, está composto por seis sucesos elementais, todos eles coas mesmas posibilidades de ocorrer, é dicir, hai a mesma probabilidade de que salga 1, que de que salga 2, que de que salga 3 etc. Como P(E) = 1, e E = {1} ∪ {2} ∪ {3} ∪ {4} ∪ {5} ∪ {6}; entón
1 = P(E) = P({1}) + P({2}) + P({3}) + P({4}) + P({5}) + P({6});
porque os sucesos son incompatibles dous a dous (non poden darse dous deles simultaneamente). Polo tanto, necesariamente a probabilidade de cada un é $\frac{1}{6}$, para que a suma anterior sexa 1.
Se se quere calcular a probabilidade de que o resultado de tirar o dado sexa par, P(par) = P({2}) + P({4}) + P({6}) = $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

O que se fixo ao final é dividir o número de casos favorables a que saia par, 3, entre o número de casos posibles, que eran 6. A esta regra, que permite calcular probabilidades facilmente, chámaselle regra de Laplace, e pódese xeneralizar da forma seguinte:

Regra de Laplace: Se *E* é un espazo muestral composto por sucesos elementais igualmente probables, entón, para calquera suceso *A*:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables a A}}{\text{número de casos posibles}}$$

Demostración: Ao ser os sucesos elementais incompatibles dous a dous e formar a súa unión todo o espazo mostral, tense:
$1 = P(E) = P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = nP(A_i)$
Polo tanto: $P(A_i) = \frac{1}{n}$.
Sexa $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_h$ o suceso formado polos *h* primeiros sucesos elementais.
Verifícase: $P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_h) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_h) = hP(A_i) = \frac{h}{n}$.
Neste cociente, *h* representa o número de resultados favorables e *n* o número de resultados posibles.

Exemplos:

- Tírase unha moeda, cal é a probabilidade de obter cara?

  Hai dous casos posibles: cara e cruz; e un favorable, entón P(cara) = $\frac{1}{2}$.

- Sácase unha carta dunha baralla española, cal é a probabilidade de sacar un rei?

  Hai 40 casos posibles, dos cales 4 son reis, entón P(rei) = $\frac{4}{40} = \frac{1}{10}$.

- Tíranse dúas moedas, cal é a probabilidade de obter unha cara e unha cruz?

  Se se chama cara = c e cruz = +, hai catro casos coas mesmas posibilidades:{cc, c+, +c, ++}; dos cales, dous son favorables, que son, c+ e +c. Polo tanto,

  P(cara e cruz) = $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

4. Combinatoria

Para poder aplicar a regra de Laplace é necesario contar os casos posibles e os casos favorables dun experimento, cousa que non sempre é doado de facer.

A **combinatoria** proporciona unha serie de fórmulas e procedementos para contar de cantos xeitos diferentes se pode facer unha elección de varios obxectos de entre unha colección.

Cando o que se quere é saber de cantos xeitos se poden elixir grupos de *m* obxectos de entre unha colección formada por *n* obxectos, loxicamente dependerá de como se faga a elección, isto é, se se ten en conta a orde dos elementos ou non e se se poden repetir ou non os elementos.

Se se toma como exemplo "elixir nunha clase delegado ou delegada e subdelegado ou subdelegada", está claro que non se poden repetir os elementos e que si importa a orde, non é o mesmo elixir a María para delegada e a Manolo para subdelegado que a Manolo para delegado e a María para subdelegada.
Pero se o exemplo é "cubrir unha primitiva", este consiste en elixir 6 números de 49. Non importa a orden dos elementos e non se poden repetir.

As principais fórmulas combinatorias son as correspondentes a variacións, permutacións e combinacións.

- **Variacións** de *n* elementos tomados de *m* en *m*, $V_{n,m}$. Utilízanse para contar os diferentes grupos de *m* elementos que se poden forman en conxuntos de *n* elementos (m < n). Os elementos non se poden repetir e importa a orde.

$$V_{n,m} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

- **Variacións con repetición** de *n* elementos tomados de *m* en *m*, $VR_{n,m}$. Son as variacións nas que os elementos se poden repetir ou ser diferentes.

$$VR_{n,m} = n^m$$

- **Permutacións**, P_n. Son as variacións nas que m = n.

$$P_n = n!$$

- **Combinacións** de *n* elementos tomados de *m* en *m*, $C_{n,m}$. Utilízanse para contar o número de grupos diferentes que se poden formar con *m* elementos distintos, elixidos dun conxunto de *n* elementos. Non importa a orde e ningún elemento se pode repetir.

$$C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$$

Hai que recordar que $n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot \ldots \cdot 3\cdot 2\cdot 1$ e que $0! = 1$.

Exemplos:

- De cantos xeitos diferentes se pode formar o podio nunha carreira de 100 metros con 8 atletas?

  Débense formar grupos de 3 elementos con 8 atletas nos que non se poden repetir e importa a orde. Son $V_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5!} = 8\cdot 7\cdot 6 = 336$ posibilidades.

- Cantos números naturais de tres cifras se poden formar cos díxitos 1, 2, 3, 4 e 5?

  Importa a orde e pódense repetir. Polo tanto, $VR_{5,3} = 5^3 = 125$ números.

- De cantas formas diferentes se poden sentar 3 persoas nun banco?

  Hai que formar grupos de 3 persoas con 3 elementos. Polo tanto, $P_3 = 3! = 6$ formas.

- Cantas combinacións de 4 letras se poden facer coas letras de MIGUEL?

  Téñense que formar con 6 letras grupos de 4 en 4 nos que non importa a orde e non se pode repetir.

  Polo tanto, $C_{6,4} = \binom{6}{4} = \dfrac{6!}{4!\cdot(6-4)!} = \dfrac{6\cdot 5\cdot 4!}{4!\cdot 2!} = 15$ combinacións.

5. Experimentos compostos. Estratexias de reconto

Un **experimento composto** é o que está formado por varios simples: "tirar dous dados", "tirar varias veces un dado", "extraer cartas dunha baralla"... Nestes experimentos é importante saber, para poder calcular a probabilidade dun suceso, se os experimentos son independentes ou non, é dicir, se cada proba ou extracción realízase nas mesmas condicións ou non que a anterior: extraccións con substitución ou extraccións sen substitución.

No caso dos experimentos compostos téñense diferentes técnicas para organizar os datos, isto é, os posibles resultados, e así obter de forma máis sinxela as probabilidades:

- **Diagrama cartesiano ou táboa de dobre entrada.** É útil en experimentos compostos formados por dous simples, na fila superior colócanse os sucesos elementais dun experimento simple e na columna da esquerda os sucesos elementais do outro experimento simple.
- **Diagrama de árbore.** É un gráfico que nace dun tronco e os seus trazos vanse ramificando coma unha árbore. Ao final de cada rama obtéñense os diferentes resultados do experimento, así coma a súa probabilidade.

Exemplos:

- Calcular a probabilidade de que ao lanzar dous dados a suma dos números obtidos sexa 10. Cal é a suma máis probable?

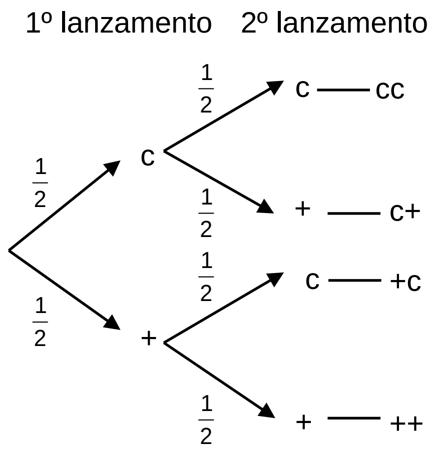
  Para obter a probabilidade aplicarase a regra de Laplace: $P(10) = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$.

  A suma máis probable é 7, xa que é a suma que máis veces se repite.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

- Se se considera o experimento de lanzar dúas moedas, construír o espazo mostral cun diagrama de árbore.

  Divídese o experimento en lanzar unha moeda e anotar o resultado, e lanzar a outra e anotar o resultado.



E = {cc, c+, +c, ++}

6. Dependencia ou independencia de sucesos

6.1. Probabilidade condicionada. Sucesos dependentes

Tense unha baralla española da que se extraen dúas cartas consecutivamente, sen reemplazamiento. Sácase a primeira carta e resulta ser un rei, cal é a probabilidade de que a segunda sexa tamén un rei?

Como a primeira foi un rei e non se devolve, antes da segunda extracción hai 39 cartas, das cales 3 son reis. Polo tanto, a probabilidade de que a segunda sexa un rei é $\frac{3}{39}$.

Supóñase que a primeira carta non foi un rei, cal é a probabilidade de que a segunda o sexa?
Se a primeira non foi un rei, antes da segunda extracción hai 39 cartas, entre as cales se atopan os 4 reis. Polo tanto, a probabilidade agora é $\frac{4}{39}$.
O que se fixo en ambos os casos é calcular unha probabilidade condicionada, é dicir, calculouse a probabilidade dun suceso, condicionado a que outro suceso ocorreu.

Dados dous sucesos *A* e *B*, a **probabilidade de *B* condicionada a *A***, que se denota B / A, é:

$$P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \text{ sempre que } P(A) \neq 0$$

Da fórmula anterior, se se despexa a probabilidade da intersección, tense

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B / A)$$

Tamén se pode deducir que $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A / B)$.

Calquera destas fórmulas, que resultan moi útiles para calcular a probabilidade dun suceso composto por dous sucesos consecutivos, recibe o nome de **probabilidade composta ou do produto**.

Por exemplo, o problema de calcular a probabilidade de que dúas cartas extraídas da baralla española sen reemplazamiento sexan reis, pódese reformular da seguinte forma: Sexa R_1 o suceso "saír rei na primeira extracción" e R_2 o suceso "saír rei na segunda extracción". Quérese calcular a probabilidade de que saia rei na primeira e na segunda extracción, é dicir, $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2 / R_1)$.

Esta fórmula di que a probabilidade de sacar rei na primeira e na segunda extracción é igual á probabilidade de que saia rei na primeira, multiplicada pola probabilidade de que saia rei na segunda, sabendo que a primeira foi un rei. Entón,

$P(R_1 \cap R_2) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} = \frac{1}{130}$.

Dise que dous sucesos *A* e *B* son **dependentes** se a ocurrencia dun deles modifica a probabilidade do outro:

$$P(B / A) \neq P(B) \text{ ou } P(A / B) \neq P(A)$$

Isto é equivalente a: *A* e *B* son dependentes $\Leftrightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$

6.2. Sucesos independentes

Aínda que para certos sucesos o feito de saber que ocorreu previamente algún outro pode ser importante, noutros casos esta información é irrelevante. Por exemplo, no caso anterior, supóñase que as dúas cartas extráense con reemplazamiento, isto é, despois de sacada e anotada a primeira carta devólvese ao mazo. É dicir, agora ao sacar a segunda carta hai 40 na baralla, incluídos os 4 reis. O feito de saber que a primeira carta foi rei ou as non condiciona de ningún xeito o resultado da segunda extracción. Cando se ten dous sucesos para os que a verificación dun non condiciona a do outro, dise que os dous sucesos son independentes.

En termos de probabilidade condicionada, dise que *A* e *B* son dous sucesos **independentes** se:

$$P(B / A) = P(B) \text{ ou } P(A / B) = P(A)$$

Isto é equivalente a: *A* e *B* son independentes $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

A mesma fórmula pódese aplicar cando en lugar de dous son máis os sucesos independentes dous a dous. Por exemplo, tírase unha moeda 10 veces, cal é a probabilidade de que saian 10 caras?

O resultado de cada lanzamento é independente dos demais. Polo tanto, a probabilidade de que saian 10 caras será o produto das probabilidades de obter cara en cada lanzamento, é dicir:

$P(10 \text{ caras}) = P(\text{cara na } 1^a) \cdot P(\text{cara na } 2^a) \cdot \ldots \cdot P(\text{cara na } 10^a) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$

7. Probabilidade total

En ocasións, é posible calcular a probabilidade dun suceso en función das probabilidades condicionadas dese suceso con respecto a un conxunto de sucesos coñecidos. Isto ocorre cando o conxunto de sucesos coñecidos constitúe un sistema completo de sucesos.

Un conxunto de sucesos $A_1, A_2, \dots, A_n$ é un **sistema completo de sucesos** se verifica as seguintes condicións:

- Son incompatibles dous a dous: $A_i \cap A_j = \emptyset$ sempre que $i \neq j$.
- A unión de todos eles é o suceso seguro: $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$.

Teorema da probabilidade total: Sexa $A_1, A_2, \dots, A_n$ un sistema completo de sucesos tales que a probabilidade de cada un deles é distinta de cero, e sexa *B* un suceso calquera do que se coñecen as probabilidades condicionadas $P(B / A_i)$. A **probabilidade do suceso *B*** vén dada pola expresión:

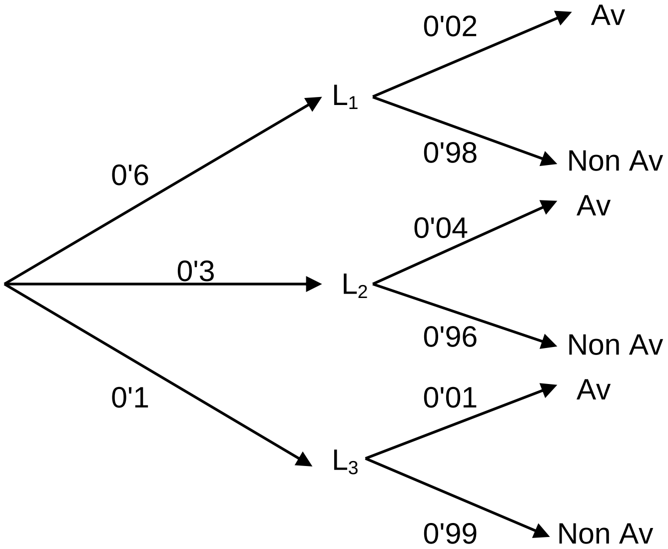
$$P(B) = P(A_1)\cdot P(B / A_1) + P(A_2)\cdot P(B / A_2) + ... + P(A_n)\cdot P(B / A_n)$$

Demostración: Como $A_1, A_2, \dots, A_n$ son incompatibles dous a dous, tamén o son $A_1 \cap B, A_2 \cap B, \dots, A_n \cap B$. Ademais $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B)$, logo
$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B) =$
$= P(A_1)\cdot P(B / A_1) + P(A_2)\cdot P(B / A_2) + ... + P(A_n)\cdot P(B / A_n)$

Exemplo:

Unha compañía dedicada ao transporte público explota tres liñas dunha cidade, de forma que o 60 % dos autobuses cobre o servizo da primeira liña, o 30 % cobre a segunda e o 10 % cobre o servizo da terceira liña. Sábese que a probabilidade de que, diariamente, un autobús se averíe é do 2 %, 4 % e 1 %, respectivamente, para cada liña. Determinar a probabilidade de que, nun día, un autobús sufra unha avaría.

As tres liñas forman un sistema completo de sucesos. Son incompatibles e a súa unión constitúe a totalidade das liñas que cobren os autobuses.
O suceso Av = {Sufrir unha avaría} pode producirse nas tres liñas, $\{L_1, L_2, L_3\}$.



Segundo o teorema da probabilidade total e tendo en conta as probabilidades do diagrama de árbore, tense:
$P(Av) = P(L_1)\cdot P(Av/L_1) + P(L_2)\cdot P(Av/L_2) + P(L_3)\cdot P(Av/L_3) =$
$= 0'6\cdot 0'02 + 0'3\cdot 0'04 + 0'1\cdot 0'01 = 0'025$

8. Teorema de Bayes

Se se interpreta un sistema completo de sucesos, A_1, A_2, ..., A_n, como as causas de que se produzan certos efectos, e un deses efectos é un suceso *B*, entón o teorema de Bayes permite calcular a probabilidade de que un efecto teña unha determinada causa. Noutras palabras, permite calcular a probabilidade condicionada $P(A_i / B)$ interpretando esta como a probabilidade de que a causa de B sexa A*i*.

Teorema de Bayes: Sexan os seguintes sucesos:

- A_1, A_2, …, A_n un sistema completo de sucesos, tales que a probabilidade de cada un deles é distinta de cero.
- *B* un suceso calquera do que se coñecen as probabilidades condicionadas $P(B / A_i)$.

Entón as probabilidades P(Ai / B) veñén dadas pola expresión:

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i)\cdot P(B/A_i)}{P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)+\ldots+P(A_n)\cdot P(B/A_n)}$$

Demostración: Para calquera suceso A_i cúmprese sempre, por definición de probabilidade condicionada, o seguinte: $P(A_i \cap B) = P(A_i)\cdot P(B / A_i) = P(B)\cdot P(Ai / B)$.

Despexando P(Ai / B), tense: $P(A_i / B) = \dfrac{P(A_i)\cdot P(B/A_i)}{P(B)}$.

A probabilidade P(B), polo teorema da probabilidade total, é igual a:

$P(B) = P(A_1)\cdot P(B / A_1) + P(A_2)\cdot P(B / A_2) + ... + P(A_n)\cdot P(B / A_n)$

Substituíndo na ecuación anterior, obtense a fórmula de Bayes:

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i)\cdot P(B/A_i)}{P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)+\ldots+P(A_n)\cdot P(B/A_n)}$$

As probabilidades $P(A_i)$ reciben o nome de **probabilidades a priori**, $P(A_i / B)$ chámanse **probabilidades a posteriori** e $P(B / A_i)$ denomínanse **verosimilitudes**.

A fórmula de Bayes permite calcular as probabilidades a posteriori, sempre e cando se coñezan aas probabilidades a priori e as verosimilitudes.

Exemplo:

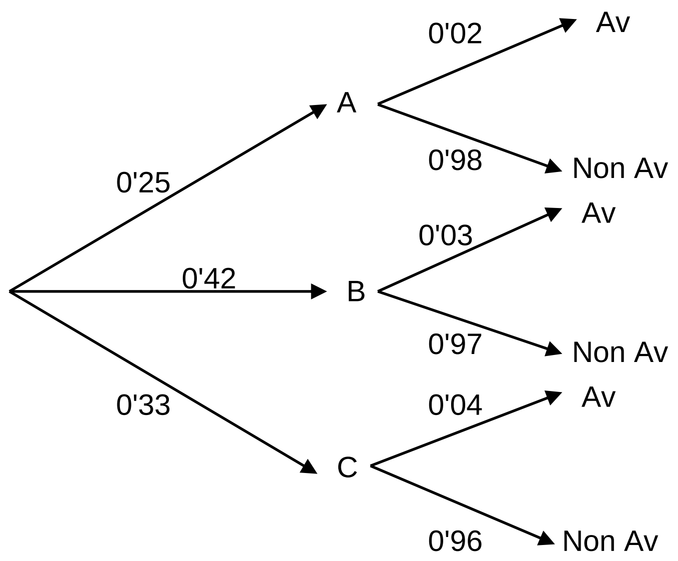
Un modelo de automóbil fabrícase en 3 factorías distintas: *A*, *B* e *C*. De *A* sae o 25 % da produción anual, de *B* o 42 % e de *C* o 33%. O 2 % dos coches fabricados en *A* sofre unha avaría o primeiro mes de rodaxe, o mesmo ocorre co 3 % dos fabricados en *B* e co 4 % dos fabricados en *C*. Un cliente ten un coche que se avariou no primeiro mes de uso, cal é a probabilidade de que se fixo en *C*?

Os sucesos *A*, *B* e *C* constitúen un sistema completo de sucesos: son incompatibles e a súa unión é toda a produción anual deste modelo.

Coñécese o suceso Av = {Sufrir unha avaría} e quérese calcular a probabilidade de que fose fabricado en *C*; trátase de achar P(C / Av) e é, segundo a fórmula de Bayes:

$$P(C / Av) = \frac{P(C)\cdot P(Av/C)}{P(A)\cdot P(Av/A)+P(B)\cdot P(Av/AB)+\ldots+P(C)\cdot P(Av/C)} =$$

$$= \frac{0'33\cdot 0'04}{0'25\cdot 0'02+0'42\cdot 0'03+\ldots+0'33\cdot 0'04} = 0'4285$$


0'02
Av
A
0'98
Non Av
0'25
Av
0'03
0'42
B
0'97
Non Av
0'33
0'04
Av
C
0'96
Non Av