Boletín 16. Ecuaciones recta plano. Posiciones relativas

1. Calcula la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto A y tiene el vector indicado

a) $A(2,-1,-1)$ y $\vec{v}=(-2,-4,4)$ b) $A(1,1,1)$ y $\vec{v}=(-2,-2,-2)$

2. Calcula la ecuación continua y las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por cada par de puntos.

a) $A(2,-1,-1)$ y $B(0,-5,3)$ b) $A(1,1,1)$ y $B(-1,-1,-1)$

3. Calcula la ecuación general de la recta que pasa por cada par de puntos

a) $A(3,0,-7)$ y $B(-7,2,-1)$ b) $A(0,0,0)$ y $B(1,0,0)$

4. Obtén la ecuación vectorial del plano en cada caso

a) $A(2,-1,-1)$, $B(0,-5,3)$ y $C(1,1,1)$. b) $A(1,1,1)$, $B(-1,-1,-1)$ y $C(1,2,2)$

5. Halla las ecuaciones paramétricas del plano correspondiente

a) $A(3,0,-7)$, $\vec{u}=(-10,2,6)$ y $\vec{v}=(0,3,10)$

b) $A(0,0,0)$, $\vec{u}=(1,0,0)$ y $\vec{v}=(4,4,4)$

6. Halla la ecuación general del plano que pasa por el punto P(-1,0,2) y contiene a la recta de ecuación

$$r: \frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+4}{3}$$

7. Obtén la ecuación general del plano que pasa por los puntos A (1,1,-7), B (5,2,-9) y C(5,-4, 0).

8. Determina la posición de estas rectas.

$$r: (x,y,z)=(0,-5,3)+t(1,1,1)$$

$$s: \frac{x-3}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{2}$$

9. Determina las posiciones relativas de las siguientes rectas

$$r: (x,y,z)=(2,2,2)+t(1,1,1)$$

$$s: (x,y,z)=(0,0,0)+t(1,0,0)$$

10. Estudia la posición relativa de las rectas

$$r: \left.\begin{array}{r} y-z-3=0 \\ 2x-z+1=0 \end{array}\right\}$$

$$s: \left.\begin{array}{r} -y+z=0 \\ x-3y+z-1=0 \end{array}\right\}$$

11. Calcula la posición relativa de la recta y el plano

$$r: \left.\begin{array}{r} x+y-z+2=0 \\ -x+3y-z+1=0 \end{array}\right\} \qquad \pi: x+z+1=0$$

12. Halla la posición relativa de estas parejas de planos

a	b	c	d
$\pi_1: -x+2y-z=0$ $\pi_2: x-2y+z+1=0$	$\pi_1: x-z+11=0$ $\pi_2: -2y-z+11=0$	$\pi_1: -6x+5y-3z+2=0$ $\pi_2: x-y+z=0$	$\pi_1: x-2y-z+1=0$ $\pi_2: -2x+4y-2z+3=0$

13. Escribe la ecuación vectorial de un plano que sea paralelo al plano que pasa por los puntos A(0,1,2), B(-1,2,3) y C(2,-1,4). ¿Cuantos planos hay que verifiquen esta condición?

14. Halla la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo a las rectas

$$r: \frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+4}{3} \qquad s: \frac{x}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{3}$$

15. Determina la posición relativas de los planos:

$$\pi_1: x-z+2=0$$
$$\pi_2: 2x+2y+3z+3=0$$
$$\pi_3: 3x+8y+7z+1=0$$

16. ¿Qué relación deben cumplir a y b para que los tres vectores sean co-planarios?

$$\vec{u}=(a,2,b) \qquad \vec{v}=(3,a,5) \qquad \vec{w}=(1,-b,-1)$$

17. Dados los puntos A(-3,2,9), B(1,0,-7) y C(0,4,-3). ¿Están alineados?. Justifica tu respuesta

18. Calcula el valor de m para que las siguientes rectas se corten en un punto

$$r: \frac{x-m}{-1}=\frac{y+10}{4}=\frac{z+3}{0} \qquad s: \left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=6+4\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{array}\right\}$$

19. Sean A y B los puntos en el espacio de coordenadas A(0,1,2), B(1,2,3). Encontrar la ecuación paramétrica de la recta que pasa por A y B. ¿Existen valores de r y s para los cuales el punto C(3,r+s,r-s) pertenezca a la recta r calculada antes? En caso afirmativo calcular los valore de r y s.

20. Halla la ecuación continua de una recta que pasa por el punto P (1,0,0) y corta a las rectas

$$r_1: \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2} \qquad r_2: \left.\begin{array}{r} x+2y+z-1=0 \\ 2x-y-z-3=0 \end{array}\right\}$$

21. Dados los puntos P (1,2,2) y Q(2,a,a). Halla el valor de a para que la recta que une P y Q pase por el origen de coordenadas.
Hallar la ecuación de la recta como intersección de dos planos y en forma paramétrica.

Soluciones

1)

a) $\vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{v} \rightarrow (x, y, z) = (2, -1, -1) + t(-2, -4, 4)$

b) $\vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{v} \rightarrow (x, y, z) = (1, 1, 1) + t(-2, -2, -2)$

2)

a) $\vec{AB} = (-2, -4, 4) \rightarrow \dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y+1}{-4} = \dfrac{z+1}{4}$

b) $\vec{AB} = (-2, -2, -2) \rightarrow \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-1}{-2}$

3)

a) $\vec{AB} = (-10, 2, 6) \rightarrow \dfrac{x-3}{-10} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+7}{6}$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x - 6 = -10y \\ 6x - 18 = -10z - 70 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 5y - 3 = 0 \\ 6x + 10z + 52 = 0 \end{array}\right\}$$

b) $\vec{AB} = (1, 0, 0) \rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\}$

4)

a) $\vec{AB} = (-2, -4, 4)$ $\qquad \vec{AC} = (-1, 2, 2)$

$\vec{OP} = \vec{OA} + \lambda\vec{AB} + \mu\vec{AC} \rightarrow (x, y, z) = (2, -1, -1) + \lambda(-2, -4, 4) + \mu(-1, 2, 2)$

b) $\vec{AB} = (-2, -2, -2)$ $\qquad \vec{AC} = (0, 1, 1)$

$\vec{OP} = \vec{OA} + \lambda\vec{AB} + \mu\vec{AC} \rightarrow (x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(-2, -2, -2) + \mu(0, 1, 1)$

5)

a) $\pi: \left.\begin{array}{l} x = 3 - 10\lambda \\ y = 2\lambda + 3\mu \\ z = -7 + 6\lambda + 10\mu \end{array}\right\}$ $\qquad$ b) $\pi: \left.\begin{array}{l} x = \lambda + 4\mu \\ y = 4\mu \\ z = 4\mu \end{array}\right\}$

6)

El plano está definido por $P(-1, 0, 2)$, el vector director de la recta $\vec{v_2} = (1, -1, 3)$ y el vector $\vec{AP}$, con $A(1, 3, -4) \in r$.

$\vec{AP} = (-2, -3, 6)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x+1 & y-0 & z-2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi: 3x - 12y - 5z + 13 = 0$$

7)

$\vec{AB} = (4, -3, 16)$ $\qquad \vec{AC} = (4, -5, 7)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+7 \\ 4 & -3 & 16 \\ 4 & -5 & 7 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi: 59x + 36y - 8z - 151 = 0$$

8) Las rectas son paralelas
9) Las rectas son secantes
10) Las rectas se cruzan

11) La recta y el plano se cortan en un punto

12)

a	b	c	d
Paralelos	Secantes	Secantes	Secantes

13)
(x,y,z)= (0,0,0)+λ(-1,1,1)+β(2,-2,2)
Hay infinitos planos

14)
π: 8x-7y-5z = 0

15) Los planos se cortan en un punto

16)

$-a^2 + 4ab - 3b^2 + 16 = 0$

17)
El punto C no está en la recta que pasa por A y B

18)
m= 4

19)

$$m: \left.\begin{aligned} x &= t \\ y &= 1+t \\ z &= 2+t \end{aligned}\right\}$$

$$\left\{\begin{aligned} r &= \frac{9}{2} \\ s &= -\frac{1}{2} \end{aligned}\right.$$

20)

$$\text{La recta es } s: \left.\begin{aligned} x-y-z-1=0 \\ x+2y+z-1=0 \end{aligned}\right\} \to s: \left.\begin{aligned} x &= t \\ y &= 2-2t \\ z &= -3+3t \end{aligned}\right\} \to s: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{3}$$

21) a=4;

$$r: \left.\begin{aligned} x &= 1+t \\ y &= 2+2t \\ z &= 2+2t \end{aligned}\right\} \to r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{2} \to r: \left.\begin{aligned} 2x-y=0 \\ 2x-z=0 \end{aligned}\right\}$$