

Exercicios autoavaliación

- 1 Dada a función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x$, pídese:
- Ecuación da recta tanxente en $x=2$
 - Máximos e mínimos relativos.
 - Puntos de inflexión.
- 2 Fai a gráfica de $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ estudando intervalos de crecemento e decrecemento, extremos, intervalos de concavidade e convexidade, puntos de inflexión e asíntotas.
- 3 Representa graficamente a función $f(x) = \frac{x+2}{x^2 - x - 2}$ estudando o dominio, intervalos de crecemento e decrecemento, extremos e asíntotas.
- 4 Dada a función $f(x) = \frac{e^x}{x-2}$, estuda cal é o seu dominio, intervalos de crecemento e decrecemento, extremos, asíntotas e fai a gráfica.
- 5 Atopa o punto da parábola $y = \frac{x^2}{4}$ que está máis cerca do punto (1,2)
- 6 É certo que tódalas funcións polinómicas de grao 3 teñen un punto de inflexión?
- 7 Calcula os seguintes límites:
- a) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x+4}{3x-6} \right)^{2x-4}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \operatorname{sen}(x)}{x^3} \right)$ c) $\lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right)$ d) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\operatorname{Ln}(x)} \right)$
- 8 Calcula a ecuación das rectas tanxentes a circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 25$ nos puntos de abscisa $x=5$

Exercicios autoavaliación

1 Dada a función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x$, pídese:

- Ecuación da recta tanxente en $x=2$
- Máximos e mínimos relativos.
- Puntos de inflexión.

Solución:

a) E ecuación da tanxente é: $y - f(2) = Df(2)(x - 2)$

$$f(2) = \frac{1}{3}2^3 - 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 = \frac{2}{3}$$

$$f'(x) = x^2 - 6x + 5 \rightarrow Df(2) = 2^2 - 6 \cdot 2 + 5 = -3$$

$$\text{Tanxente} \equiv y - \frac{2}{3} = -3(x - 2) \Rightarrow y = -3x + \frac{20}{3}$$

b) Sabemos que nos extremos relativos a derivada é 0:

$$f'(x) = x^2 - 6x + 5$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

Eses son posibles extremos. Para comprobar se efectivamente o son, estudamos a curvatura neses puntos:

$$f''(x) = 2x - 6 \rightarrow \begin{cases} D^2f(1) = -4 < 0 & \text{En } x=1 \text{ hai un máximo relativo.} \\ D^2f(5) = 4 < 0 & \text{En } x=5 \text{ hai un mínimo relativo.} \end{cases}$$

c) Sabemos que nos puntos de inflexión a derivada segunda é 0:

$$f''(x) = 2x - 6 \rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$$

Para comprobar se $x=3$ é un punto de inflexión estudamos se nese punto cambia a curvatura:

$$D^2f(2) = -2 < 0 \Rightarrow \text{en } x = 2 \Rightarrow \text{En } x=2 \text{ a gráfica de } f(x) \text{ é cóncava}$$

$$D^2f(4) = 2 < 0 \Rightarrow \text{en } x = 4 \Rightarrow \text{En } x=4 \text{ a gráfica de } f(x) \text{ é convexa.}$$

Hai un cambio de curvatura, a función pasa de cóncava a convexa, polo tanto en $x=3$ hai un punto de inflexión (en realidade xa o sabemos, pois unha función continua e derivable sempre ten un punto de inflexión entre dous extremos relativos).

2 Fai a gráfica de $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ estudando intervalos de crecemento e decrecemento, extremos, intervalos de concavidade e convexidade, puntos de inflexión e asíntotas.

Solución: Os logaritmos só están definidos para os números maiores ca 0:

$$x^2 + 1 \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ (o dominio é todo } \mathbb{R})$$

Intervalos de crecemento e decrecemento: A función é continua e derivable en todo \mathbb{R} . Buscamos os puntos onde a derivada vale 0:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \rightarrow \frac{2x}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow x = 0$$

E a continuación estudamos o signo:

Como o denominador $x^2 + 1 > 0$ é sempre +, todo depende do signo do numerador:

$$2x \text{ é - cando } x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ decrece cando } x < 0$$

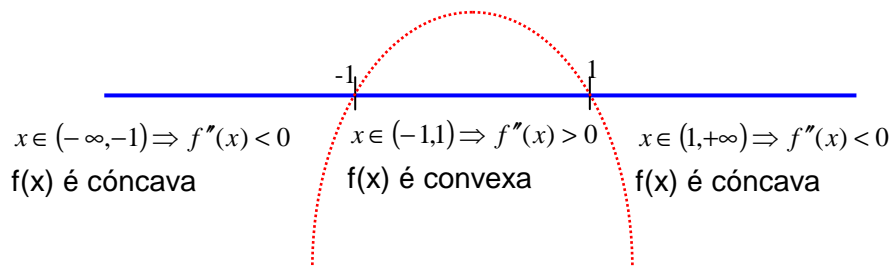
$$2x \text{ é + cando } x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ crece cando } x > 0$$

Extremos: Sen necesidade de facer máis cálculos, xa sabemos que en $x=0$ hai un mínimo relativo (a función decrece antes de 0, en 0 a tanxente é horizontal e despois de 0 crece).

Intervalos de concavidade e convexidade: Ao ser continua e derivable en todo \mathbb{R} , os intervalos de curvatura veñen determinados polos puntos onde a derivada segunda é 0.

$$f''(x) = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} \rightarrow \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow -2x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{-2}{-2}} = \pm 1$$

Facemos un esquema para $f''(x)$: parábola invertida (ec. 2º grao con coeficiente -)



Puntos de inflexión: Vemos que en $x=-1$ e en $x=1$ hai un cambio de curvatura, polo tanto son puntos de inflexión.

Asíntotas: Dado que o dominio é todo \mathbb{R} , non hai asíntotas verticais.

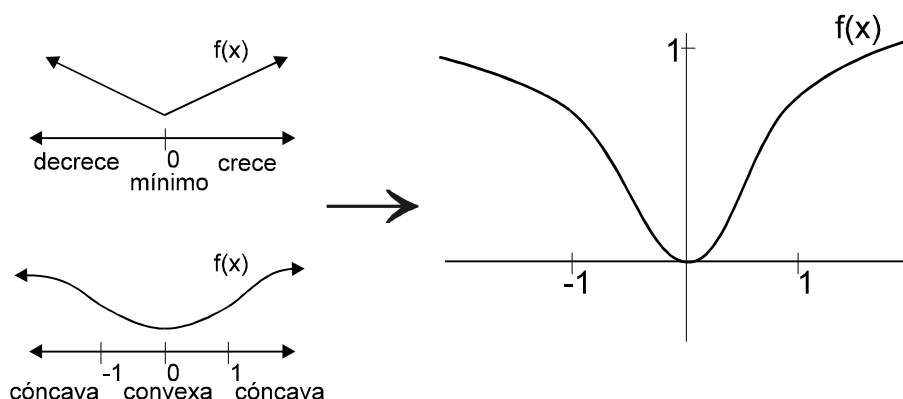
Estudamos se ten asíntotas oblicuas (rectas da forma $y=mx+b$):

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} \xrightarrow[\infty]{\infty} \text{L'Hopital} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} \xrightarrow[\infty]{\infty} \text{L'H} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{2x} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [\ln(x^2 + 1)] = \ln \left[\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^2 + 1) \right] = \infty$$

A función non ten asíntotas de ningún tipo.

Gráfica: Para face-la gráfica só necesitamos facer unha táboa de valores e ter en conta o resto dos datos que obtivemos.



3 Representa graficamente a función $f(x) = \frac{x+2}{x^2-x-2}$ estudando o dominio, intervalos de crecemento e decrecemento, extremos e asíntotas.

Dominio: As fraccións non están definidas cando o denominador é 0.

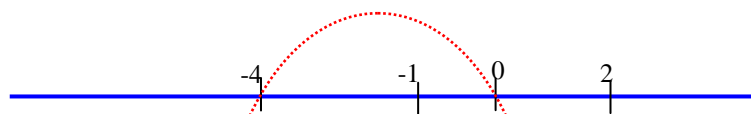
$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases} \quad \text{Polo tanto o dominio é } \mathbb{R} - \{-1, 2\}.$$

Intervalos de crecemento e decrecemento:

Puntos onde a derivada vale 0 e os puntos que non son do dominio.

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 4x}{(x^2 - x - 2)^2} \rightarrow \frac{-x^2 - 4x}{(x^2 - x - 2)^2} = 0 \Rightarrow -x^2 - 4x = 0 \Rightarrow -x(x+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$$

Facemos un esquema para $f'(x)$: como o denominador é un cadrado, é +.
O numerador é unha parábola invertida (ec. 2º grao con coeficiente -)



$$\begin{aligned} x \in (-\infty, -4) &\Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ decrece} \\ x \in (-4, -1) &\Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ crece} \\ x \in (-1, 0) &\Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ crece} \\ x \in (0, 2) &\Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ decrece} \\ x \in (2, +\infty) &\Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ decrece} \end{aligned}$$

Extremos: Do estudio do crecemento dedúcese que $x=-4$ é un mínimo relativo e $x=0$ un máximo relativo.

Asíntotas:

Verticais (rectas da forma $x=a$, ten que ser $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$):

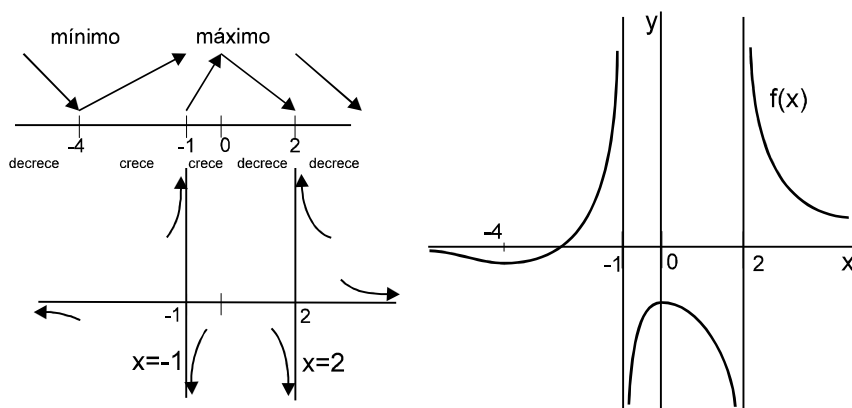
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+2}{x^2-x-2} &= \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+2}{x^2-x-2} &= \frac{1}{0^-} = -\infty \end{aligned} \right\} \text{A recta } x=-1 \text{ é unha asíntota vertical.}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2}{x^2-x-2} &= \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{x^2-x-2} &= \frac{1}{0^+} = +\infty \end{aligned} \right\} \text{A recta } x=4 \text{ é unha asíntota vertical.}$$

Horizontais: rectas da forma $y=b$, ten que ocorrer que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{x^2-x-2} &\xrightarrow[\infty]{\text{L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x-1} = \frac{1}{-\infty} = 0^- \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x^2-x-2} &\xrightarrow[\infty]{\text{L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x-1} = \frac{1}{+\infty} = 0^+ \end{aligned} \right\} \text{A recta } y=0 \text{ é unha asíntota}$$

Gráfica: Para facer a gráfica só necesitamos facer unha táboa de valores e ter en conta o resto dos datos que obtivemos.



4 Dada a función $f(x) = \frac{e^x}{x-2}$, estuda cal é o seu dominio, intervalos de crecemento e decrecemento, extremos, asíntotas e fai a gráfica.

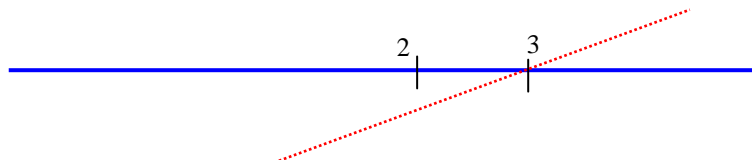
Dominio: As fraccións non están definidas cando o denominador é 0, o dominio é $\mathbb{R} - \{2\}$.

Intervalos de crecemento e decrecemento:

Puntos onde a derivada vale 0 e os puntos que non son do dominio.

$$f'(x) = \frac{e^x(x-2) - e^x}{(x-2)^2} = \frac{e^x(x-3)}{(x-2)^2} \rightarrow \frac{e^x(x-3)}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow e^x(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^x \neq 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ x-3 = 0 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

Facemos un esquema para $f'(x)$: como e^x é sempre +, o signo depende de $(x-3)$
O numerador é unha parábola invertida (ec. 2º grao con coeficiente -)



$$x \in (-\infty, 2) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ decrece}$$

$$x \in (2, 3) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ crece}$$

$$x \in (3, +\infty) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ decrece}$$

Extremos: Do estudio do crecemento dedúcese que en $x=3$ hai un mínimo relativo.

Asíntotas:

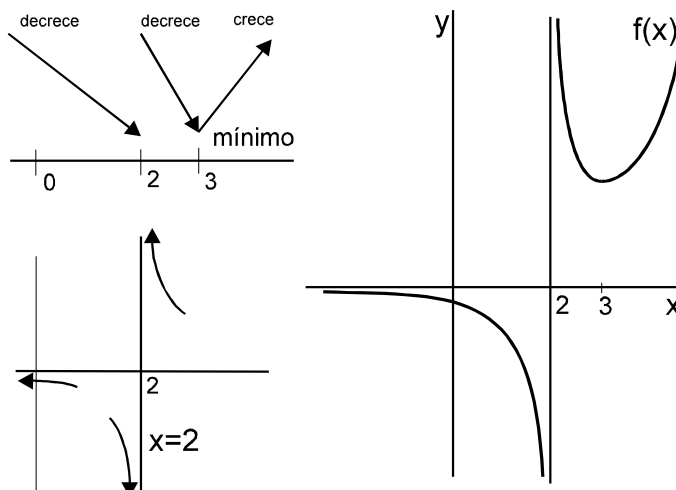
Verticais: rectas da forma $x=a$, ten que ser $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{e^x}{x-2} &= \frac{e^2}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{e^x}{x-2} &= \frac{e^2}{0^+} = +\infty \end{aligned} \right\} \text{ A recta } x=2 \text{ é unha asíntota vertical.}$$

Horizontais: rectas da forma $y=b$, ten que ocorrer que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x-2} &= \frac{0}{-\infty} = 0^- \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x-2} &= \frac{+\infty}{+\infty} = +\infty \end{aligned} \right\} \text{ A recta } y=0 \text{ é unha asíntota horizontal pero só para os valores negativos da } x.$$

Gráfica: Para facer a gráfica só necesitamos facer unha táboa de valores e ter en conta o resto dos datos que obtivemos.



5 Atopa o punto da parábola $y = \frac{x^2}{4}$ que está máis cerca do punto (1,2)

Solución:

Trátase dun típico problema de extremos condicionados. A distancia dun punto (x,y) ao punto (1,2) vén dada pola función: $d[(x,y),(1,2)] = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$, se é un punto da parábola a

distancia será: $d[(x,y),(1,2)] = \sqrt{(x-1)^2 + \left(\frac{x^2}{4} - 2\right)^2}$

Calculamos o mínimo derivando e igualando a 0:

$$D' = \frac{2(x-1) + 2\left(\frac{x^2}{4} - 2\right)\frac{2x}{4}}{2\sqrt{(x-1)^2 + \left(\frac{x^2}{4} - 2\right)^2}} \rightarrow D' = 0 \Leftrightarrow 2(x-1) + 2\left(\frac{x^2}{4} - 2\right)\frac{2x}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{4} - 2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$$

O punto buscado é o (2,1).

6 É certo que tódalas funcións polinómicas de grao 3 teñen un punto de inflexión?

Resposta:

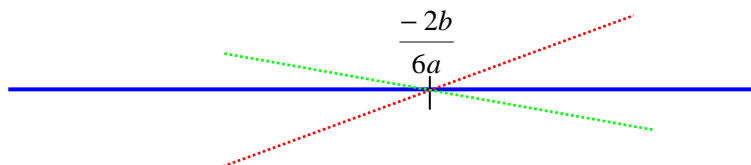
Efectivamente, un punto de inflexión é un punto onde cambia a curvatura ou, se a función ten derivada segunda nun entorno dese punto, onde a derivada segunda cambia de signo.

As funcións de grao tres teñen derivada segunda en tódolos puntos:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \rightarrow f''(x) = 6ax + 2b$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6ax + 2b = 0 \Rightarrow x = \frac{-2b}{6a}$$

$x = \frac{-2b}{6a}$ existe sempre ($a \neq 0$ noutro caso a función non sería de grao 3) e a derivada segunda cambia de signo o pasar polo punto (a gráfica de $f''(x) = 6ax + 2b$ é unha recta con pendente distinta de 0 e cambia de signo ao corta-lo eixe X): $x = \frac{-2b}{6a}$ é un punto de inflexión.



(pode ser unha recta ascendente –vermella- ou descendente –verde-)

7 Calcula os seguintes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x+4}{3x-6} \right)^{2x-4}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \text{sen}(x)}{x^3} \right)$ c) $\lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \cdot \text{tg} \left(\frac{x}{2} \right)$ d) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\text{Ln}(x)} \right)$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x-6}{3x+4} \right)^{2x-4} &= 0^0 \rightarrow \text{Ln} \left[\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x-6}{3x+4} \right)^{2x-4} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \left[(2x-4) \cdot \text{Ln} \left(\frac{3x-6}{3x+4} \right) \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{1}{\frac{1}{2x-4}} \cdot \frac{30}{\left(\frac{3x-6}{3x+4} \right) (3x+4)^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{30}{\frac{2(x-2)(3x+4)}{-2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{30 \cdot 4(x-2)^2}{-2 \cdot 2(x-2)(3x+4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-30(x-2)}{3x+4} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x-6}{3x+4} \right)^{2x-4} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \text{sen}(x)}{x^3} \right) \stackrel{\uparrow \text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos(x)}{3x^2} \right) \stackrel{\uparrow \text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{sen}(x)}{6x} \right) \stackrel{\uparrow \text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos(x)}{6} \right) = \frac{1}{6}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \pi} (x - \pi) \cdot \text{tg} \left(\frac{x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x - \pi) \cdot \text{sen} \left(\frac{x}{2} \right)}{\cos \left(\frac{x}{2} \right)} \stackrel{\uparrow \text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\text{sen} \left(\frac{x}{2} \right) + (x - \pi) \cdot \cos \left(\frac{x}{2} \right) \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2} \text{sen} \left(\frac{x}{2} \right)} = -2$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\text{Ln}(x)} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x \text{Ln}(x) - x + 1}{(x-1) \text{Ln}(x)} \right) \stackrel{\uparrow \text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\text{Ln}(x) + x \frac{1}{x} - 1}{\text{Ln}(x) + (x-1) \frac{1}{x}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\text{Ln}(x)}{\text{Ln}(x) + \frac{x-1}{x}} \right) \stackrel{\uparrow \text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

8 Calcula a ecuación das rectas tanxentes a circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 25$ nos puntos de abscisa $x=5$

Solución:

Empezamos por calcular a segunda coordenada dos puntos:

$$x = 4 \Rightarrow 4^2 + y^2 = 25 \Rightarrow y = \pm \sqrt{25 - 16} = \pm 3$$

Hai, polo tanto, dous puntos da circunferencia con abscisa 4: (4,3) e (4,-3).

Para calcular a ecuación de cada unha das tanxentes, necesitamos unha función que a súa gráfica coincida coa circunferencia nun entorno do punto de tanxencia.

Esas funcións obtéñense simplemente despexando a y na ecuación da circunferencia:

$$x^2 + y^2 = 25 \xrightarrow{\text{despexando } y} \begin{cases} y = \sqrt{25 - x^2} & \text{para o punto } (4,3) \\ y = -\sqrt{25 - x^2} & \text{para o punto } (4,-3) \end{cases}$$

Recta tanxente en (4,3):

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}} \Rightarrow m = -\frac{4}{3} \xrightarrow{\text{tanxente} \equiv y - f(x_0) = Df(x_0) \cdot (x - x_0)} \tan x \equiv y - 3 = -\frac{4}{3}(x - 4)$$

Recta tanxente en (4,-3):

$$y' = \frac{2x}{2\sqrt{25 - x^2}} \Rightarrow m = \frac{4}{3} \xrightarrow{\text{tanxente} \equiv y - f(x_0) = Df(x_0) \cdot (x - x_0)} \tan x \equiv y + 3 = \frac{4}{3}(x - 4)$$