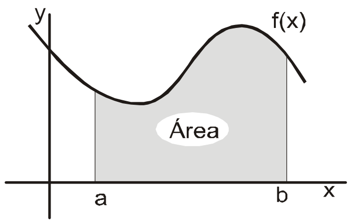
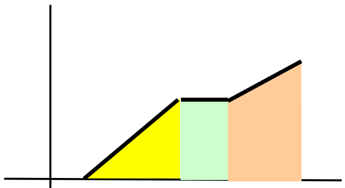
Unidade 12: Integral definida

Programa:

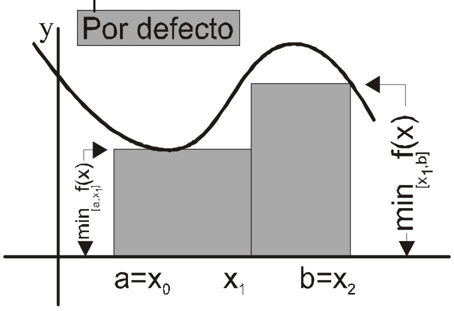
1.1 Área baixo dunha gráfica



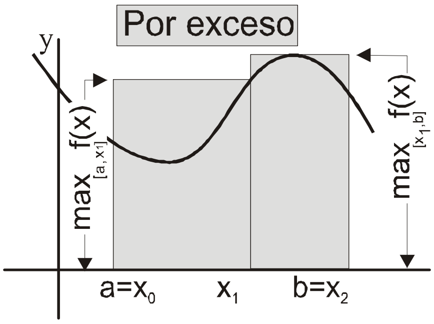
O problema de calcular a área limitada pola gráfica dunha función e o eixe X, entre dous valores dados, resulta moi simple cando a función é unha recta: a rexión formada será un triángulo, un rectángulo ou un trapecio, e coñecemos fórmulas sinxelas para esas figuras. Se a gráfica fose unha poligonal, descompoñeríamos en partes rectilíneas e a área total sería a suma das partes respectivas. Porén, en xeral, a función limitará unha rexión curva e non teremos unha fórmula para calcularlle a área.



Un xeito de intentar solucionar o problema é aproximando a rexión por rectángulos, tal como se amosa na figura, co que obtemos unha aproximación desa área.



O cálculo pode realizarse por exceso ou por defecto e, se todo vai ben, obtemos resultados abondo próximos entre si.

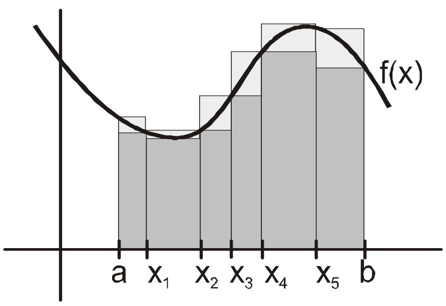


Facemos treitos e, sendo por defecto, en cada un tomaremos o menor valor que teña a función (Área Inferior); e sendo por exceso, tomamos os maiores valores (Área superior):

$$AI_1 = \sum_{i=0}^{2} |x_{i+1} - x_i| \cdot \min_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)$$

$$AS_1 = \sum_{i=0}^{2} |x_{i+1} - x_i| \cdot \max_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)$$

Para que este xeito de calcular a área teña sentido é necesario que a función sexa positiva (de non selo, a área dalgún dos rectángulos sería negativa).



Podemos mellorar as aproximacións tanto como queiramos con tal de coller máis anacos (máis puntos x_i) . Se facemos que o número de puntos tenda a infinito, as aproximacións tenderán á área :

$$AI = \lim_{n \to \infty} \left[\sum_{i=0}^{n} |x_{i+1} - x_i| \cdot \min_{[x_i, x_{i+1}]} f(x) \right]$$

$$AS = \lim_{n \to \infty} \left[\sum_{i=0}^{n} |x_{i+1} - x_i| \cdot \max_{[x_i, x_{i+1}]} f(x) \right]$$

1.2 Concepto de integral definida

Se os dous límites coinciden diremos que a área existe e que a función **é integrable no sentido de Riemann** e escribirémolo:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

As funcións continuas e as descontinuas nun número finito de puntos son integrables no sentido de Riemann, polo que tódalas funcións elementais son integrables.

Se f(x) é continua, interpretamos o símbolo $\int_a^b f(x)dx$ como:

- $\int_a^b$ representa unha suma de infinitos termos da forma *f(x)dx*, desde *a* ata *b*.
- dx corresponde á lonxitude dun intervalo infinitesimal (case puntual) de x (a base de cada rectángulo).
- Podemos considerar a función constante nese pequenísimo intervalo dx. f(x) sería ese valor constante da función no intervalo dx.

Hai algunhas funcións, bastante "raras", para as que a área non existe.

Con este método podemos saber se existen ou non AI e AS, e se coinciden ou non.

Esa notación para a área limitada pola gráfica dunha función débese ó filósofo e matemático Gottfried Wilhein Leibnitz (1646-1716).

1.3 Importancia da integral definida

O cálculo de áreas baixo dunha gráfica, aínda sendo algo moi particular, serve de modelo para problemas de moi diferente natureza.

Exemplo

A velocidade que leva un móbil vén dada pola función:

$$v(x) = 0{\prime}5 \cdot x \text{ (x tempo)}$$

Podemos atopa-la función e(x) que representa o espazo percorrido segundo o tempo partindo de v(x)?

$$e'(x) = v(x) \Leftrightarrow e(x) = \int 0'5xdx = 0'25x^2 + C$$

Pero non podemos coñecer o valor de C, o espazo inicial.

O que si podemos é pescudar o espazo percorrido entre dous intres calquera:

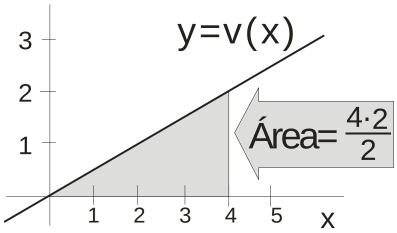
Desde x=1 a x=3: $e(3)-e(1)=0'25\cdot 3^2+C-(0'25\cdot 1^2+C)=2$

En particular, o espazo percorrido desde o intre x=0 ata calquera outro:

Desde 0 a 1: $e(1)-e(0) = 0'25\cdot 1^2+C - (0'25\cdot 0^2+C)=0'25$

Desde 0 a 4: $e(4)-e(0) = 0'25\cdot 4^2+C - (0'25\cdot 0^2+C)=4$

Desde 0 a x: $e(x)-e(0) =0'25\cdot x^2+C - (0'25\cdot 0^2+C)=0'25x^2$



Se intentamos relacionar este resultado con *v(x)*, que deu orixe a eles, encontramos que: $0'25x^2 = \frac{0'5x\cdot x}{2}$, que responde exactamente á área dun triángulo (Ver figura).

Isto é así porque, como a velocidade non é constante, non podemos calcular directamente o espazo percorrido nun intervalo [a,b], pero podemos aproximalo dividindo ese intervalo en intervalos infinitesimais nos que podemos considerar a velocidade constante:

$$e(b)-e(a) \approx \sum_{i=0}^{n} \left|x_{i+1}-x_i\right| \cdot \underset{c\in[x_i,x_{i+1}]}{v(c)}$$

Para obter o valor exacto só temos que facer que o número de divisións tenda a infinito, o que nos leva ao mesmo concepto de integral definida que obtivemos para o cálculo de áreas:

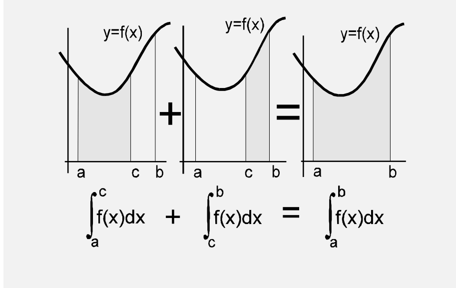
$$e(b)-e(a) = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=0}^{n} \left|x_{i+1}-x_i\right| \cdot \underset{c\in[x_i,x_{i+1}]}{v(c)}\right] = \int_a^b v(x)dx$$

Este feito repítese nunha enorme cantidade de situacións. O que nun principio parecía a solución a un problema particular (cálculo dunha área baixo da gráfica dunha función) é en realidade unha das ferramentas máis potentes da Matemática: o Cálculo Integral.

1.4 Propiedades da integral definida

Aditividade: Ao calcular a área baixo da gráfica dunha función podemos dividir o intervalo en dous ou máis anacos, calcular a área en cada un e logo sumar:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad \forall c \in (a,b)$$

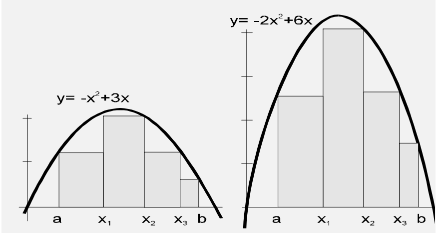


Deste xeito, dividindo o intervalo, podemos calcular a área debaixo da gráfica de funcións definidas a trozos e de funcións que sexan discontinuas nalgún punto.

Linealidade:

a) Se f(x) é unha función integrable nun intervalo [a,b], entón a función k·f(x) (k unha constante) tamén é integrable, e a súa integral é igual á integral de f(x) multiplicada por k:

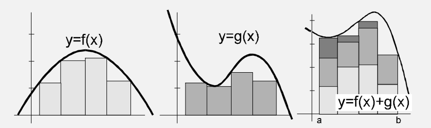
$$\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$



As bases dos rectángulos son as mesmas, e as alturas, f(x), aparecen multiplicadas polo número k, k·f(x), polo tanto a área de cada rectángulo novo virá multiplicada por k, e consecuentemente, a suma de todos eles –integral-, tamén.

b) Se f(x) e g(x) son dúas funcións integrables en [a,b], entón f(x)+g(x) tamén é integrable e a súa integral é a suma das integrais:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$



En calquera intervalo, o mínimo da función suma é maior ou igual ca suma dos mínimos e o máximo é menor ou igual que a suma dos máximos.

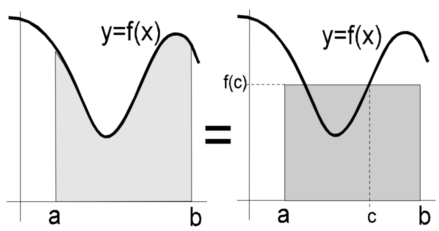
$$AI_f + AI_g \le AI_{f+g} \le AS_{f+g} \le AS_f + AS_g$$

Logo, tendo que coincidir AI e AS en cada función, f e g, os catro termos da anterior desigualdade terán que ser iguais:

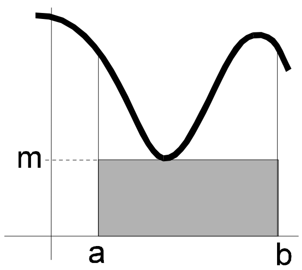
$$AI_f + AI_g = AI_{f+g} = AS_{f+g} = AS_f + AS_g$$

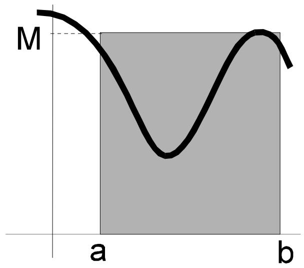
2. Teorema do Valor Medio do Calculo Integral

Sexa f(x) unha función continua no intervalo [a,b] e, polo tanto, integrable nese intervalo, entón existe un valor $c \in (a,b)$ que cumpre: $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)$



Interpretación xeométrica: O teorema indica que hai un rectángulo de base o intervalo [a,b] e altura f(c) de xeito que a súa área é igual a área baixo da gráfica da función.





Demostración: A función f(x) é continua no intervalo [a,b], e polo tanto ten un mínimo e un máximo: sexan "m" e "M" o mínimo e o máximo respectivamente.

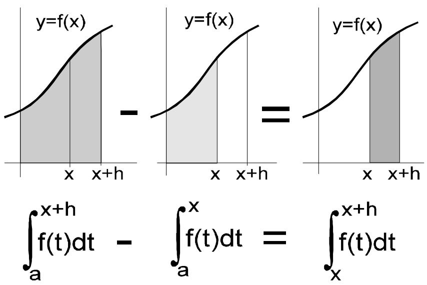
É obvio, tal como aparece na figura, que a área baixo da función está comprendida entre as áreas dos rectángulos:

$$m \cdot (b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M \cdot (b-a) \Leftrightarrow m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M$$

Dado que f(x) é unha función continua, alcanza tódolos valores comprendidos entre *m* e *M* (o mínimo e o máximo), en particular:

$$\exists c \in (a,b) \text{ t.q. } f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a)$$

3. Teorema Fundamental do Cálculo Integral



Sexa f(x) unha función continua nun intervalo pechado [a,b] e, polo tanto, integrable nese intervalo. A función F(x) definida do por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \forall x \in [a,b]$$

É derivable en (a,b) e a súa derivada é f(x), é dicir: F(x) é unha primitiva de f(x) en (a,b).

Demostración: Debemos probar que calquera que sexa *x* no intervalo (a,b), a derivada de F(x) é f(x): $\forall x \in (a,b), F'(x) = f(x)$.

É dicir: $DF(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$

Facemos a demóstración para cada unha das derivadas laterais:

$$DF^{+}(x) = \lim_{h\to 0^{+}} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

$$DF^{+}(x) = \lim_{h\to 0^{+}} \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt}{h} = \lim_{h\to 0^{+}} \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$$

A función f(x) cumpre as hipóteses do Teorema do Valor Medio do Cálculo Integral no intervalo [x,x+h], polo tanto:

$$\exists c \in (x, x+h) \text{ t.q. } \int_x^{x+h} f(t)dt = f(c)\cdot h$$

$$DF(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(c)\cdot h}{h} = \lim_{h\to 0} (f(c)) = f(x)$$

De xeito semellante demóstrase que a derivada pola esquerda de F(x) tamén é f(x):

$$DF^{-}(x) = \lim_{h\to 0^{-}} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0^{-}} \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0^{-}} \frac{\int_{x+h}^{x} f(t)dt}{h} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teorema do} \\ \text{Valor Medio} \\ \text{en } [x+h,x]}}{=} \lim_{h\to 0^{-}} \frac{f(c)\cdot h}{h} = \lim_{h\to 0^{-}} (f(c)) = f(x)$$

(Ten en conta que o tender *h* a *0* pola esquerda, *h* é negativo, de aí que *x+h* sexa menor que *x*)

4. Regla de Barrow

Sexa f(x) unha función continua no intervalo [a,b], e sexa F(x) unha primitiva de f(x), entón:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Demostración: É consecuencia do Teorema Fundamental do Cálculo Integral e de que as primitivas dunha función só se diferencian nunha constante.

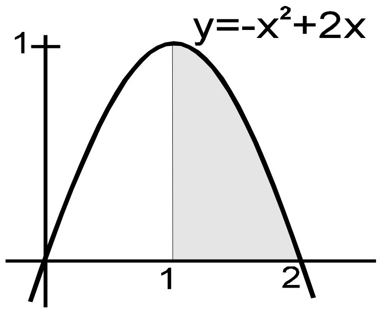
O Teorema Fundamental do Cálculo Integral dinos que a función $A(x) = \int_a^x f(t)dt$ é unha primitiva da función f(x) e, dado que as primitivas son únicas salvo a suma dunha constante, F(x) é igual a A(x)+C.

Temos:

$$F(b) - F(a) = [A(b) + C] - [A(a) + C] = A(b) - A(a)$$

$$\int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt - 0 = \int_a^b f(t)dt$$

Exemplo:



Calcula a área debaixo da gráfica da función $f(x) = -x^2 + 2x$ entre 1 e 2.

Resposta:

Calculamos unha primitiva da función f(x) para logo aplicar a Regra de Barrow:

$$\int \left(-x^2 + 2x\right)dx = -\frac{x^3}{3} + x^2$$

$$\int_1^2 \left(-x^2 + 2x\right)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_1^2 = \left(-\frac{2^3}{3} + 2^2\right) - \left(-\frac{1^3}{3} + 1^2\right) = \frac{2}{3}$$