Posiciones relativas de dos rectas usando ecuación vectorial de la recta.

Sean dos rectas r y s definidas por:

$$r=\left\{\begin{matrix} P=(a,b,c) \\ \vec{v}=(v_1,v_2,v_3) \end{matrix}\right\} \qquad s=\left\{\begin{matrix} Q=(a',b',c') \\ \vec{v'}=(v'_1,v'_2,v'_3) \end{matrix}\right\}$$

Se puede estudiar la posición relativa de las dos rectas discutiendo las matrices formadas por los vectores $\vec{v}$, $\vec{v'}$ y $\vec{PQ}$

$$\vec{PQ}=(a'_1-a_1, b'_2-b_2, c'_3-c_3)$$

$$A=\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v'_1 & v'_2 & v'_3 \\ a'_1-a_1 & b'_2-b_2 & c'_3-c_3 \end{pmatrix}$$

Coincidentes. Las dos rectas son la misma, los vectores $\vec{v}$, $\vec{v'}$ y $\vec{PQ}$ son proporcionales	$Rango\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v'_1 & v'_2 & v'_3 \\ a'_1-a_1 & b'_2-b_2 & c'_3-c_3 \end{pmatrix}=1$
Paralelas. Las dos rectas no tienen puntos comunes pero están contenidas en el mismo plano. Los vectores $\vec{v}$, $\vec{v'}$ son proporcionales pero no lo son a $\vec{PQ}$	$Rango\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v'_1 & v'_2 & v'_3 \end{pmatrix}=1$ $Rango\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v'_1 & v'_2 & v'_3 \\ a'_1-a_1 & b'_2-b_2 & c'_3-c_3 \end{pmatrix}=2$
Secantes. Las dos rectas se cortan en un solo punto. Los vectores $\vec{v}$, $\vec{v'}$ no son proporcionales y el vector $\vec{PQ}$ es combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{v'}$	$Rango\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v'_1 & v'_2 & v'_3 \end{pmatrix}=2$ $Rango\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v'_1 & v'_2 & v'_3 \\ a'_1-a_1 & b'_2-b_2 & c'_3-c_3 \end{pmatrix}=2$
Rectas que se cruzan. Las dos rectas no tienen puntos en común Los vectores $\vec{v}$, $\vec{v'}$ y $\vec{PQ}$ son linealmente independientes	$Rango\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v'_1 & v'_2 & v'_3 \\ a'_1-a_1 & b'_2-b_2 & c'_3-c_3 \end{pmatrix}=3$