Primitiva dunha función

A función F(x) é unha primitiva de f(x) e escríbese $F(x)=\int f(x)\,dx$ se a derivada de F(x) é f(x):

$$F(x)=\int f(x)dx \Leftrightarrow F'(x)=f(x)$$

Propiedades do cálculo de primitivas

- A primitiva dunha suma é a suma das primitivas: $\int [f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$
- A primitiva dunha función multiplicada por unha constante é igual á constante pola primitiva da función: $\int a\cdot f(x)\,dx = a\cdot\int f(x)\,dx$
- A primitiva dunha función é única salvo a suma dunha constante:
  F(x) e G(x) primitivas de f(x)⇒F(x)=G(x)+C

Primitivas elementais

Primitivas elementais son as que se deducen directamente dunha táboa de derivadas:

Función	Primitiva	Función	Primitiva
$x^r \quad (r\neq -1)$	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$	$u'\cdot u^r \quad (r\neq -1)$	$\frac{u^{r+1}}{r+1}$
$\frac{1}{x}$	Ln(x)	$\frac{u'}{u}$	Ln(u)
sen(x)	– cos(x)	$u'\cdot$ sen(u)	– cos(u)
cos(x)	sen(x)	$u'\cdot$ cos(u)	sen(u)
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	tan(x)	$\frac{u'}{\cos^2(u)}$	tan(u)
$\frac{1}{\text{sen}^2(x)}$	cotan(x)	$\frac{u'}{\text{sen}^2(u)}$	cotan(u)
$\frac{1}{1+x^2}$	arc tan(x)	$\frac{u'}{1+u^2}$	arc tan(u)
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	arc sen(x)	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	arc sen(u)
e^x	e^x	$u'\cdot e^u$	e^u

Integración por partes: $\int u'\cdot v\,dx = u\cdot v-\int u\cdot v'dx$

Utilízase cando, nun produto, unha parte simplifícase ao derivala e a outra non se complica demasiado ao integrala. En ocasións compre aplicar o método varias veces.

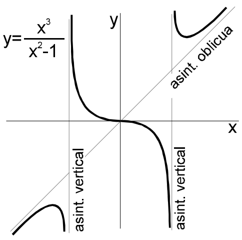
Integración por cambio de variable: $\int f(x)dx=\int f(u(t))\cdot u'(t)dt$

O método aplícase cando a segunda integral é máis doada ca primeira o que en boa medida depende do axeitado do cambio de variable que se faga.

Primitivas de funcións racionais

Unha función racional é un cociente de polinomios.

Algunhas funcións racionais teñen primitivas inmediatas, ou que se poden converter en inmediatas mediante transformacións simples ou cun cambio de variable sinxelo.



Caso I: Se o numerador é semellante á derivada do denominador, $\frac{f'(x)}{f(x)}$ a primitiva será un logaritmo neperiano: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = Ln[f(x)]$

Caso II: O denominador pode poñerse como potencia e o numerador é a derivada da base desa potencia. $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^r}dx = \int f'(x)\cdot[f(x)]^{-r}\,dx = \frac{1}{-r+1}[f(x)]^{-r+1}\ (r \neq -1)$.

Caso III: Ao derivar un "arco tanxente" dá unha función racional: $[\text{arctg}(x)]' = \frac{1}{1+x^2}$. Usamos ese resultado para calcular a primitiva das racionais do tipo $\frac{k}{x^2+a}$

Caso xeral: sempre podemos descompoñer calquera fracción alxébrica en sumas de fraccións como as dos casos anteriores, polo que poderemos reducir a primitiva de calquera función racional a unha suma de primitivas dos tipos anteriores. Antes de facer a descomposición, temos que transformar a fracción:

1. Facemos que o grao do numerador sexa menor có do denominador.
2. Debemos conseguir que o coeficiente do termo de maior grao do denominador sexa 1.
3. O tipo de descomposición depende de como sexan as raíces do denominador, polo que debemos establecer unha casuística.

   Tipo I: O denominador ten tantas raíces diferentes como o seu grao. Descomponse da forma: $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-r_1}+\ldots+\frac{A_n}{x-r_n}$ $r_1, \ldots, r_n$ raíces do denominador.

   Tipo II: As raíces do denominador son reais múltiples. A descomposición é do tipo:

   $$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-r_1}+\frac{A_1}{(x-r_1)^2}+\ldots+\frac{A_{n_1}}{(x-r_1)^{n_1}}+\frac{B_1}{x-r_2}+\ldots+\frac{B_{n_2}}{(x-r_2)^{n_2}}+\ldots$$

   Tipo III: O denominador ten raíces complexas simples. Este caso excede os contidos deste curso.