Unidade 5: Xeometría Afín do espazo

Programa:

1. **Vectores.**
   - 1.1. **Vectores do espazo.**
   - 1.2. **Coordenadas no espazo.**

2. **Planos.**
   - 2.1. **Ecuación vectorial do plano**
   - 2.2. **Outras ecuacións dun plano: paramétrica e xeral.**

3. **Rectas.**
   - 3.1. **Ecuación vectorial da recta.**
   - 3.2. **Outras ecuacións da recta: paramétrica, continua e xeral.**

4. **Posicións relativas.**
   - 4.1. **Posición relativa de dúas rectas.**
   - 4.2. **Posición relativa de dous e de tres planos.**
   - 4.3. **Posición relativa dunha recta e dun plano.**

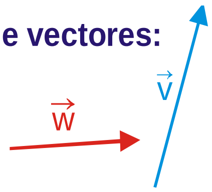
Xeometría: figuras e números

Descartes, mediante a introdución de coordenadas, conseguiu transformar os problemas xeométricos en problemas numéricos.

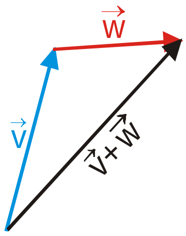
Partindo dese enfoque da Xeometría, trataremos dous tipos de problemas no espazo:

- **Xeometría Afín**: Problemas de incidencia e paralelismo entre rectas e planos.
- **Xeometría Euclídea**: Situacións nas que interveñen o concepto de distancia e a medida de ángulos.

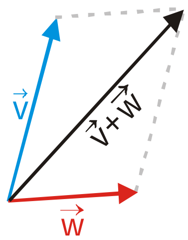
Suma de vectores:

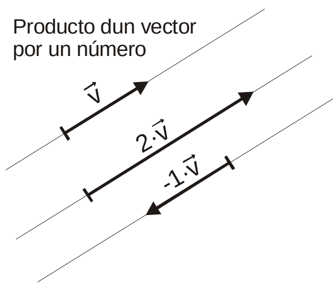


Colócase un a continuación do outro:



Empregando o método do paralelogramo: colócanse coa orixe en común e complétase o paralelogramo





Vectores libres do espazo

Vector libre: Intuitivamente, un vector libre é un segmento orientado que podemos situar en calquera lugar do espazo.

Un vector libre queda caracterizado coñecendo:

- **Módulo:** Lonxitude do segmento.
- **Dirección:** A recta que o contén e tódalas paralelas a ela.
- **Sentido:** Para cada dirección hai dous sentidos.

Suma de vectores: A suma de vectores libres do plano faise colocando un dos vectores a continuación do outro: O vector suma é o que vai desde a orixe do primeiro ata o extremo do segundo (outro xeito equivalente de definir a suma de vectores é mediante a regra do paralelogramo).

Produto por un número: Ó multiplicar un vector por un número real obtemos outro vector coa mesma dirección, de módulo o produto do módulo polo número, e co mesmo sentido do vector orixinal se o número é positivo ou sentido contrario se número é negativo.

Con esas operacións os vectores libres do espazo teñen estrutura de espazo vectorial sobre R e chamarémoslle V^3.

Chamaremos **combinación lineal** dun conxunto de vectores a unha suma deses vectores multiplicados por números. Unha combinación lineal de vectores é outro vector.

Nos espazos vectoriais chámase **dimensión** ao número máximo de vectores independentes.

Se eliximos tres vectores do espazo con diferentes direccións e que non están os tres contidos no mesmo plano, eses vectores son independentes pois non é posible poñer un deles como combinación dos outros dous. A dimensión deste espazo vectorial é, pois, 3.

Eliximos tres vectores independentes, que chamaremos **base** $B=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ de V^3. Podemos poñer cada vector do espazo como combinación lineal dos elementos desa base:

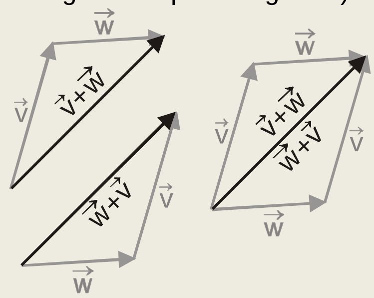
$$\forall \vec{v} \in V^3 \quad \exists v_1, v_2, v_3 \in R \text{ tal que } \vec{v}=v_1\vec{e}_1+v_2\vec{e}_2+v_3\vec{e}_3$$

Dos números v_1, v_2 e v_3 dicimos que son as **compoñentes** do vector $\vec{v}$ respecto da base B.

Unha vez elixida unha base, podemos utilizar, en lugar dun segmento orientado para cada un dos vectores libres do espazo, as súas compoñentes (v_1,v_2,v_3).

V^3 espazo vectorial:

O diagrama seguinte demostra que a suma de vectores é conmutativa (calquera que sexa a orde da suma, o vector resultante é a diagonal do paralelogramo).



De xeito similar, poderíamos ir demostrando que os vectores do espazo cumpren tódalas propiedades que definen a

Vectores coa mesma dirección

Definición: Diremos que dous vectores non nulos están aliñados cando teñen a mesma dirección.

Teorema:: Se dous vectores teñen a mesma dirección, entón podemos atopar un número que multiplicado por un dea o outro.

A implicación contraria tamén é certa:

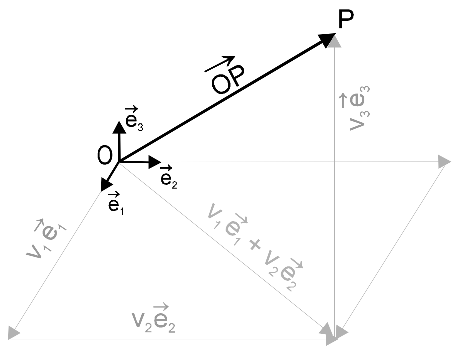
$$\vec{v} \parallel \vec{w} \Leftrightarrow \exists \lambda \in R \text{ tal que } \vec{v} = \lambda \cdot \vec{w}$$

Demostración: Se os vectores teñen o mesmo senso, o número é $\lambda=\dfrac{|\vec{v}|}{|\vec{w}|}$ e, se teñen senso contrario, é $\lambda=-\dfrac{|\vec{v}|}{|\vec{w}|}$.

Só temos que ter en conta a definición do produto dun vector por un número para comprobar que $\vec{v}$ e $\lambda\cdot\vec{w}$ teñen o mesmo módulo, a mesma dirección e o mesmo sentido. Son iguais.

Vectores e coordenadas

Chámase **espazo afín** ó conxunto E dos puntos do espazo cos vectores libres V^3 e as súas operacións: Espazo afín$\equiv(E,V^3,+,\cdot)$.



$$\vec{OP} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3$$

Fixamos un **sistema de referencia**: Un punto, que será a orixe de coordenadas, e unha base vectores de V^3 que, en certo xeito, equivalen aos eixes de coordenadas[1].

As **coordenadas** do punto P son as compoñentes do vector que vai da orixe a ese punto: $P \equiv (v_1, v_2, v_3)$.

Ó vector $\vec{OP}$, que vai da orixe a P, chamarémoslle **vector de posición** do punto P.

Dese xeito, podemos interpretar a terna (v_1, v_2, v_3) como as coordenadas dun punto ou como as compoñentes do vector de posición do punto, o que resulta realmente útil á hora de abordar algúns problemas.

Podemos calcular o vector que vai dun punto a outro simplemente restando as súas coordenadas:

$$\vec{OQ} = \vec{OP} + \vec{PQ} \Rightarrow \vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$$

Exemplo:

$\vec{OQ} \equiv (2, \quad 5, \quad -1)$

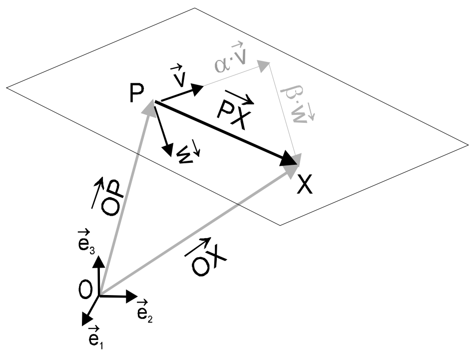
$\vec{OP} \equiv (0, \quad -2 \quad 3)$

$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} \equiv$

$\equiv (2-0, \quad 5-(-2), \quad -1-3) =$

$= (2, \quad 7, \quad -4)$

Ecuación dun plano no espazo



Para descubrir a ecuación dun plano no espazo temos que atopar unha condición que só a verifiquen os puntos do plano.

Partiremos dun punto do plano, P, e de dous vectores *contidos* no plano e con distinta dirección, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, que chamaremos **vectores de dirección** do plano.

Dado un punto xenérico X do plano, o vector que vai de P a X, $\vec{PX}$, está contido no plano e, polo tanto, pode poñerse como combinación lineal de $\vec{v}$ e $\vec{w}$: $\vec{PX} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$

$$\vec{OX} = \vec{OP} + \vec{PX} \Leftrightarrow \vec{OX} = \vec{OP} + \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{w}$$

Esa ecuación só a cumpren os puntos do plano: é a **ecuación vectorial do plano**.

Por compoñentes, a ecuación anterior queda:

Exemplo: Atopar a ecuación do plano π que pasa polos puntos (2,2,3), (0,1,3) e (3,2,5).

Solución: Utilizamos como vectores de dirección do plano os vectores que van dun dos puntos ós outros dous:

$$\vec{v} = (2,2,3) - (0,1,3) = (2,1,0)$$
$$\vec{w} = (3,2,5) - (0,1,3) = (3,1,2)$$

Ecuación vectorial do plano π:

$$(x, y, z) = (0,1,3) + \alpha(2,1,0) + \beta(3,1,2)$$

[1] Para poder definir de xeito formalmente riguroso os eixes de coordenadas debemos definir antes como medir a escala de cada eixe e a perpendicularidade. Empregando vectores evitamos eses problemas.

$$(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + \alpha \cdot (v_1, v_2, v_3) + \beta \cdot (w_1, w_2, w_3)$$

Sendo (x, y, z) un punto xenérico, (p_1, p_2, p_3) un punto do plano e (v_1, v_2, v_3) e (w_1, w_2, w_3) son vectores de dirección.

Dando valores a α e a β obtemos puntos do plano. Por exemplo, para α=1e β=-2, temos:

(0, 1, 3) + 1·(2, 1, 0) -2(3, 1, 2) =
= (-4, 0, -1)

Outras ecuacións dun plano

Desenvolvendo a ecuación vectorial obtemos outras ecuacións dun plano no espazo:

$$\left.\begin{array}{l} x = p_1 + \alpha \cdot v_1 + \beta \cdot w_1 \\ y = p_2 + \alpha \cdot v_2 + \beta \cdot w_2 \\ z = p_3 + \alpha \cdot v_3 + \beta \cdot w_3 \end{array}\right\} \textbf{ ecuacións paramétricas}$$

Eliminando os parámetros α e β obtemos a **ecuación xeral**:

$$Ax+By+Cz+D=0 \Leftrightarrow Ax+By+Cz=D$$

Exemplo: Calculemos as ecuacións parámetrica e xeral do plano π anterior.

Solución: Ecuacións paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2\alpha + 3\beta \\ y = 1 + \alpha + \beta \\ z = 3 + 2\beta \end{array}\right\}$$

Ecuación xeral:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2\alpha + 3\beta \\ y = 1 + \alpha + \beta \\ z = 3 + 2\beta \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x - 2y = -2 + \beta \\ z = 3 + 2\beta \end{array}\right\}$$

$$2x - 4y - z = -7$$

Ecuación da recta no espazo

Partiremos dun punto da recta, P, e dun vector coa mesma dirección ca recta, $\vec{v}$, **vector de dirección** da recta.

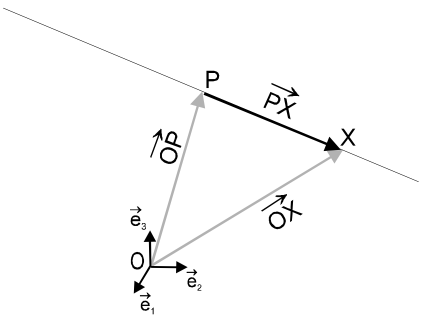
O vector que vai de P a un punto xenérico X da recta, $\overrightarrow{PX}$, ten a mesma dirección ca $\vec{v}$ (o que significa que $\overrightarrow{PX} = \lambda \cdot \vec{v}$) e esa condición só a cumpren os puntos da recta. É a **ecuación vectorial** dunha recta no espazo:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PX} \Leftrightarrow \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \vec{v}$$

Escrita en forma de compoñentes, queda:

$$(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + \lambda \cdot (v_1, v_2, v_3)$$

Onde (x, y, z) é un punto xenérico, (p_1, p_2, p_3) é un punto da recta e (v_1, v_2, v_3) é un vector de dirección.



Exemplo: Atopar a ecuación da recta que pasa polos puntos A(1,0,-3) e B(3,-2,2).

Solución: Un vector de dirección da recta é o vector $\overrightarrow{AB}$:

$$\vec{v} = (3, -2, 2) - (1, 0, -3) = (2, -2, 5)$$

Ecuación vectorial da recta:

$$(x, y, z) = (1, 0, -3) + \lambda(2, -2, 5)$$

Dando valores a λ obtemos puntos da recta. Por exemplo, para λ=1, temos:

(1, 0, -3) + 1·(2, -2, 5) = (3, -2, 2)

Outras ecuacións da recta

Desenvolvendo a ecuación vectorial obtemos outras expresións da ecuación dunha recta no espazo:

$$(x,y,z)=(p_1,p_2,p_3)+\lambda\cdot(v_1,v_2,v_3)\xrightarrow[\text{e igualando}]{\text{operando}}\left\{\begin{array}{l} x=p_1+\lambda\cdot v_1 \\ y=p_2+\lambda\cdot v_2 \\ z=p_3+\lambda\cdot v_3 \end{array}\right.$$

Expresión que recibe o nome de **ecuacións paramétricas**.

Despexamos o λ en cada unha das ecuacións:

$$\lambda=\frac{x-p_1}{v_1}\qquad \lambda=\frac{y-p_2}{v_2}\qquad \lambda=\frac{z-p_3}{v_3}$$

Igualando obtemos as **ecuacións continuas** da recta:

$$\boxed{\frac{x-p_1}{v_1}=\frac{y-p_2}{v_2}=\frac{z-p_3}{v_3}}$$

Tendo en conta que unha recta queda determinada pola intersección de dous planos, tamén podemos describir unha recta mediante un sistema formado polas ecuacións deses planos:

$$\left.\begin{array}{r} \pi\equiv Ax+By+Cz+D=0 \\ \pi'\equiv A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{array}\right\}$$ **Ecuacións xerais** da recta.

Exemplo: Ecuacións paramétricas, continua e xeral de:

$$(x,y,z)=(1,0,-3)+\lambda(2,-2,5)$$

Solución: Ecuacións paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x=1+2\lambda \\ y=-2\lambda \\ z=-3+5\lambda \end{array}\right\}$$

Ecuacións continuas:

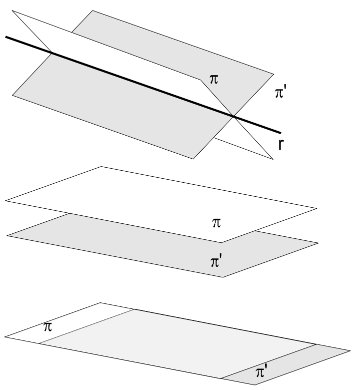
$$\left.\begin{array}{l} \lambda=\dfrac{x-1}{2} \\ \lambda=\dfrac{y}{-2} \\ \lambda=\dfrac{z+3}{5} \end{array}\right\}\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z+3}{5}$$

Ecuacións xerais:

$$\left.\begin{array}{l} x=1+2\lambda \\ y=-2\lambda \\ z=-3+5\lambda \end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ 5x-2z=11 \end{array}\right\}$$

Fixarse que, en realidade, son as ecuacións de dous planos (que

Posición relativa de dous planos



Dous planos no espazo só poden adoptar 3 posicións relativas:

- Cortarse nunha recta.
- Ser paralelos.
- Ser coincidentes.

Sexan π e π' dous planos no espazo de ecuacións xerais:

$$\pi\equiv Ax+By+Cz=D\qquad \pi'\equiv A'x+B'y+C'z=D'.$$

Estudar a súa posición relativa equivale a resolver o sistema:

$$\left.\begin{array}{r} Ax+By+Cz=D \\ A'x+B'y+C'z=D' \end{array}\right\}$$

É dun sistema de 2 ecuacións e 3 incógnitas. Poden darse os seguintes casos:

- $\text{Rango}(A) = \text{rango}(M) = 1$, sistema compatible indeterminado. As solucións dependen de 2 parámetros (ec. paramétrica dun plano): Os planos son coincidentes.

  Unha das ecuacións obtense multiplicando a outra por un número. Os coeficientes A, B, C e D son proporcionais:

$$\pi = \pi' \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$$

Exemplo:

$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv 2x + 4y - 2z = 6 \\ \pi' \equiv -3x - 6y + 3z = -9\end{array}\right\}$$

$$\frac{2}{-3} = \frac{4}{-6} = \frac{-2}{3} = \frac{6}{-9}$$

- $\text{Rango}(A) = \text{rango}(M) = 2$ sistema compatible indeterminado. As solucións dependen de 1 parámetro (corresponden á ecuación paramétrica dunha recta). Os planos córtanse nunha recta.

Exemplo:

$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv 2x + 3y - 4z = 1 \\ \pi' \equiv -x + 5y - z = 3\end{array}\right\} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$$

- $[\text{Rango}(A) = 1] \neq [\text{rango}(M) = 2]$, sistema incompatible. Os planos son paralelos. Neste caso os valores dos coeficientes de x, y e z dos planos son proporcionais pero non así os termos independentes:

$$\pi \parallel \pi' \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$$

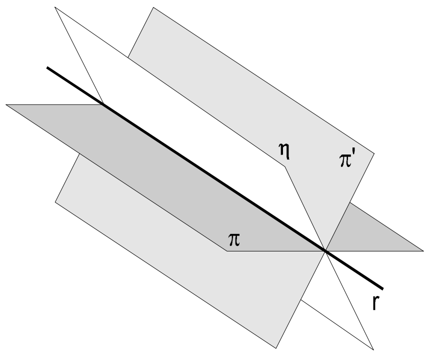
Exemplo:

$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv 2x + 4y - 2z = 6 \\ \pi' \equiv -3x - 6y + 3z = -1\end{array}\right\}$$

$$\frac{2}{-3} = \frac{4}{-6} = \frac{-2}{3} \neq \frac{6}{-1}$$

Feixe de planos

O conxunto de tódolos planos que se cortan nunha recta forman un **feixe de planos.**



Sexan π e π' dous planos distintos dese feixe, con ecuacións:

$$\pi \equiv Ax + By + Cz = D$$

$$\pi' \equiv A'x + B'y + C'z = D'.$$

A intersección deses dous planos é a recta común a todos os planos do feixe: $\left.\begin{array}{r}Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0\end{array}\right\} \equiv r$

Engadindo a ese sistema a ecuación de calquera outro plano do feixe, a solución non varía (segue a ser a recta *r*), o que só pode ocorrer se a ecuación dese plano é combinación das ecuacións de π e π' polo tanto, a ecuación dun plano calquera do feixe será:

$$\eta \equiv \alpha(Ax + By + Cz + D) + \beta(A'x + B'y + C'z + D') = 0$$

Para non ter que manexar dous parámetros, consideramos a posibilidade de que α sexa ou non 0 (para poder dividir β/α)

$$\eta \equiv \begin{cases} \alpha \neq 0 \Rightarrow Ax + By + Cz + D + \dfrac{\beta}{\alpha}(A'x + B'y + C'z + D') = 0 \\ \alpha = 0 \Rightarrow A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

Exemplo: Ecuación do feixe de planos que contén ós planos:

$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv 2x - 4z = 1 \\ \pi' \equiv x + 5y - z = 0\end{array}\right\}$$

Solución:

$$\eta \equiv \alpha(2x - 4z - 1) + \beta(x + 5y - z) = 0$$

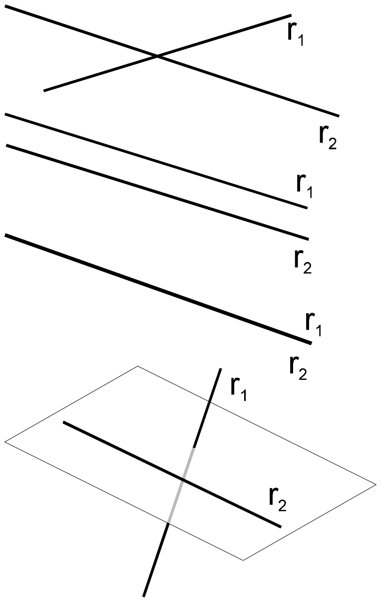
ou

$$\eta \equiv \begin{cases} 2x - 4z - 1 + t(x + 5y - z) = 0 \\ 2x - y - 4z - 1 = 0 \end{cases}$$

(fixarse que a última ecuación é, simplemente, π')

Facendo $\frac{\beta}{\alpha} = t$ obtemos a ecuación do feixe dependendo dun único parámetro *t* (ó darlle valores o *t* obtéñense tódolos planos do feixe agás o π'):

$$\eta \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz + D + t\left(A'x + B'y + C'z + D'\right) = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$



Posición relativa de dúas rectas

Dúas rectas no espazo poden adoptar 4 posicións relativas:

- Cortarse nun punto.
- Ser paralelas.
- Ser coincidentes.
- Cruzarse: As rectas teñen distintas direccións pero, ó non estar no mesmo plano, non se cortan.

Sexan r_1 e r_2 dúas rectas no espazo de ecuacións xerais:

$$r_1 \equiv \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_1'x + B_1'y + C_1'z = D_1' \end{cases} \quad e \quad r_2 \equiv \begin{cases} A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \\ A_2'x + B_2'y + C_2'z = D_2' \end{cases}$$

Estudar a súa posición relativa equivale a resolver o sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ \pi' \equiv A_1'x + B_1'y + C_1'z = D_1' \\ \eta \equiv A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \\ \eta' \equiv A_2'x + B_2'y + C_2'z = D_2' \end{array}\right\}$$

É un sistema de 4 ecuacións e 3 incógnitas que corresponden as ecuacións de 4 planos que se cortan dous a dous nunha recta.

Poden darse os seguintes casos (os rangos son, polo menos, 2):

- $\text{Rango}(A) = \text{rango}(M) = 2$, sistema indeterminado. Os planos η e η' pertencen o feixe de planos que determinan π e π'. As rectas teñen que ser coincidentes.
- $\text{Rango}(A) = \text{rango}(M) = 3$, sistema compatible determinado. As rectas córtanse nun punto.
- $[\text{Rango}(A) = 2] \neq [\text{rango}(M) = 3]$, sistema incompatible. Os planos η e η' son paralelos a planos do feixe que determinan π e π'. As rectas son paralelas..
- $[\text{Rango}(A) = 3] \neq [\text{rango}(M) = 4]$, sistema incompatible., η e η' non pertencen ó feixe que determinan π e π'. As rectas teñen direccións diferentes pero non se cortan, crúzanse.

Exemplo:
Se as rectas nos fosen dadas con outro tipo de ecuación:

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-3} = z \quad e \quad s \equiv \frac{x-1}{-4} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6}$$

poderiamos seguir outros camiños máis rápidos.

De aí obtemos directamente a seguinte información:

$$\left.\begin{array}{l} P = (0,1,0) \\ Q = (1,0,0) \\ \vec{v} = (2,-3,1) \\ \vec{w} = (-4,2,6) \end{array}\right\}$$

E, así, podemos determinar o vector $\overrightarrow{QP}$, estudando a continuación se está ou non no mesmo plano que $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Tamén podemos estudar a posición relativa de dúas rectas, r e s, mediante a matriz:

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv (p_1, p_2, p_3) + \lambda(v_1, v_2, v_3) \\ s \equiv (q_1, q_2, q_3) + \mu(w_1, w_2, w_3) \end{array} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} p_1 - q_1 & p_2 - q_2 & p_3 - q_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

Temos as seguintes posibilidades:

- **Rango 1:** Rectas coincidentes.
- **Rango 2:** As rectas córtanse (vectores de dirección non aliñados) ou son paralelas (compoñentes dos vectores de dirección proporcionais).
- **Rango 3:** As rectas crúzanse.

Exemplo:

Posición relativa das rectas:

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-3} = z \quad \text{e} \quad s \equiv \frac{x-1}{-4} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6}$$

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} P = (0,1,0) \\ Q = (1,0,0) \\ \vec{v} = (2,-3,1) \\ \vec{w} = (-4,2,6) \end{array} \right\} \rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Estudiamos o rango da matriz A:

$$\left|(-1)\right| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) \geq 1$$

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\right| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) \geq 2$$

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & -7 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & 2 & -6 \end{pmatrix}\right| = 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Os vectores de dirección non teñen as compoñentes proporcionais:

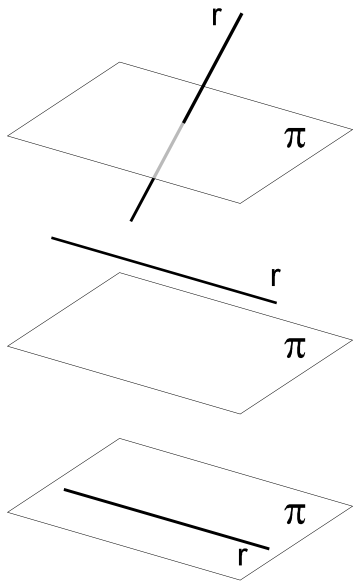
$$\frac{2}{-4} \neq \frac{-3}{2} \neq \frac{1}{6}$$

As rectas teñen que cortarse.

Posición relativa dunha recta e dun plano

Unha recta e un plano no espazo poden adoptar as seguintes posicións relativas:

- Cortarse nun punto.
- Ser paralelos.
- A recta estar contida no plano.



Sexan *r* unha recta e π un plano no espazo, de ecuacións xerais:

$$r \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz = D \\ A'x + B'y + C'z = D' \end{cases} \quad \text{e} \quad \pi \equiv Ex + Fy + Gz = H.$$

Estudar a súa posición relativa equivale a resolver o seguinte sistema de tres ecuacións e tres incógnitas (o rango é polo menos 2 por ser as dúas primeiras as ecuacións dunha recta):

$$\left. \begin{array}{r} Ax + By + Cz = D \\ A'x + B'y + C'z = D' \\ Ex + Fy + Gz = H \end{array} \right\}$$

Poden darse as seguintes posibilidades

- Rango (A) = rango (M) = 2, o sistema é compatible indeterminado. A recta está contida no plano (o sistema ten infinitas solucións).
- $\text{Rango}(A) = \text{rango}(M) = 3$, sistema compatible determinado. A recta e o plano córtanse nun punto (solución única).
- $[\text{Rango}(A) = 2] \neq [\text{rango}(M) = 3]$, sistema incompatible. A recta e paralela ó plano (non ten solución).