Unidade 10: Gráficas de funcións

Programa:

1 **Características dunha función:**
   1.1 **Dominio.**
   1.2 **Continuidade**
   1.3 **Simetrías**
   1.4 **Crecemento**
   1.5 **Extremos**
   1.6 **Curvatura e puntos de inflexión.**
   1.7 **Asíntotas**

2 **Estudo do crecemento.**
   2.1 **Crecemento e derivadas.**
   2.2 **Derivadas e extremos relativos.**

3 **Derivadas sucesivas.**
   3.1 **Derivada segunda e curvatura.**
   3.2 **Derivada segunda e puntos de inflexión.**

4 **Cálculo de límites: a Regra de L'Hopital.**

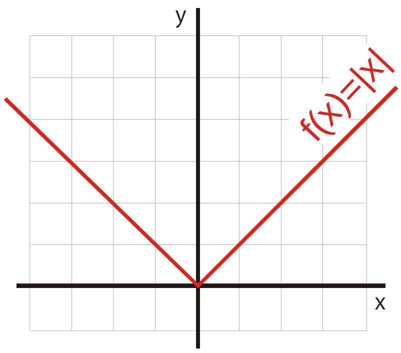
5 **Estudo das asíntotas.**

1.- Características dunha función

Dominio

É o conxunto de valores nos que está definida a función (os valores que pode tomar a variable independente "x").

Exemplo: o dominio da función $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ é todo R agás o 1 e o -1 pois de sustituir eses valores na x obteriamos 1/0, unha operación que non ten sentido.



Continuidade

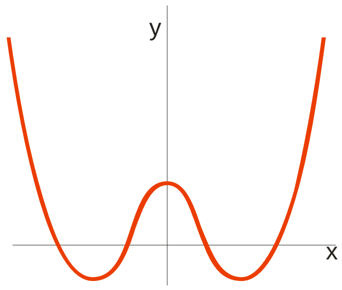
É unha medida da "regularidade" dunha función. Se unha función é continua nun intervalo, a súa gráfica pode debuxarse dun só trazo.

Exemplo: a función $f(x)=|x|$ non é elemental pero si continua. A súa gráfica debúxase cun só trazo.

Simetrías

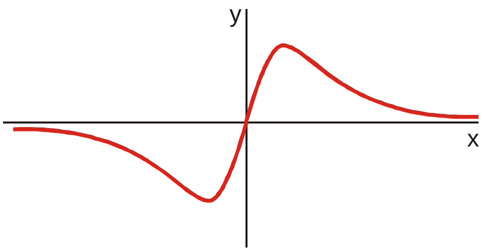
En moitas ocasións, a gráfica e os valores dunha función presentan algún tipo de simetría, o que facilita o seu estudio.

En particular, estudaremos dous tipos de simetrías:



- **Simetría en relación ao eixe Y:** O resultado da función en valores de x con signo contrario é igual: $f(x)=f(-x)$

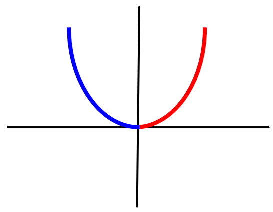
  Exemplo: a función $f(x)=x^4-10x^2+9$ é simétrica en relación ao eixe Y



- **Simetría en relación á orixe de coordenadas:** O resultado da función en valores de x con signo contrario é tamén de signo contrario: $f(x)=-f(-x)$

  Exemplo: a función $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ é simétrica en relación á orixe de coordenadas.

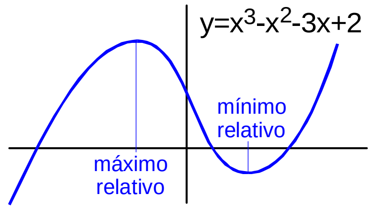
Crecemento



- Unha función é ***crecente*** se ao aumentar o valor da variable independente, x, tamén aumenta o valor da función ou, cando menos, non diminúe. (No caso de aumentar dise "estritamente crecente", como o exemplo da gráfica nos valores positivos).
- Unha función é ***decrecente*** se, ao aumentar o valor da x, diminúe o valor da función, ou polo menos non aumenta. (No caso de diminuír dise "estritamente decrecente", como o exemplo da gráfica nos valores negativos).

Extremos

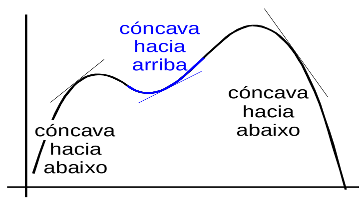
- **Máximo relativo:** Un valor da variable independente, *x*, é un **máximo relativo** se a función é maior que nos puntos que o rodean.
- Se a función é menor que nos puntos que o rodean é un **mínimo relativo**.

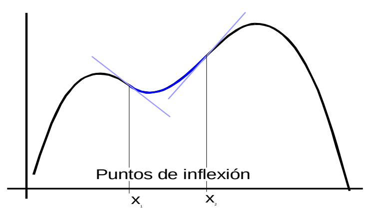


Nos extremos relativos prodúcese un cambio no crecemento da función: Nos mínimos pasa de decrecente a crecente e nos máximos de crecente a decrecente.

Curvatura

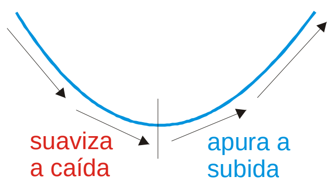
- Unha función é **cóncava hacia arriba**, ou convexa, nun punto cando a gráfica está por encima da tanxente nese punto.
- É **cóncava hacia abaixo**, ou simplemente cóncava, cando a gráfica está por debaixo da tanxente no punto.





Nos puntos onde cambia a curvatura, a tanxente corta a gráfica. Eses puntos reciben o nome de **puntos de inflexión**.

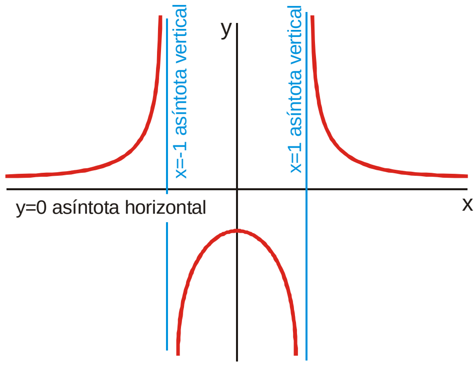
Fíxate que unha función é cóncava hacia arriba cando decrece cada vez máis amodo ou, o que é o mesmo, cando crece cada vez máis rápido. Podemos velo observando a inclinación da recta tanxente, que é cada vez máis "positiva".



Nos máximos relativos a función é cóncava hacia abaixo e nos mínimos relativos é cóncava hacia arriba.

Asíntotas

Cando a gráfica dunha función se aproxima a unha recta, diremos que esa recta é unha asíntota da función e que a función ten unha rama asintótica.



- **Asíntotas verticais:** Para que a gráfica se aproxime a unha recta vertical, ***x=a*** (***a*** un número), os valores da función cando o valor de ***x*** se aproxima ao ***a*** teñen que ser cada vez maiores en valor absoluto: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

  Se a función é elemental (definida por unha fórmula simple) o valor ***a*** non pertence ao dominio da función.

- **Asíntota horizontal:** A gráfica aproxímase a unha recta horizontal, ***y=b*** (***b*** un número). Para ***x*** moi grande ou moi pequeño ($\pm\infty$) os valores da función aproxímanse a ***b***: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$.

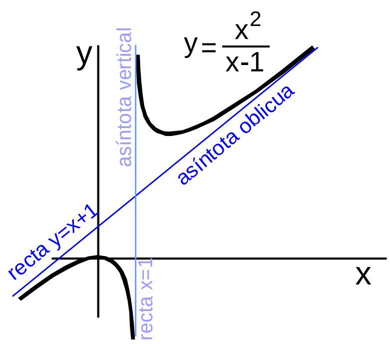
  Exemplo: As rectas x=-1 e x=1 son asíntotas verticais da función $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ e a recta y=0 (o eixe X) é unha asíntota horizontal.

- **Asíntota oblicua:** Rectas da forma y=ax+b. A gráfica aproxímase a unha recta oblicua. Debe verificarse:

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \text{e} \qquad b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax]$$

  Unha función só pode ter unha asíntota oblícua (ou ben unha horizontal, cando $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$), pero pode ter varias verticais.

  Exemplo: A recta *y=x+1* é a asíntota oblicua da función $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ e a recta x=1 unha asíntota vertical.



2.- Estudo do crecemento

Xa que a derivada mide como varía a función nun punto, se esta crece nel a derivada debe se positiva, e reciprocamente, se a función decrece nese punto a derivada debe ser negativa. Vemos agora a formalización rigorosa desas ideas:

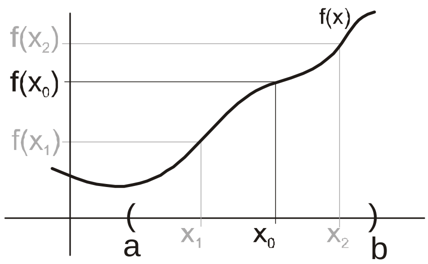
Definicións:

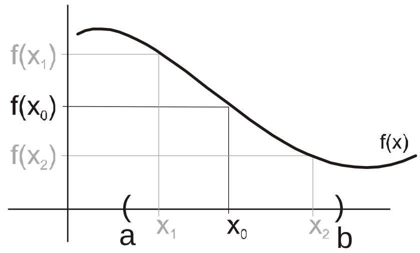
- f(x) definida nun intervalo (a,b) é **crecente** en x_0 se existe un entorno de x_0, $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)\subset(a,b)$ tal que:

  $$x_1, x_2 \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \qquad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$$

- f(x) é **decrecente** en x_0 se existe un entorno, $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)\subset(a,b)$ que cumpra:

  $$x_1, x_2 \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \qquad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$$





Derivadas e crecemento

Sexa f(x) unha función definida nun intervalo (a,b) e derivable en $x_0 \in (a,b)$, entón:

> a) Se $Df(x_0) > 0$, f(x) é crecente en x_0.
>
> b) Se $Df(x_0) < 0$, f(x) é decrecente en x_0.

Demostración: a) Podemos demostralo de xeito non rigoroso tendo en conta que nun entorno de x_0 $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)\subset(a,b)$ podemos aproximar a función pola recta tanxente de xeito que o erro sexa "desprezable".

Sexan x_1 e x_2 pertencentes a ese entorno: $x_1 < x_2$

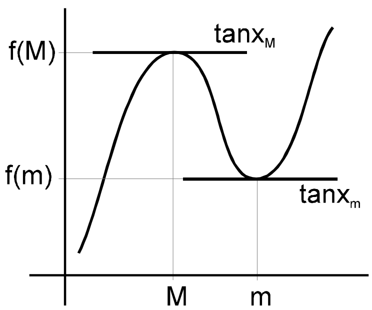
$$\left.\begin{array}{l} f(x_2)\approx f(x_0)+Df(x_0)(x_2-x_0) \\ f(x_1)\approx f(x_0)+Df(x_0)(x_1-x_0) \end{array}\right\}$$

$$f(x_2)-f(x_2)\approx Df(x_0)[(x_2-x_0)-(x_1-x_0)] = Df(x_0)(x_2-x_1) > 0$$

é dicir, f(x) é crecente en x_0 (o apartado *b* é semellante).

Derivadas e extremos relativos

Se nun punto houber un **máximo**, a función pasa de subir a baixar; ou sexa, a derivada pasa de ser positiva a ser negativa; logo, xusto nese punto debe ser nula. A idea é recíproca se tiver un **mínimo**. Formalizamos as ideas:

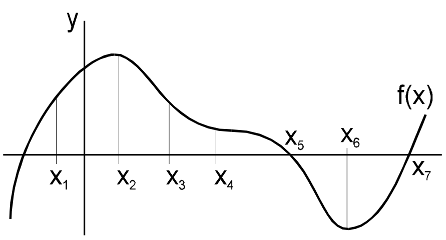


Definición: f(x) definida en (a,b) acada un **máximo relativo** en x_0 se existe un entorno de x_0, $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)\subset(a,b)$ tal que:

$$x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)\Rightarrow f(x)\le f(x_0)$$

Definición: f(x) definida en (a,b) acada un **mínimo relativo** en x_0 se existe un entorno de x_0, $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)\subset(a,b)$ tal que: $x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)\Rightarrow f(x)\ge f(x_0)$.

Teorema: Sexa f(x) unha función definida nun intervalo (a,b) e derivable en $x_0\in(a,b)$ entón, se f(x) ten un extremo relativo en x_0, a súa derivada en x_0 é 0: $Df(x_0)=0$



Demostración: Supoñamos que en x_0 hai un máximo relativo (se fose un mínimo a demostración é semellante), entón f(x) é crecente antes de x_0 e decrecente despois:

$$x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)\Rightarrow f(x)\le f(x_0)\Rightarrow\begin{cases} x<x_0 \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0 \\ x<x_0 \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0\end{cases}$$

Polo tanto, a derivada pola esquerda ten que ser positiva e negativa a derivada pola dereita:

$$D^-f(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$$

$$D^+f(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$$

Derivada positiva, a función é crecente (puntos x_1 e x_7).

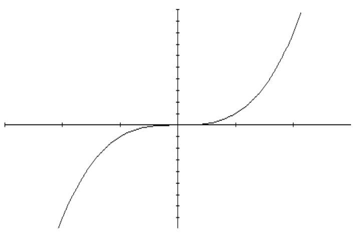
Derivada negativa, a función é decrecente (x_3, x_5).

Derivada 0, poden darse tres posibilidades:

- **Un máximo** (punto x_2).
- **Un mínimo** (punto x_6).
- **Un punto de inflexión** (x_4).

Dado que a función é derivable en x_0, as derivadas laterais teñen que coincidir e a única posibilidade é que sexan 0:

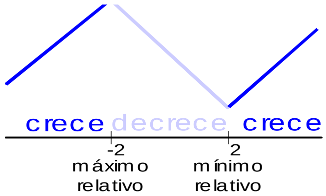
$$D^-f(x_0)=D^+f(x_0)=Df(x_0)=0$$



O recíproco deste teorema non é certo: $Df(x_0)$ pode ser 0 e non haber un extremo en x_0 (Por exemplo a función $f(x)=x^3$ ten un punto de inflexión en x=0).

Exemplo:

Representa graficamente a función: $f(x) = x^3 - 12x + 3$



Solución: Para estudiar o signo da derivada calculamos os puntos onde a derivada é 0 (son os valores nos que pode cambiar o signo).

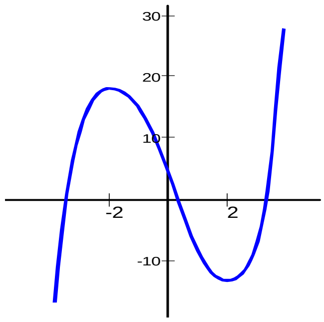
$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

$$3x^2 - 12 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

Os puntos onde a derivada é 0 delimitan tres intervalos en R. Eliximos un valor en cada un e substituímolo na función derivada:

1. (-∞,-2): f'(-3)=15, a función é crecente no intervalo.
2. (-2,2): f'(0)=-12, a función é crecente no intervalo.
3. (2,+∞): f'(3)=15, a función é crecente no intervalo.

O estudio do signo da derivada ademais de darnos unha idea da forma da gráfica da función, permítenos saber que en x=-2 hai un máximo relativo (a función cambia de crecente a decrecente) e en x=2 un mínimo relativo (pasa de decrecer a crecer).



Para obter a gráfica da función só é necesario dar algúns valores, en especial nos extremos relativos:

x	**-2**	**2**	**0**	**-3**	**-4**
f(x)	19	-13	3	12	-6

Derivadas sucesivas

Derivada segunda

Se unha función f(x) é derivable nun intervalo (a,b), existe a súa función derivada, f'(x), nese intervalo.

Definimos a derivada segunda de f(x) nun punto $x_0 \in (a,b)$ como a derivada, se existe, de f'(x) en x_0 (derivada da derivada): $D^2 f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$

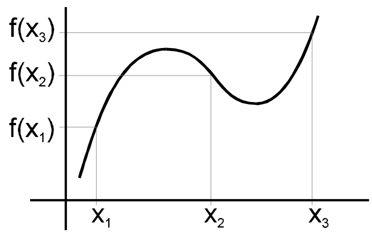
Función derivada segunda: Se existe a derivada segunda de f(x) en tódolos puntos dun intervalo podemos definir a función derivada segunda: $f''(x) = D^2 f(x) \quad \forall x \in (a,b)$

De xeito semellante á derivada segunda, podemos definir a derivada terceira de f(x) en $x_0 \in (a,b)$ como a derivada en x_0 da función derivada segunda, f''(x), e así sucesivamente.

As funcións elementais son, derivables tódalas veces que se queira, o que se coñece como ser *de clase infinita*.

Derivada segunda e curvatura

Unha función derivable nun punto é **convexa** nese punto se a súa gráfica queda por "enriba" da recta tanxente, se queda por debaixo é **cóncava** e se a gráfica corta no punto á recta tanxente é un **punto de inflexión** (cambia a curvatura).



$D^2f(x_1)<0 \Rightarrow$ f(x) é cóncava en x_1

$D^2f(x_2)=0 \Rightarrow$ en x_2 hai un punto de inflexión

$D^2f(x_3)>0 \Rightarrow$ f(x) convexa en x_3

Se a función ten derivada segunda, podemos empregala para estudar a curvatura pois:

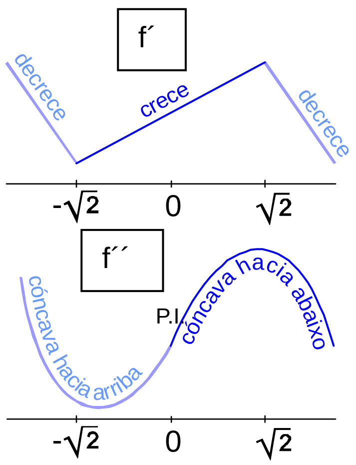
- $D^2f(x_0) < 0 \Rightarrow$ f(x) é cóncava en x_0
- $D^2f(x_0) > 0 \Rightarrow$ f(x) é convexa en x_0
- $D^2f(x_0) = 0 \Rightarrow$ en x_0 pode haber un punto de inflexión (tamén pode haber un extremo relativo).

- **Derivada segunda positiva:** a derivada primeira ten que ser crecente, ten que aumentar, e polo tanto a inclinación da función orixinal ten que ser cada vez "máis positiva". A función orixinal ten que ser cóncava cara arriba.
- **Derivada segunda negativa:** a derivada primeira é decrecente. A inclinación da función orixinal ten que ser cada vez "máis negativa". A función orixinal ten que ser cóncava cara abaixo.
- **Derivada segunda 0:** a función orixinal pode ter un extremo ou un punto de inflexión nese punto.

Exemplo:

$\boxed{f(x) = 6x - x^3}$ Representa graficamente a función: **Solución:** Estudamos o crecemento a partir da derivada:

$$f'(x) = 6 - 3x^2 \rightarrow 6 - 3x^2 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{6}{3} = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$



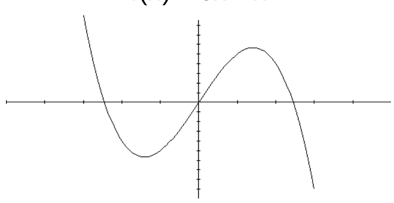
1. $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right)$ Exemplo: f'(-3)=-21, derivada negativa, a función decrece no intervalo.
2. $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ Exemplo: f'(0)=6, derivada positiva, a función crece no intervalo.
3. $\left(\sqrt{2}, +\infty\right)$ Exemplo: f'(3)=–21, derivada negativa, a función decrece no intervalo.

Do mesmo xeito, coa derivada segunda estudamos a curvatura:

$$f''(x) = -6x \rightarrow -6x = 0 \rightarrow x = 0$$

4. (-∞,0): f''(-2)=12, función cóncava hacia arriba no intervalo.
5. (0,+∞): f''(1)=–6, función cóncava hacia abaixo no intervalo.

$f(x) = 6x - x^3$



Para facer a gráfica, completamos con algúns valores:

x	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**
f(x)	-4	-5	0	5	4

Regra de L´Hopital

Sexan f(x) e g(x) funcións continuas e derivables no intervalo (a,b) e tales que $\lim_{x\to a^+} f(x)=0$ e $\lim_{x\to a^+} g(x)=0$.

Se $g'(x)\neq 0 \quad \forall x\in(a,b)$ e se existe $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, entón tamén existe $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ e, ademais, $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

A regra de L'Hopital proporciona un método moi eficaz para o cálculo de límites cando temos indeterminacións do tipo $\frac{0}{0}$, e tamén pode estenderse para indeterminacións doutros tipos:

- Indeterminacións $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- A regra de L'Hopital pódese aplicar igualmente con límites da forma $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ cando x tende a ∞.

Podemos transformar outros tipos de límites nos tipos anteriores para poder aplicar a Regra de L'Hopital:

- Límites da forma $0\cdot\infty$: transformamos o produto nun cociente entre unha das función e a inversa da outra.

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=0\cdot\infty\Rightarrow\begin{cases}\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\dfrac{0}{0}\\[2ex] \lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}=\dfrac{\infty}{\infty}\end{cases}$$

- Se $\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=1^{\infty}$, tomando logaritmos podemos transformalo nun dos límites anteriores:

$$\mathrm{Ln}\left[\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}\right]=\lim_{x\to x_0}\left[\mathrm{Ln}[f(x)]^{g(x)}\right]=\lim_{x\to x_0}[g(x)\cdot\mathrm{Ln}[f(x)]]$$

$$\xrightarrow[\lim_{x\to x_0}[f(x)]=1\Rightarrow\lim_{x\to x_0}[\mathrm{Ln}[f(x)]]=0]{\lim_{x\to x_0}[g(x)]=\infty}\lim_{x\to x_0}[g(x)\cdot\mathrm{Ln}[f(x)]]=\infty\cdot 0$$

Demostración: Só imos esbozala sen afondar nos detalles:

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{\frac{f(x)-0}{x-a}}{\frac{g(x)-0}{x-a}}$$

Dado que f(x) e g(x) cumpren as hipótese do Teorema do Valor Medio do Cálculo Diferencial, temos:

$$\exists c_1\in(a,x)\ \text{t. q.}\ \frac{f(x)-0}{x-a}=f'(c_1)$$

$$\exists c_2\in(a,x)\ \text{t. q.}\ \frac{g(x)-0}{x-a}=g'(c_2)$$

O límite anterior queda:

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(c_1)}{g'(c_2)}$$

En principio, non parece que c_1 e c_2 teñan porque ser iguais, o Teorema de Cauchy garántenos que podemos collelos de xeito que si o sexan, co que podemos escribir:

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{c\to a^+}\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

- Cando $\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)} = 0^0$ ou $\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)} = \infty^0$, tomando logaritmos conducen a indeterminacións do tipo $0\cdot(-\infty)$ e $0\cdot\infty$ respectivamente.

Exemplo 1:

Calcula o seguinte límite: $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$

Resposta:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1-1}{0^2} = \frac{0}{0} \quad \textit{INDETERMINADO}$$

Trátase dunha indeterminación da forma 0/0, aplicamos L'Hopital derivando numerador e denominador:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{2x} = \frac{0}{0}$$

Volvemos obter unha indeterminación 0/0. Non hai problema, volvemos aplicar L'Hopital: $\lim_{x\to 0}\dfrac{sen(x)}{2x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{\cos(x)}{2} = \dfrac{1}{2}$

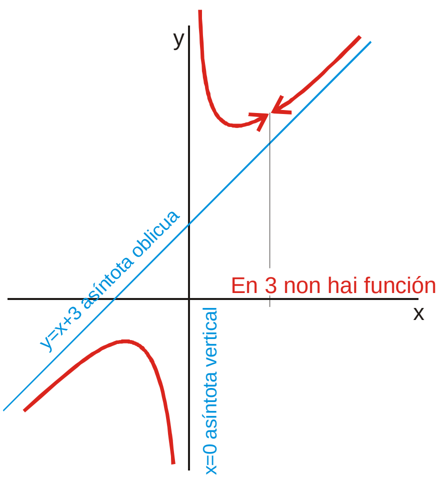
Exemplo 2:

Estuda se a función $f(x) = \dfrac{x^3-27}{x^2-3x}$ ten asíntotas

Resposta:

Verticais: empezamos por buscar puntos que non sexan do dominio.

$$x^2-3x=0 \to x(x-3)=0 \to \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$$



$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-27}{x^2-3x} = \lim_{x\to 0}\frac{-27}{0} = \pm\infty$$ A recta x=0 é unha asíntota vertical

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-3x} \overset{\frac{0}{0}L'Hopital}{\overset{\downarrow}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{2x-3} = 9$$ A recta x=3 NON é asíntota.

Oblicuas/horizontais: o cálculo das oblicuas é máis complexo pero as horizontais son simplemente un caso particular delas.

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^3-27}{x^2-3x}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-27}{x^3} \overset{\frac{\infty}{\infty} L\'{}Hopital}{\overset{\downarrow}{=}} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2}{3x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3-27}{x^2-3x} - x \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2-27}{x^2-3x} \overset{\frac{\infty}{\infty} L\'{}Hopital}{\overset{\downarrow}{=}} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{6x}{2x} = 3$$

Polo tanto, a recta y=x+3 é unha asíntota oblicua.

Existirá unha asíntota oblicua, non horizontal, se o grao do numerador é xustamente unha unidade superior ao do denominador.

Se o grao do numerador é menor ou igual ao do denominador, teremos unha asíntota horizontal.

Nos demais casos non existirá asíntota oblicua nin horizontal.