Unidade 11: Cálculo de primitivas

Programa:

1 Primitiva dunha función.
- 1.1 Concepto de primitiva dunha función.
- 1.2 Propiedades do cálculo de primitivas.
- 1.3 Primitivas elementais.

2 Integración por partes.

3 Integración por cambio de variable.

4 Primitivas de funcións racionais.

1. Primitiva dunha función

Concepto de primitiva

No tema anterior estudamos que a derivada dunha función mide a variación instantánea desa función.

En moitas ocasións é máis doado coñecer a variación dunha función que a propia función, e deberemos obter a función a partir desa variación:

Diremos que a función F(x) é unha primitiva de f(x) e escribirémolo $F(x) = \int f(x)\,dx$ se a derivada de F(x) é f(x):

$$F(x) = \int f(x)dx \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

Exemplo:

O movemento de caída libre é o que experimenta un móbil que se deixa caer sometido exclusivamente á aceleración producida pola gravidade (9'8 m/seg^2).

Queremos coñecer a ecuación dese movemento (a función que representa o espazo percorrido segundo o tempo).

Resolución:

A aceleración é a variación da velocidade respecto ó tempo. É dicir, a derivada da velocidade: $a(t) = 9'8 \ {}^{m}/_{s^2}$

Temos que atopar unha función v(t) que ó derivala dea 9'8. Esa función é: $v(t) = \int 9'8\,dt = 9'8t + C$

Para calcular a constante C –número concreto-, partimos de que no movemento de caída libre a velocidade inicial é 0. $v(0) = 9'8 \cdot 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$

Para descubrir a ecuación do movemento temos en conta que a velocidade é a variación do espazo percorrido en relación ó tempo. $e(t) = \int 9'8t\,dt = 9'8\dfrac{t^2}{2} + C$

Dado que o espazo inicial é 0: $e(0) = 4'9 \cdot 0 + C \Rightarrow C = 0$

A ecuación do movemento de caída libre é: $e(t) = \dfrac{1}{2}9'8t^2$

Propiedades do cálculo de primitivas

Das propiedades da derivación dedúcense directamente as seguintes propiedades para o cálculo de primitivas:

1.- A primitiva dunha suma é a suma das primitivas:

$$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Demostración:

Sexan F(x) e G(x) primitivas de f(x) e g(x) respectivamente, debemos probar que a derivada de F(x)+G(x) (suma das primitivas) é f(x)+g(x).

$$\left.\begin{array}{l} F(x) = \int f(x)\,dx \Leftrightarrow F'(x) = f(x) \\ G(x) = \int g(x)\,dx \Leftrightarrow G'(x) = g(x) \end{array}\right\}$$

Polo tanto: $[F(x)+G(x)]' = F'(x)+G'(x) = f(x)+g(x)$

2.- A primitiva dunha función multiplicada por unha constante é igual á constante pola primitiva da función:

$$\int a\cdot f(x)\,dx = a\cdot\int f(x)\,dx$$

Demostración:

Sexa F(x) unha primitiva de f(x). Temos que probar que a derivada de a F(x) é a f(x):

$$F(x) = \int f(x)dx \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

Polo tanto: $[a\cdot F(x)]' = a\cdot F'(x) = a\cdot f(x)$

3.- A primitiva dunha función é única salvo a suma dunha constante: F(x) e G(x) primitivas de f(x)$\Rightarrow$F(x)=G(x)+C

Demostración:

Sexan F(x) e G(x) dúas primitivas da función f(x), queremos demostrar que F(x)=G(x)+C (C un número):

$$[F(x)-G(x)]' = F'(x)-G'(x) = f(x)-f(x) = 0$$

A derivada da función $F(x) - G(x)$ é 0 en tódolos puntos. Polo tanto, a función non ten variación (a derivada mide a variación); é dicir, que ten que ser constante:

$$F(x) - G(x) = C$$

De aí que designemos por $\int f(x)dx + C$ ó conxunto de todas as primitivas dunha función f(x).

Primitivas elementais

Chámanse primitivas elementais as que se deducen directamente dunha táboa de derivadas:

Función	Primitiva	Función	Primitiva
$x^r \quad (r \neq -1)$	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$	$u' \cdot u^r \quad (r \neq -1)$	$\frac{u^{r+1}}{r+1}$
$\frac{1}{x}$	$Ln(x)$	$\frac{u'}{u}$	$Ln(u)$
$sen(x)$	$-cos(x)$	$u' \cdot sen(u)$	$-cos(u)$
$cos(x)$	$sen(x)$	$u' \cdot cos(u)$	$sen(u)$
$\frac{1}{cos^2(x)}$	$tan(x)$	$\frac{u'}{cos^2(u)}$	$tan(u)$
$\frac{1}{sen^2(x)}$	$cotan(x)$	$\frac{u'}{sen^2(u)}$	$cotan(u)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$arc\ tan(x)$	$\frac{u'}{1+u^2}$	$arc\ tan(u)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arc\ sen(x)$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$arc\ sen(u)$
e^x	e^x	$u' \cdot e^u$	e^u

Exemplos:

a) $\int 2x \cdot cos(x^2)dx = sen(x^2) + C$

b) $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$

c) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \int \frac{e^x}{1+(e^x)^2}dx = arc\ tan(e^x) + C$

Neste exemplo r
adaptación da es

d) $\int \frac{2x+4}{x^2+4x}dx = \text{Ln}\left(x^2+4x\right)+C$

e) $\int \frac{x+2}{x^2+4x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x+2)\cdot 2}{x^2+4x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x}dx =$

$= \frac{1}{2}\text{Ln}\left(x^2+4x\right)+C$

Nestoutro exemplo introducimos cambios que non alteren o valor: dividir e multiplicar por 2, ata conseguir a adaptación conveniente.

2. Integración por partes

Baséase na fórmula da derivada dun produto:

$$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Integrando a expresión anterior, resulta:

$$\int [f(x)\cdot g(x)]' dx = \int f'(x)\cdot g(x)dx + \int f(x)\cdot g'(x)dx$$

Como derivar e integrar son operacións contrarias, a integral dunha derivada dará a propia función:

$\int [f(x)\cdot g(x)]' dx = f(x)\cdot g(x)$

$$\boxed{\int f'(x)\cdot g(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)dx}$$

En ocasións a expresión anterior escríbese do seguinte xeito: $\int u'\cdot v dx = u\cdot v - \int u\cdot v' dx$

A integración por partes utilizarémola se, cando queremos calcular a primitiva dun produto, unha parte simplifícase ao derivala e a outra non se complica demasiado ao integrala. En ocasións compre aplicar o método varias veces.

Trátase de que $\int u\cdot v' dx$, o que imos integrar, sexa máis fácil ca $\int u'\cdot v dx$, que era o que deberíamos integrar.

Exemplo:

Calcular $\int x\cdot e^x dx$

Facemos:

$$v = x \Rightarrow v' = 1$$
$$u' = e^x \Rightarrow u = \int e^x dx = e^x$$

Queda:

$$\int xe^x dx = x\cdot e^x - \int 1\cdot e^x dx = xe^x - e^x + C$$

Efectivamente: $\int 1\cdot e^x dx = \int e^x dx$, é máis fácil ca $\int x\cdot e^x dx$, que era o que deberíamos integrar.

Trátase, tamén, de adaptar o que imos integrar.
Pasámonos a un formato que nos resulte máis fácil. Exemplo:

Queremos calcular $\int e^{2x+1}dx$

Facemos o cambio: $2x + 1 = t$,

logo $2 \cdot dx = dt$, de onde $dx = \frac{dt}{2}$

Agora calculamos:

$\int e^{2x+1}dx = \int e^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t = \frac{1}{2}e^{2x+1} + C$

3. Integración por cambio de variable

Baséase na aplicación da regra da cadea para a derivación dunha función composta: $[f(u)]' = f'(u) \cdot u'$ (onde u representa unha función de *x*).

Pódese demostrar que:

- Se x=u(t) é unha función derivable e con función inversa $t = u^{-1}(x)$.
- Se F(t) é unha primitiva de $f(u(t)) \cdot u'(t)$

Entón $F(u^{-1}(x))$ é unha primitiva de f(x).

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f(u(t)) \cdot u'(t)dt}$$

As derivadas elementais de funcións compostas son o exemplo máis simple da aplicación deste método, pero tamén é útil noutros casos facendo cambios axeitados -que non sempre son fáciles de descubrir-.

O método aplícase cando a segunda integral é máis doada ca primeira o que en boa medida depende do axeitado do cambio de variable que se faga.

Exemplo:

Calcular $\int \sqrt{4x+1}dx$

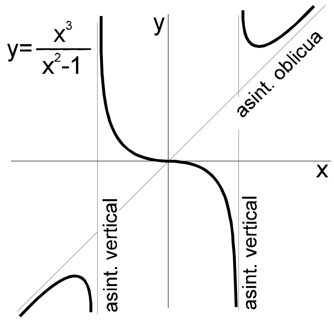
Facemos:

$$\left.\begin{array}{c} 4x+1=t \\ 4dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{4} \end{array}\right\}$$

Queda:

$$\int \sqrt{4x+1}dx = \int \sqrt{t}\,\frac{dt}{4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{12}(4x+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

4. Primitivas de funcións racionais



Unha función chámase racional cando a súa fórmula é un cociente de polinomios.

Este tipo de funcións non están definidas nos puntos onde o denominador vale 0 (as súas gráficas poden ter asíntotas verticais neses puntos).

Algunhas funcións racionais teñen primitivas inmediatas, ou que se poden converter en inmediatas mediante transformacións simples ou cun cambio de variable sinxelo:

Caso I: Tendo en conta que $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \mathrm{Ln}\left[f(x)\right]$, para calcular unha primitiva dunha racional empezamos por comprobar se é do tipo $\frac{f'(x)}{f(x)}$.

Exemplo: Caso I

$$\int \frac{-x+2}{x^2-4x}dx = \int \frac{-2(-x+2)}{-2(x^2-4x)}dx =$$

$$\frac{1}{-2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x}dx = -\frac{\mathrm{Ln}\left(x^2-4x\right)}{2}+C$$

Foi suficiente con multiplicar e dividir polo número axeitado.

Caso II: Partindo de que o denominador dun cociente pode poñerse como unha potencia de expoñente negativo e de que $\int f'(x)\cdot[f(x)]^r\,dx = \frac{1}{r+1}[f(x)]^{r+1}$ $(r \neq -1)$, podemos calcular as primitivas dalgunhas funcións racionais.

Exemplo: Caso II

$$\int \frac{1}{(x-1)^2}dx = \int (x-1)^{-2}dx = \frac{(x-1)^{-1}}{-1}+C$$

Caso III: Ao derivar "arco tanxente" dá unha función racional: $[\mathrm{arctg}(x)]' = \frac{1}{1+x^2}$. Usamos ese resultado para calcular a primitiva das racionais do tipo $\frac{k}{a\,x^2+bx+c}$

(O denominador, o mesmo que $1+x^2$, é un polinomio de grao 2 sen raíces reais, e o numerador é un número).

Exemplo: Caso III

$$\int \frac{-2}{9+x^2}dx = \int \frac{-2}{9\left(1+\frac{x^2}{9}\right)}dx =$$

$$-\frac{2}{9}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}dx \underset{\frac{x}{3}=t}{\overset{\uparrow}{=}} -\frac{6}{9}\int \frac{1}{1+t^2}dt$$

$$-\frac{6}{9}[\mathrm{arctg}(t)] = -\frac{2}{3}\left[\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{3}\right)\right]+C$$

Caso xeral: O Teorema Fundamental da Álxebra garante que podemos descompoñer calquera fracción alxébrica en sumas de fraccións como as dos casos anteriores, polo que poderemos reducir a primitiva de calquera función racional a unha suma de primitivas dos tipos anteriores.

Exemplo:

$$\int \frac{-4x^2+1}{-2x^2-4x}dx$$

Dividindo queda:

$$\int \frac{6x^2+1}{3x^2-3x}dx = \int 2dx + \int \frac{6x+1}{3x^2-3x}dx$$

A segunda integral é a problemática:

$$\int \frac{6x+1}{3x^2-3x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{6x+1}{x^2-x}dx$$

Raíces reais simples:

Continuamos con $\int \frac{6x+1}{x^2-x}dx$ intentando construír un sistema de ecuacións:

Raíces do denominador: 0 e 1.

$$\frac{6x+1}{x^2-x} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x} = \frac{xA_1 + (x-1)A_2}{(x-1)x}$$

Igualando os numeradores:

$$6x+1 = xA_1 + (x-1)A_2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases}(A_1+A_2)x = 7 \\ -A_2 = 1\end{cases} \rightarrow \begin{cases}A_1 = 7 \\ -A_2 = 1\end{cases}$$

$$\int \frac{6x+1}{x^2-x}dx = \int\left(\frac{7}{x-1} + \frac{-1}{x}\right)dx =$$

$$\int \frac{7}{x-1}dx + \int \frac{-1}{x}dx =$$

$$= 7\,\mathrm{Ln}(x-1) - \mathrm{Ln}(x) + C$$

Raíces reais múltiples:

$$\int \frac{2x-1}{x^2-2x+1}dx$$

Raíz x=1 con multiplicidade 2:

$$\frac{2x-1}{x^2-2x+1} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} \Rightarrow \begin{matrix} A_1 = 2 \\ A_2 = 1 \end{matrix}$$

Queda:

$$\int \frac{2}{x-1}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx =$$

$$= 2Ln(x-1) + \frac{1}{-2+1}(x-1)^{-2+1} + C$$

Antes de facer a descomposición, temos que transformar a fracción:

> **Iº paso:** Facemos que o grao do numerador sexa menor có do denominador.
>
> **IIº paso:** Debemos conseguir que o coeficiente do termo de maior grao do denominador sexa 1.
>
> **IIIº paso:** O tipo de descomposición depende de como sexan as raíces do denominador, polo que debemos establecer unha casuística.

Tipo I: As raíces do denominador son reais simples (o denominador ten tantas raíces diferentes como o seu grao).

A descomposición é do tipo:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-r_1} + \ldots + \frac{A_n}{x-r_n}$$

Onde r_1, ..., r_n son as raíces do denominador e A_1, ..., A_n números que debemos determinar.

Fíxate que o número de raíces do denominador ten que ser igual ao seu grao.

Tipo II: As raíces do denominador son reais múltiples.

A descomposición é do tipo:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-r_1} + \frac{A_1}{(x-r_1)^2} + \ldots + \frac{A_{n_1}}{(x-r_1)^{n_1}} + \frac{B_1}{x-r_2} + \ldots + \frac{B_{n_2}}{(x-r_2)^{n_2}} + \ldots$$

Onde r_1, r_2, ... son as raíces e n_1, n_2, ... a orde de multiplicidade de cada unha ($n_1+n_2+\ldots=n$, o grao do denominador).

Tipo III: O denominador ten raíces complexas simples ou, o que é o mesmo, na descomposición en factores do denominador hai polinomios de segundo grao irredutibles (sen raíces reais): $\frac{p(x)}{q(x)} = \ldots\ldots + \frac{A_1x+B_1}{x^2+bx+c} + \ldots$

Onde x^2+bx+c é un polinomio que non pode descompoñerse en factores (non ten raíces reais

Este caso excede os contidos deste curso. Limitarémonos aos casos máis sinxelos, cando o denominador é da forma $x^2 + a$ (a un número positivo).

Estas primitivas redúcense a un arco tanxente con sinxelo cambio de variable:

$$\int \frac{1}{x^2 + a} dx$$

Facemos o cambio $t = \frac{x}{\sqrt{a}}$ e obtemos:

$$\int \frac{1}{\left(\sqrt{a} \cdot t\right)^2 + a} \sqrt{a} \cdot dt = \int \frac{1}{a \cdot t^2 + a} \sqrt{a} \cdot dt = \frac{\sqrt{a}}{a} \int \frac{1}{t^2 + 1} dt$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{a} arc \tan(t) + C = \frac{\sqrt{a}}{a} arc \tan\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) + C$$

Raíces complexas simples

$$\int \frac{3x^2 + x + 2}{x^3 + x} dx$$

Descompoñemos o denominador en factores: $x^3 + x = x(x^2 + 1)$

$$\frac{3x^2 + x + 2}{x^3 + x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} \to \begin{cases} A = 2 \\ C = 1 \\ B = 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{3x^2 + x + 2}{x^3 + x} dx = \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{x + 1}{x^2 + 1} dx$$

$$= 2\mathrm{Ln}(x) + \int \frac{x}{x^2 + 1} dx + \int \frac{1}{x^2 + 1} dx =$$

$$2\mathrm{Ln}(x) + \frac{1}{2}\mathrm{Ln}(x^2 + 1) + arc\ tg(x) + C$$