Aplicaciones de la derivada

7

ACTIVIDADES

1. Página 160

a) $f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{6(1+h)^2+1-7}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{6h^2-12h+6-6}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(6h-12)=-12$

La pendiente de la recta tangente es -12.

b) $f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{(1+h)^3-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h^3+3h^2+3h+1-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(h^2+3h+3)=3$

La pendiente de la recta tangente es 3.

2. Página 160

a) $f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{(\sqrt{1+h}-1)(\sqrt{1+h}+1)}{h(\sqrt{1+h}+1)}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h}+1)}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+h}+1}=\frac{1}{2}$

La pendiente de la recta tangente es $\frac{1}{2}$.

b) $f'(4)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt{4+h}-2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{(\sqrt{4+h}-2)(\sqrt{4+h}+2)}{h(\sqrt{4+h}+2)}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h}+2)}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+h}+2}=\frac{1}{4}$

La pendiente de la recta tangente es $\frac{1}{4}$.

3. Página 161

$f'(-1)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{(-1+h)^2+3-4}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{-2h+h^2}{h}==\lim\limits_{h\to 0}(-2+h)=-2$

La ecuación de la recta tangente es: $y-4=-2(x+1)\longrightarrow y=-2x+2$.

La ecuación de la recta normal es: $y-4=\frac{1}{2}(x+1)\longrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$.

4. Página 161

$f(1)=5$

$f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{2(1+h)^3+3-5}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{2h^3+6h^2+6h}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2h^2+6h+6)=6$

La ecuación de la recta tangente es: $y-5=6(x-1)\longrightarrow y=6x-1$.

$f(-1)=1$

$f'(-1)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{2(-1+h)^3+3-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{2h^3+6h^2+6h}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2h^2+6h+6)=6$

La ecuación de la recta tangente es: $y-1=6(x-1)\longrightarrow y=6x+7$.

Las rectas son paralelas a la recta $y=6x$, porque su pendiente es 6.

5. Página 162

a) $f(x) = -x^2 + 3x$ $\qquad$ $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$

$f'(x) = -2x + 3$ $\qquad$ $f'(x) = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$

Damos valores a la izquierda y a la derecha de $x = \frac{3}{2}$:

$f'(1) = 1 > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente a la izquierda de $x = \frac{3}{2}$

$f'(2) = -1 < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente a la derecha de $x = \frac{3}{2}$.

Por tanto, $f(x)$ es creciente en $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ y decreciente en $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

b) $f(x) = \frac{3}{x-2}$ $\qquad$ $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{2\}$

$f'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2}$ $\qquad$ $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f(x)$ tiene asíntota vertical en $x = 2$.

$f'(0) = -\frac{3}{4} < 0$ $\qquad$ $f'(3) = -3 < 0$

Por tanto, $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$.

6. Página 162

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x^2 - 6x + 8 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Caso $x \leq 1$:

$f(x) = 2 - x^2$ $\qquad$ $f'(x) = -2x$ $\qquad$ $f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$

Estudiamos $f'(x)$ a la izquierda y derecha del punto $x = 0$:

$f'(-1) = 2 > 0$ $\qquad$ $f'(1) = -2 < 0$

Es decir, $f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, 1)$.

Caso $x > 1$:

$f(x) = x^2 - 6x + 8$ $\qquad$ $f'(x) = 2x - 6$ $\qquad$ $f'(x) = 0 \rightarrow x = 3$

Estudiamos $f'(x)$ a la izquierda y derecha del punto $x = 3$:

$f'(2) = -2 < 0$ $\qquad$ $f'(4) = 2 > 0$

Es decir, $f(x)$ es decreciente en $(1, 3)$ y creciente en $(3, +\infty)$.

Por tanto, $f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ y decreciente en $(0, 1) \cup (1, 3)$.

7. Página 163

a) $f(x)=x^4-2x^2+1$ $\quad$ $\text{Dom } f(x)=\mathbb{R}$

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x^2-1)$ $\quad$ $f'(x)=0 \to x=0, x=\pm 1$

Estudiamos $f'(x)$ en torno a los puntos $x=-1$, $x=0$ y $x=+1$.

$f'(-2)=-24<0$ $\quad$ $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\left(\frac{1}{4}-1\right)=\frac{3}{2}>0$ $\quad$ $f'\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{4}-1\right)=-\frac{3}{2}<0$ $\quad$ $f'(2)=24>0$

Por tanto, $f(x)$ es decreciente en $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ y creciente en $(-1,0)\cup(1,+\infty)$.

b) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{1+x^2}$ $\quad$ $\text{Dom } f(x)=\mathbb{R}$

$f'(x)=\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}$ $\quad$ $f'(x)=0\to x=0$

Estudiamos un punto a la izquierda del 0 y otro a la derecha.

$f'(-2)=-\dfrac{8}{25}<0$ $\quad$ $f'(2)=\dfrac{8}{25}>0$

Por tanto, $f(x)$ es decreciente en el intervalo $(-\infty,0)$ y creciente en el intervalo $(0,+\infty)$.

8. Página 163

$f(x)=\dfrac{x^3}{1-x^2}$ $\quad$ $\text{Dom } f(x)=\mathbb{R}-\{-1,1\}$ $\to$ Hay asíntotas verticales en $x=1$ y $x=-1$.

$f'(x)=\dfrac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$ $\to$ $f'(x)=0\to x=0,\ x=\pm\sqrt{3}$

$f'(-2)=-\dfrac{4}{9}<0$ $\quad$ $f'\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{27}{25}>0$ $\quad$ $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{11}{9}>0$

$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{11}{9}>0$ $\quad$ $f'\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{27}{25}>0$ $\quad$ $f'(2)=-\dfrac{4}{9}<0$

En $x=-\sqrt{3}$ se alcanza el mínimo relativo y en $x=\sqrt{3}$ el máximo relativo.

Las coordenadas de los puntos en los que alcanza dichos valores son:

$$\left(-\sqrt{3},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \left(\sqrt{3},-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

9. Página 164

a) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3}$ $\quad$ $\text{Dom } f(x)=\mathbb{R}-\{0\}$

$f'(x)=\dfrac{3-x^2}{x^4}$ $\quad$ $f'(x)=0\to x=\pm\sqrt{3}$

$f''(x)=\dfrac{2(x^2-6)}{x^5}$ $\quad$ $f''(-\sqrt{3})=\dfrac{2(3-6)}{(-\sqrt{3})^5}=\dfrac{6}{\sqrt{3}^5}>0$ y $f''(\sqrt{3})=\dfrac{2(3-6)}{(\sqrt{3})^5}=-\dfrac{6}{\sqrt{3}^5}<0$

Es decir, en $x=\sqrt{3}$ se alcanza un máximo relativo y en $x=-\sqrt{3}$ un mínimo relativo.

b) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^6+2}$ $\qquad$ $\text{Dom}\, f(x)=\mathbb{R}$

$f'(x)=-\dfrac{4x(x^6-1)}{(x^6+2)^2}$ $\qquad$ $f'(x)=0 \to x=0,\, x=\pm 1$

$f''(x)=\dfrac{4(5x^{12}-25x^6+2)}{(x^6+2)^3}$

$f''(-1)=\dfrac{4(5-25+2)}{(1+2)^3}=-\dfrac{8}{3}<0$ $\qquad$ $f''(0)=1>0$ $\qquad$ $f''(1)=\dfrac{4(5-25+2)}{(1+2)^3}=-\dfrac{8}{3}<0$

Es decir, en $x=0$ se alcanza un mínimo relativo de $f(x)$, y en $x=-1$ y $x=1$, los máximos relativos.

10. Página 164

$f(x)=\dfrac{x+3}{x^3+x^2-6x}$ $\qquad$ $\text{Dom}\, f(x)=\mathbb{R}-\{-3,0,2\}$

$f'(x)=\dfrac{-2x^3-10x^2-6x+18}{x^2(x^2+x-6)^2}=-\dfrac{2(x-1)}{(x-2)^2x^2}$ $\qquad$ $f'(x)=0\to x=1$

$f''(x)=\dfrac{2(3x^2-6x+4)}{(x-2)^3x^3}\to f''(1)=-2<0$

Es decir, $f(x)$ alcanza el máximo relativo en $x=1$.

11. Página 165

a) $f(x)=7x^3-x^2-x+2$ $\qquad$ $\text{Dom}\, f(x)=\mathbb{R}$

$f'(x)=21x^2-2x-1$

$f''(x)=42x-2$ $\qquad$ $f''(x)=0\to x=\dfrac{1}{21}$

$f''(0)=-2<0$ $\qquad$ $f''(1)=40>0$

Por tanto, $f(x)$ es convexa en $\left(-\infty,\dfrac{1}{21}\right)$ y cóncava en $\left(\dfrac{1}{21},+\infty\right)$.

b) $g(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ $\qquad$ $\text{Dom}\, f(x)=\mathbb{R}$

$g'(x)=\dfrac{x^2\cdot(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$ $\qquad$ $g''(x)=-\dfrac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$ $\qquad$ $g''(x)=0\to x=0,\, x=\pm\sqrt{3}$

$g''(-2)>0$ $\qquad$ $g''(-1)<0$ $\qquad$ $g''(1)>0$ $\qquad$ $g''(2)<0$

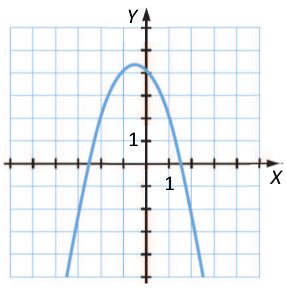
Por tanto, $g(x)$ es cóncava en $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(0,\sqrt{3})$ y convexa en $(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},+\infty)$.

12. Página 165

a) $f(x)=-x^2-x+4$ $\qquad$ $\text{Dom}\, f(x)=\mathbb{R}$

$f'(x)=-2x-1$ $\qquad$ $f''(x)=-2<0$

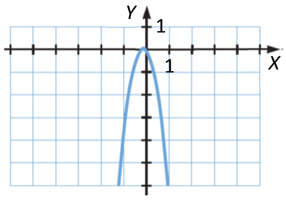
Por tanto, $f(x)$ es convexa $\forall x\in\mathbb{R}$.



b) $g(x) = -x - 5x^2$ $\quad$ $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$

$g'(x) = -1 - 10x$ $\quad$ $g''(x) = -10 < 0$

Es decir, $g(x)$ es convexa $\forall x \in \mathbb{R}$.



13. Página 166

a) $f(x) = x^3 + 3x^2$ $\quad$ $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 + 6x$ $\quad$ $f''(x) = 6x + 6$ $\quad$ $f''(x) = 0 \rightarrow x = -1$

$f''(-2) = -6 < 0$ $\quad$ $f''(0) = 6 > 0$

Por tanto:

$f(x)$ es convexa en $(-\infty, -1)$ y cóncava en $(-1, +\infty)$.

$f(x)$ tiene un punto de inflexión en $x = -1$.

b) $g(x) = \dfrac{x-1}{x^2+7x}$ $\quad$ $\text{Dom } g(x) = \mathbb{R} - \{-7, 0\}$

$g'(x) = \dfrac{-x^2+2x+7}{(x+7)^2x^2}$ $\quad$ $g''(x) = \dfrac{2(x^3-3x^2-21x-49)}{(x+7)^3x^3}$

$g''(x) = 0 \rightarrow x^3 - 3x^2 - 21x - 49 = 0 \rightarrow x = 7$

$g''(-8) < 0$ $\quad$ $g''(-6) > 0$ $\quad$ $g''(6) < 0$ $\quad$ $g''(8) > 0$

Por tanto:

$g(x)$ es convexa en $(-\infty, -7) \cup (0, 7)$ y cóncava en $(-7, 0) \cup (7, +\infty)$.

$g(x)$ tiene un punto de inflexión en $x = 7$.

14. Página 166

$f(x) = x^3 + ax^2 + 3$ $\quad$ $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax$ $\quad$ $f''(x) = 6x + 2a$

$f''(x) = 0 \rightarrow x = -\dfrac{a}{3}$

Como existe punto de inflexión en $x = 1 \rightarrow -\dfrac{a}{3} = 1 \rightarrow a = -3 \rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

Estudiamos puntos a la izquierda y derecha de $x = 1$:

$f''(0) = -6 < 0$ $\quad$ $f''(2) = 6 > 0$

Es decir:

$f(x)$ es cóncava en $(-\infty, 1)$ y convexa en $(1, +\infty)$.

Las coordenadas del punto de inflexión son $(1, f(1)) = (1, 1)$.

15. Página 167

a) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{2x^3}$ $\qquad$ $\text{Dom } f(x)=\mathbb{R}-\{0\}$

$f'(x)=\dfrac{3-x^2}{2x^4}$ $\qquad$ $f''(x)=\dfrac{x^2-6}{x^5}$ $\qquad$ $f'''(x)=\dfrac{30-3x^2}{x^6}$

$f''(x)=0 \rightarrow x=\pm\sqrt{6}$

$f'''(-\sqrt{6})=\dfrac{30-18}{6^3}\neq 0$ $\qquad$ $f'''(\sqrt{6})=\dfrac{30-18}{6^3}\neq 0$

Es decir, $f(x)$ tiene puntos de inflexión en $x=-\sqrt{6}, x=\sqrt{6}$.

b) $g(x)=-\dfrac{x}{x^2-7}$ $\qquad$ $\text{Dom } f(x)=\mathbb{R}-\left\{-\sqrt{7},\sqrt{7}\right\}$

$g'(x)=\dfrac{x^2+7}{(x^2-7)^2}$ $\qquad$ $g''(x)=-\dfrac{2x(x^2+21)}{(x^2-7)^3}$ $\qquad$ $g'''(x)=\dfrac{6(x^4+42x^2+49)}{(x^2-7)^4}$

$g''(x)=0 \rightarrow x=0$

$g'''(0)=\dfrac{6\cdot 49}{(-7)^4}\neq 0$

Por tanto, $g(x)$ tiene un punto de inflexión en $x=0$.

16. Página 167

a) $f(x)=2x^3$ $\qquad$ $f'(x)=6x^2$ $\qquad$ $f''(x)=12x$ $\qquad$ $f'''(x)=12$

$f'(x)=0 \rightarrow x=0$ $\rightarrow$ Posible máximo o mínimo.

$f''(x)=0 \rightarrow x=0$ $\rightarrow$ Posible punto de inflexión.

$f'''(0)=6\neq 0$ $\rightarrow$ El orden es impar $\rightarrow$ $x=0$ es punto de inflexión.

b) $f(x)=-3x^4$

$f'(x)=-12x^3$ $\qquad$ $f''(x)=-36x^2$ $\qquad$ $f'''(x)=-72x$ $\qquad$ $f^{IV)}(x)=-72$

$f'(x)=0 \rightarrow x=0$ $\rightarrow$ Posible máximo o mínimo.

$f''(x)=0 \rightarrow x=0$ $\rightarrow$ Posible punto de inflexión.

$f'''(0)=0$.

$f^{IV)}(0)=-72\neq 0$ $\rightarrow$ El orden es par y $f^{IV)}(0)<0$ $\rightarrow$ $x=0$ es máximo relativo.

c) $f(x)=6x^5$

$f'(x)=30x^4$ $\qquad$ $f''(x)=120x^3$ $\qquad$ $f'''(x)=360x^2$ $\qquad$ $f^{IV)}(x)=720x$ $\qquad$ $f^{V)}(x)=720$

$f'(x)=0 \rightarrow x=0$ $\rightarrow$ Posible máximo o mínimo.

$f''(x)=0 \rightarrow x=0$ $\rightarrow$ Posible punto de inflexión.

$f'''(0)=0$ $\qquad$ $f^{IV)}(0)=0$

$f^{V)}(0)=720\neq 0$ $\rightarrow$ El orden es impar $\rightarrow$ $x=0$ es punto de inflexión.

17. Página 168

$B(x) = I(x) - C(x) = 60x - x^2 - (x^2 - 12x + 120) = -2x^2 + 72x - 120$

Calculamos el máximo de la función $B(x)$:

$B'(x) = -4x + 72 \qquad B'(x) = 0 \to x = 18$

$B''(x) = -4 \qquad B''(18) = -4 \to x = 18$ es máximo relativo.

El beneficio máximo se obtiene para una producción de 18 unidades, y el beneficio máximo es:

$$B(18) = -2\cdot 18^2 + 72\cdot 18 - 120 = 528\ €$$

18. Página 168

Buscamos el máximo global de la función concentración $f(t) = 300t(3-t) = 900t - 300t^2$:

$f'(t) = 900 - 600t \qquad f'(t) = 0 \to t = \dfrac{3}{2}$

$f''(t) = -600 \qquad f''\left(\dfrac{3}{2}\right) = -600 < 0 \to t = \dfrac{3}{2}$ es un máximo de $f(t)$.

La máxima concentración se obtendrá en $t = \dfrac{3}{2}$.

19. Página 169

Definimos dos sumandos x, y tales que $x + y = 90$.

Queremos que estos sumandos minimicen, además, la expresión $f(x,y) = x^2 + 2y^2$.

Reducimos la función a una sola variable:

$$y = 90 - x \longrightarrow f(x) = x^2 + 2(90-x)^2$$

$f'(x) = 6x - 360 \qquad f'(x) = 0 \to x = 60$

$f''(x) = 6 \qquad f''(60) = 6 > 0 \to$ En $x = 60$ hay un mínimo relativo.

Así, $x = 60$ e $y = 30$ minimizan la función $f(x)$.

20. Página 169

l: longitud del lado de la base en cm $\qquad$ h: altura del prisma en cm

$P_{\text{Cara}} = 30 \longrightarrow 2(l + h) = 30 \longrightarrow h = 15 - l$

La función que queremos maximizar es:

$$V(l,h) = l^2 h \xrightarrow{h=15-l} V(l) = l^2(15-l)$$

$V'(l) = 3l(10-l) \qquad V'(l) = 0 \longrightarrow l = 0, l = 10$ La solución válida es $l = 10$

$V''(l) = 30 - 6l \longrightarrow V''(10) = -30 < 0 \to$ En $l = 10$ se alcanza el máximo.

Por tanto, las dimensiones que debe tener el prisma para cumplir las condiciones dadas son:

$$l = 10 \text{ cm} \qquad h = 5 \text{ cm}$$

SABER HACER

21. Página 170

Primero se halla la derivada de la función: $f'(x) = \ln x + 1$

Después se calcula la derivada de la función en el punto, que es la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto: $f'(e) = \ln e + 1 = 2$

Se calcula el valor de la función en el punto: $f(e) = e \cdot \ln e = e$

Así: $y - e = 2(x - e) \rightarrow y = 2x - e$

22. Página 170

Primero se calcula la pendiente de las rectas tangentes. Como son paralelas a la bisectriz del primer cuadrante, forman un ángulo de 45º:

$$m = tg\,45° \rightarrow m = 1$$

Después se halla la derivada de la función: $f'(x) = 9x^2$.

A continuación se calcula la derivada de la función en el punto:

$$f'(a) = 9a^2 \longrightarrow 9a^2 = 1 \rightarrow a = \pm\frac{1}{3}$$

Y para terminar, se hallan los puntos $(a, f(a)) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}, f\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{19}{9}\right) \\ \left(-\frac{1}{3}, f\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{17}{9}\right) \end{cases}$

23. Página 171

Primero calculamos la derivada de $f(x) = ax^3 + bx + c$:

$$f'(x) = 3ax^2 + b$$

Después planteamos y resolvemos el sistema formado con las condiciones dadas:

- La ordenada en el origen es 1 $\longrightarrow$ $f(0) = 1$
- Pasa por el punto (–1, 3) $\longrightarrow$ $f(-1) = 3$
- Tiene un punto extremo relativo en (–1, 3) $\longrightarrow$ $f'(-1) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} c = 1 \\ -a - b + c = 3 \\ 3a + b = 0 \end{array}\right\} \rightarrow a = 1, b = -3, c = 1$$

La expresión algebraica es $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Estudiamos si en $x = -1$ se alcanza un máximo o mínimo relativo:

$f''(x) = 6x \longrightarrow f''(-1) = -6 < 0 \longrightarrow$ Se trata de un máximo.

24. Página 171

$f(x)=ax^4-3x^3+2x^2-x$ $\quad f'(x)=4ax^3-9x^2+4x-1$ $\quad f''(x)=12ax^2-18x+4$

Buscamos a tal que $f''(x)$ no tenga raíces reales:

$$f''(x)=12ax^2-18x+4\neq 0 \rightarrow x=\frac{18\pm\sqrt{18^2-4\cdot 12a\cdot 4}}{24a} \rightarrow 324-192a<0 \rightarrow a>\frac{27}{16}$$

$f''(0)=4$ →La función es cóncava en todos sus puntos cuando $a>\frac{27}{16}$.

25. Página 172

Estudiamos el signo de $f'(x)$ con la monotonía de $f(x)$:

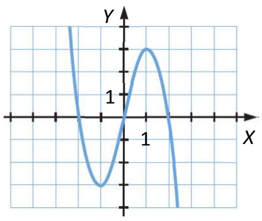
- $f(x)$ es creciente en $(-3,-2)\cup(0,2) \rightarrow f'(x)>0$
- $f(x)$ es decreciente en $(-2,0)\cup(2,3) \rightarrow f'(x)<0$
- $f(x)$ tiene máximos en $x=-2, x=2 \rightarrow f'(-2)=f'(2)=0$
- $f(x)$ tiene un mínimo en $x=0 \rightarrow f'(0)=0$

Estudiamos la concavidad y los puntos de inflexión:

- $f(x)$ es convexa en $(-3,-1)\cup(1,3)$ y cóncava en $(-1,1)$.
- $f(x)$ tiene puntos de inflexión en $x=-1, x=1$.

Además, $f''(-1)=f''(1)=0 \rightarrow f'(x)$ tiene extremos relativos en $x=-1, x=1$.

Representamos $f'(x)$ con la información obtenida:



26. Página 172

Sean *x* e *y* los catetos del triángulo rectángulo. Por el teorema de Pitágoras, $5^2=x^2+y^2 \rightarrow y=\sqrt{25-x^2}$.

La función que queremos maximizar es:

$$A(x,y)=\frac{x\cdot y}{2}\xrightarrow{y=\sqrt{25-x^2}}A(x)=\frac{x\cdot\sqrt{25-x^2}}{2}$$

$A'(x)=\frac{25-2x^2}{2\sqrt{25-x^2}}$ $\quad A'(x)=0 \rightarrow 2x^2=25 \rightarrow x=\pm\frac{5}{\sqrt{2}} \rightarrow$ La solución válida es $x=\frac{5}{\sqrt{2}}$.

$A''(x)=\frac{x\cdot(2x^2-75)}{2(25-x^2)^{3/2}} \rightarrow A''\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\frac{5}{\sqrt{2}}\cdot(25-75)}{2\cdot\left(\frac{25}{2}\right)^{3/2}}<0 \rightarrow$ En $x=\frac{5}{\sqrt{2}}$ se alcanza el máximo.

Por tanto, los catetos del triángulo deben medir: $x=\frac{5}{\sqrt{2}}$ metros $\qquad y=\frac{5}{\sqrt{2}}$ metros

27. Página 173

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x+4 & \text{si } 0<x\le 2\\ -\frac{3}{4}x^2+6x-6 & \text{si } 2<x\le 6\\ \frac{1}{6}x+2 & \text{si } 6<x\le 12\end{cases} \rightarrow f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2} & \text{si } 0<x<2\\ -\frac{3}{2}x+6 & \text{si } 2<x<6\\ \frac{1}{6} & \text{si } 6<x<12\end{cases}$$

$$f'(x)=0 \rightarrow -\frac{3}{2}x+6=0 \rightarrow x=4$$

Analizamos si $x=4$ es la abscisa de un máximo o un mínimo:

$f''(x)=-\frac{3}{2}$ si $2<x<6 \rightarrow f''(4)=-\frac{3}{2}<0 \rightarrow$ Se trata de un máximo.

Calculamos el valor de $f(x)$ en los extremos de cada intervalo y también en $x=4$:

$f(0)=4,\ f(2)=3,\ f(6)=3,\ f(12)=4,\ f(4)=6$

Por tanto:

Existe un máximo, que se alcanza en el cuarto mes, con un beneficio de 6 000 €.

Hay dos mínimos que se dan en el segundo y sexto mes, con un beneficio de 3 000 € en cada uno.

28. Página 173

Se determina la función que se va a optimizar.

$n \rightarrow$ n.º de unidades del artículo que se producen

$C(n) = 2n^3 + 270n + 2\,048 \rightarrow$ coste de producción de n unidades

La función que determina el coste de producción es $f(n)=\frac{2n^3+270n+2048}{n}$.

Se halla la derivada de la función que se va a optimizar:

$$f'(n)=\frac{(6n^2+270)n-(2n^3+270n+2048)}{n^2}=\frac{4n^3-2048}{n^2}$$

Se igual a cero la derivada para determinar los posibles máximos o mínimos.

$$f'(n)=0 \rightarrow \frac{4n^3-2048}{n^2}=0 \rightarrow n=8$$

Se estudia el signo de $f'(n)$ para decidir si se trata de un máximo o un mínimo.

Si $n < 8 \rightarrow f'(n) < 0 \rightarrow f$ decrece

Si $n > 8 \rightarrow f'(n) > 0 \rightarrow f$ crece

Por lo tanto, $n = 8$ es un mínimo.

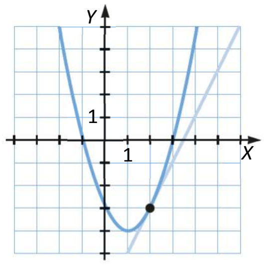
Hay que producir 8 unidades para que el coste sea mínimo.

ACTIVIDADES FINALES

29. Página 174

$f(2) = -3$ $\qquad f'(x) = 2x - 2 \rightarrow f'(2) = 2$

La ecuación de la recta tangente es: $y + 3 = 2(x - 2) \rightarrow y = 2x - 7$



30. Página 174

$f(1) = 1 - a + 6 = 2 \rightarrow a = 5$

$f'(x) = 2x - 5 \rightarrow f'(1) = -3$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 2 = -3(x - 1) \rightarrow y = -3x + 5$

31. Página 174

a) $f(-1) = -1$ $\qquad f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2} \rightarrow f'(-1) = -\dfrac{1}{2}$

La ecuación de la recta tangente es: $y + 1 = -\dfrac{1}{2}(x + 1) \rightarrow y = -\dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{2}$

b) $f(0) = \ln 1 = 0$ $\qquad f'(x) = \dfrac{3}{3x+1} \rightarrow f'(0) = 3$

La ecuación de la recta tangente es: $y = 3x$

c) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$ $\qquad f'(x) = -senx \rightarrow f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 2 = -\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) \rightarrow y = -x + \dfrac{\pi + 4}{2}$

d) $f(1) = 2$ $\qquad f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{2-x}} \rightarrow f'(1) = -\dfrac{1}{2}$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 2 = -\dfrac{1}{2}(x - 1) \rightarrow y = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{5}{2}$

32. Página 174

$f(-1) = \ln 1 = 0$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{2x+3} \rightarrow f'(-1) = 1$

La ecuación de la recta tangente es: $y = x + 1$

La ecuación de la recta normal es: $y = -x - 1$

33. Página 174

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=e^0-3=-2$

$f'(x)=4e^{4x+2}\to f'\left(-\frac{1}{2}\right)=4$

La ecuación de la recta tangente es: $y+2=4\left(x+\frac{1}{2}\right)\to y=4x$

34. Página 174

$\frac{x-2}{x+1}=0\to x=2$ es el punto de corte de *f* con el eje de abscisas.

$f(2)=0 \qquad f'(x)=\frac{(x+1)-(x-2)}{(x+1)^2}=\frac{3}{(x+1)^2}\to f'(2)=\frac{1}{3}$

La ecuación de la recta tangente es: $y=\frac{1}{3}(x-2)\to y=\frac{x}{3}-\frac{2}{3}$

La ecuación de la recta normal es: $y=-3(x-2)\to y=-3x+6$

35. Página 174

$f(3)=\sqrt{4}=2$

$f'(x)=\frac{2x(4-x)+\left(x^2-5\right)}{2(4-x)^2\sqrt{\frac{x^2-5}{4-x}}}=\frac{-x^2+8x-5}{2(4-x)^2\sqrt{\frac{x^2-5}{4-x}}}\to f'(3)=\frac{10}{4}$

La ecuación de la recta tangente es: $y-2=\frac{10}{4}(x-3)\to y=\frac{5}{2}x-\frac{11}{2}$

36. Página 174

$x^3+x^2-6x+1=1\to x^3+x^2-6x=0\to x\left(x^2+x-6\right)=0\to x=0, x=2, x=-3$

Tenemos que hallar las rectas que pasan por el punto (2, 1): $f'(x)=3x^2+2x-6\to f'(2)=10$

La ecuación de la recta tangente es: $y-1=10(x-2)\to y=10x-19$

La ecuación de la recta normal es: $y-1=-\frac{1}{10}(x-2)\to y=-\frac{1}{10}x+\frac{6}{5}$

37. Página 174

r pasa por $A=(1, f(1)=4)$ y $B=(3, f(3)=8)$ ⟶ Pendiente $=\frac{8-4}{3-1}=2$

$f'(x)=2x-2=2\to x=2\to f(2)=5$

La ecuación de la recta tangente a la parábola que es paralela a *r* es: $y-5=2(x-2)\to y=2x+1$

38. Página 174

$$f'(x) = \frac{-2}{x^2} \rightarrow \frac{-2}{x^2} = -2 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} x = \ \ 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$f(1) = 2$ $y \rightarrow 2 = -2 + 4 \rightarrow (1, 2)$ es un punto de la recta.

$f(-1) = 2$ $y \rightarrow -2 \neq (-2)\cdot(-1) + 4 \rightarrow (-1, -2)$ no es un punto de la recta.

Por tanto, y puede ser tangente a la función f en el punto (1, 2).

39. Página 174

r pasa por $A=(2, f(2) = 0)$ y $B=(e + 1, f(e + 1) = 1) \rightarrow$ Pendiente $= \frac{1-0}{e+1-2} = \frac{1}{e-1}$

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} = \frac{1}{e-1} \rightarrow x = e \rightarrow f(e) = \ln(e-1)$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - \ln(e-1) = \frac{1}{e-1}(x-e) \rightarrow y = \frac{x}{e-1} - \frac{e}{e-1} + \ln(e-1)$$

40. Página 174

a) $f'(x) = 2x - 2$

Si la recta tangente es paralela a la recta dada, entonces:

$$f'(x) = 2x - 2 = 4 \rightarrow x = 3 \qquad f(3) = 3 \rightarrow P = (3, 3)$$

Así, la ecuación de la recta tangente es:

$$y - 3 = 4(x-3) \rightarrow y = 4x - 9.$$

b) Resolvemos el sistema formado por la parábola y la recta:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = 4x - 9 \end{cases} \rightarrow x^2 - 2x = 4x - 9 \rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow x = 3$$

Es decir, únicamente se cortan en un punto.

41. Página 174

$f'(x) = 2x + b \rightarrow f'(1) = 2 + b$

La bisectriz del primer cuadrante es la recta $y = x$.

Si la recta tangente es paralela a ella, entonces: $2 + b = 1 \rightarrow b = -1$

Así, la ecuación de la función es de la forma: $y = x^2 - x + c$

Si pasa por el punto (1, 1) tenemos que: $1 = 1 - 1 + c \rightarrow c = 1$

Luego, la ecuación de la parábola es: $y = x^2 - x + 1$

42. Página 174

a) La recta tangente forma un ángulo de 45° con el eje de abscisas ⟶ m = *tg* 45° = 1

Buscamos los puntos que verifican que $f'(x)=1$:

$$2x-2=1\rightarrow x=\frac{3}{2}\rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3\cdot 2}{2}-3=-\frac{15}{4}$$

La ecuación de la recta tangente es: $y+\frac{15}{4}=x-\frac{3}{2}\rightarrow y=x-\frac{21}{4}$

b) La recta tangente es horizontal ⟶ Buscamos los puntos que verifican $f'(x)=0$:

$f'(x)=2x-2 \longrightarrow 2x-2=0\rightarrow x=1\rightarrow f(1)=-4$

La ecuación de la recta tangente es $y=-4$.

43. Página 174

La recta tangente es paralela a la recta $y=2x-123$ ⟶ Buscamos los puntos que verifican $f'(x)=2$:

$$f'(x)=3x^2-1\rightarrow 3x^2-1=2\rightarrow x^2=1\rightarrow\begin{cases}x=\ \ 1\\ x=-1\end{cases}$$

- Si $x=1\rightarrow f(1)=4$ y la ecuación de la recta tangente es: $y-4=2(x-1)\rightarrow y=2x+2$
- Si $x=-1\rightarrow f(1)=4$ y la ecuación de la recta tangente es: $y-4=2(x+1)\rightarrow y=2x+6$

44. Página 174

Para que las rectas tangentes sean paralelas, debe ocurrir que $f'(1)=f'(2)$.

$$f'(x)=3kx^2-2x+7k\rightarrow\begin{cases}f'(1)=3k-2+7k\\ f'(2)=12k-4+7k\end{cases}\rightarrow 9k=2\rightarrow k=\frac{2}{9}$$

Sustituyendo este valor ⟶ $\begin{cases}f'(1)=\frac{2}{9}\\ f'(2)=\frac{2}{9}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}f(1)=\frac{-155}{9}\\ f(2)=\frac{-154}{9}\end{cases}$

- Si $x=1$, la ecuación de la recta tangente es $y+\frac{155}{9}=\frac{2}{9}(x-1)\rightarrow y=\frac{2}{9}x-\frac{157}{9}$.
- Si $x=-1$, la ecuación de la recta tangente es $y+\frac{154}{9}=\frac{2}{9}(x-2)\rightarrow y=\frac{2}{9}x-\frac{158}{9}$.

45. Página 174

$f(3)=-9a+11 \qquad f'(x)=-2ax+5\rightarrow f'(3)=-6a+5$

La ecuación de la recta tangente es: $y+9a-11=(-6a+5)(x-3)\rightarrow y=(-6a+5)x+9a-4$

La recta pasa por el punto (5, 0) ⟶ $(-6a+5)5+9a-4=0\rightarrow -21a=-21\rightarrow a=1$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es: $y-2=-(x-3)\rightarrow y=-x+5$

La ecuación de la recta normal es: $y-2=x-3\rightarrow y=x-1$

46. Página 174

a) $f'(x)=\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+m}}$

Para que sea paralela a $y=2x-3$ en $x=2\rightarrow f'(2)=2$.

$f'(2)=\frac{2}{\sqrt{4+m}}=2\rightarrow 1=4+m\rightarrow m=-3$

El punto de tangencia es: $f(2)=\sqrt{4-3}=1\rightarrow(2,1)$

b) Si la recta tangente pasa por $P(a, 5)$ y $Q(1, 1)$ → Pendiente = $=\frac{5-1}{a-1}=\frac{4}{a-1}$.

Si $f(x)$ pasa por $P(a, 5)$ → $f(a)=\sqrt{a^2+m}=5$.

$f'(x)=\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+m}}\rightarrow f'(a)=\frac{a}{\sqrt{a^2+m}}=\frac{4}{a-1}$ Sustituyendo el valor de $f(a)=5$ en $f'(a)$:

$\frac{a}{5}=\frac{4}{a-1}\rightarrow a(a-1)=4\cdot5\rightarrow a^2-a-20=0\rightarrow\begin{cases}a=5\\a=-4\end{cases}$

Sustituyendo ahora en $f(a)$ los valores de a:

- Si $a=5\rightarrow f(5)=\sqrt{5^2+m}=5\rightarrow 5^2+m=5^2\rightarrow m=0$
- Si $a=-4\rightarrow f(-4)=\sqrt{(-4)^2+m}=5\rightarrow(-4)^2+m=5^2\rightarrow m=9$

47. Página 174

$f(2)=3\qquad f'(x)=\frac{-2}{(x-1)^2}\rightarrow f'(2)=-2$

La ecuación de la recta tangente es: $y-3=-2(x-2)\rightarrow y=-2x+7$

Los puntos de corte de la función con los ejes son:

- Con el eje Y: $x=0\rightarrow y=7$
- Con el eje X: $y=0\rightarrow x=\frac{7}{2}$

Por tanto, el área del triángulo es: Área = $\frac{\frac{7}{2}\cdot7}{2}=\frac{49}{4}$ u²

48. Página 174

$f(2)=\sqrt{2^2+5}=3\qquad f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}\rightarrow f'(2)=\frac{2}{3}$

La ecuación de la recta tangente es: $y-3=\frac{2}{3}(x-2)\rightarrow y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$

Los puntos de corte de la función con los ejes son:

- Con el eje Y: $x=0\rightarrow y=\frac{5}{3}$
- Con el eje X: $y=0\rightarrow x=-\frac{5}{2}$

Por tanto, el área del triángulo es: Área = $\frac{\left(0-\left(-\frac{5}{2}\right)\right)\cdot\frac{5}{3}}{2}=\frac{25}{12}$ u²

49. Página 174

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=3+\ln\left(tg\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=3+\ln 1=3$$

$$f'(x)=\left(\frac{(tg\,x)'}{tg\,x}\right)=\frac{1}{\cos^2 x\cdot tg\,x}=\frac{1}{\cos x\cdot sen\,x}\rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{4}{2}=2$$

La ecuación de la recta tangente es: $y-3=2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\rightarrow y=2x+\frac{6-\pi}{2}$

Puntos de corte:

- Con el eje *Y*: $x=0\rightarrow y=\frac{6-\pi}{2}$
- Con el eje *X:* $y=0\rightarrow x=\frac{\pi-6}{4}$

$$\text{Área}=\frac{\left(0-\frac{\pi-6}{4}\right)\cdot\left(\frac{6-\pi}{2}\right)}{2}=\frac{(6-\pi)^2}{16}$$

50. Página 174

$f(-2)=3 \qquad f(5)=0$

$$f'(x)=\begin{cases}2x & \text{si } x\le 0\\ \frac{1}{2\sqrt{x+4}} & \text{si } x>0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}f'(-2)=-4\\ f'(5)=\frac{1}{6}\end{cases}$$

Así, las ecuaciones de las rectas tangentes son:

$x=-2\ \rightarrow\ y-3=-4(x+2)\rightarrow y=-4x-5$

$x=5\ \rightarrow\ y=\frac{1}{6}(x-5)\rightarrow y=\frac{1}{6}x-\frac{5}{6}$

Puntos de corte:

- Entre las dos rectas: $-4x-5=\frac{1}{6}x-\frac{5}{6}\rightarrow\frac{25}{6}x=\frac{-25}{6}\rightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=-1\end{cases}$
- La primera recta con el eje *X:* $y=0\rightarrow x=\frac{-5}{4}$
- La segunda recta con el eje *X:* $y=0\rightarrow x=5$

$$\text{Área}=\frac{\left(5-\left(-\frac{5}{4}\right)\right)\cdot(0-(-1))}{2}=\frac{25}{8}$$

51. Página 174

La función corta al eje de abscisas $\rightarrow$ $y=0\rightarrow f(x)=(x+1)\cdot e^x=0\rightarrow\begin{cases}x+1=0\\ e^x\ne 0\quad\forall x\end{cases}\rightarrow x=-1$

Así, la función corta al eje de abscisas en *P*(–1, 0).

$$f'(x)=e^x+(x+1)\cdot e^x=e^x\cdot(2+x)\rightarrow f'(-1)=\frac{1}{e}$$

La ecuación de la recta tangente es: $y=\frac{1}{e}(x+1)$

La ecuación de la recta normal es: $y=-e\cdot(x+1)\rightarrow y=-ex-e$

Corte de la recta tangente con el eje *Y*: $x=0\rightarrow y=\frac{1}{e}$

Corte de la recta normal con el eje *Y*: $x=0\rightarrow y=-e$

$$\text{Área}=\frac{\left(\frac{1}{e}-(-e)\right)\cdot(0-(-1))}{2}=\frac{1+e^2}{2e}$$

52. Página 174

f(*x*) y *g*(*x*) pasan por *P*(−1, 2) → $f(-1)=1-a+b=2\qquad g(-1)=c=2$.

Tienen la misma recta tangente en *P* → $f'(-1)=g'(-1)$.

$f'(x)=2x+a\rightarrow f'(-1)=-2+a\qquad g'(x)=-2\cdot e^{-(x+1)}\rightarrow g'(-1)=-2$

Resolvemos el sistema formado por las tres ecuaciones obtenidas:

$$\begin{cases}-2+a=-2\\1-a+b=2\rightarrow a=0, b=1, c=2\\c=2\end{cases}$$

53. Página 175

$x=3\rightarrow 9+16y^2-16=0\rightarrow 16y^2=7\rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{7}}{4}$ → Se considera el punto $\left(3,\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$.

$$2x+32yy'=0\rightarrow 32yy'=-2x\rightarrow y'=-\frac{x}{16y}$$

$$y'\left(3,\frac{\sqrt{7}}{4}\right)=-\frac{3}{16\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}}=-\frac{3}{4\sqrt{7}}=-\frac{3\sqrt{7}}{28}$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y-\frac{\sqrt{7}}{4}=-\frac{3\sqrt{7}}{28}(x-3)\rightarrow y=\frac{3\sqrt{7}}{28}x+\frac{4\sqrt{7}}{7}$$

54. Página 175

$x=4\rightarrow 64-9y^2-36=0\rightarrow 9y^2=28\rightarrow y=\pm\frac{2\sqrt{7}}{3}$ → Se considera el punto $\left(4,\frac{2\sqrt{7}}{3}\right)$.

$$8x-18yy'=0\rightarrow -18yy'=-8x\rightarrow y'=\frac{4x}{9y}$$

$$y'\left(4,\frac{2\sqrt{7}}{3}\right)=\frac{16}{9\cdot\frac{2\sqrt{7}}{3}}=\frac{8}{3\sqrt{7}}=\frac{8\sqrt{7}}{21}$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y-\frac{2\sqrt{7}}{3}=\frac{8\sqrt{7}}{21}(x-4)\rightarrow y=\frac{8\sqrt{7}}{21}x-\frac{6\sqrt{7}}{7}$$

55. Página 175

La circunferencia en cuestión tiene ecuación: $(x-0)^2+(y-0)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2 \rightarrow x^2+y^2=5$

$y^2=5-x^2 \rightarrow y=\pm\sqrt{5-x^2}$, donde: $\begin{cases} f(x)=\sqrt{5-x^2} \\ g(x)=-\sqrt{5-x^2} \end{cases}$

En primer lugar, para *f*(*x*): $f(1)=2 \qquad f'(x)=\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{5-x^2}} \rightarrow f'(1)=-\frac{1}{2}$

La ecuación de la recta tangente es: $y-2=-\frac{1}{2}(x-1) \rightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

En segundo lugar, para *g*(*x*): $g(1)=-2 \qquad g'(x)=\frac{x}{\sqrt{5-x^2}} \rightarrow g'(1)=\frac{1}{2}$ ..

La ecuación de la recta tangente es: $y+2=\frac{1}{2}(x-1) \rightarrow y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$

Calculamos el punto de corte de las dos rectas tangentes:

$-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2} \rightarrow x=5 \rightarrow (5,0)$

Calculamos el punto de corte de las rectas tangentes a *f*(x) y *g*(*x*) con el eje de ordenadas:

$x=0 \rightarrow y=0+\frac{5}{2}=\frac{5}{2} \rightarrow \left(0,\frac{5}{2}\right) \qquad x=0 \rightarrow y=0-\frac{5}{2}=-\frac{5}{2} \rightarrow \left(0,-\frac{5}{2}\right)$

$A=\frac{\left(\frac{5}{2}-\left(-\frac{5}{2}\right)\right)\cdot 5}{2}=\frac{25}{2}$ u²

56. Página 175

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \qquad f'(x)=3ax^2+2bx+c$

- La pendiente de la recta tangente es nula ⟶ $f'(0)=c=0 \longrightarrow c=0$.

  La función pasa por el punto (0, 2) ⟶ $f(0)=2 \rightarrow d=2$.

- La pendiente de esta recta tangente es 1 ⟶ $f'(1)=1 \rightarrow 3a+2b=1$.

  $x-y-2=0 \xrightarrow{x=1} y=-1$ ⟶ La función pasa por el punto (1, –1) ⟶ $f(1)=-1 \rightarrow a+b+2=-1 \rightarrow a+b=-3$.

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones anteriores:

$\begin{cases} 3a+2b=1 \\ a+b=-3 \end{cases} \rightarrow a=7, b=-10 \longrightarrow f(x)=7x^3-10x^2+2$

57. Página 175

a) $y=-2x^2+3x \qquad \text{Dom} f(x)=\mathbb{R}$

$y'=-4x+3 \qquad y'=0 \rightarrow x=\frac{3}{4} \qquad y'(1)=-1<0 \qquad y'(0)=3>0$

La función es creciente en $\left(-\infty,\frac{3}{4}\right)$ y decreciente en $\left(\frac{3}{4},+\infty\right)$.

Tiene un máximo relativo en $x=\frac{3}{4}$.

b) $y = x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 4$ $\text{Dom} f(x) = \mathbb{R}$

$y' = 4x^3 + 6x^2 - 10x$ $y' = 0 \rightarrow x = -\frac{5}{2}, x = 0, x = 1$

$y'(-3) = -24 < 0$ $y'(-1) = 12 > 0$ $y'\left(\frac{1}{2}\right) = -3 < 0$ $y'(2) = 36 > 0$

La función es decreciente en $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup (0, 1)$ y creciente en $\left(-\frac{5}{2}, 0\right) \cup (1, +\infty)$.

Tiene mínimos relativos en $x = -\frac{5}{2}$ y $x = 1$ y un máximo relativo en $x = 0$.

c) $y = 4x^3 - x^2 - x + 5$ $\text{Dom} f(x) = \mathbb{R}$

$y' = 12x^2 - 2x - 1$ $y' = 0 \rightarrow x = \frac{1-\sqrt{13}}{12}, x = \frac{1+\sqrt{13}}{12}$

$y'(-1) = 13$ $y'(0) = -1$ $y'(1) = 9$

La función es decreciente en $\left(\frac{1-\sqrt{13}}{12}, \frac{1+\sqrt{13}}{12}\right)$ y creciente en $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{13}}{12}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{13}}{12}, +\infty\right)$.

Tiene un mínimo relativo en $x = \frac{1+\sqrt{13}}{12}$ y máximo relativo en $x = \frac{1-\sqrt{13}}{12}$.

d) $y = x^5 - 5x^3$ $\text{Dom} f(x) = \mathbb{R}$

$y' = 5x^4 - 15x^2$ $y' = 0 \rightarrow 5x^2 \cdot (x^2 - 3) = 0 \rightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{3}$

$y'(-2) = 20 > 0$ $y'(-1) = -10 < 0$ $y'(1) = -10 < 0$ $y'(2) = 80 - 60 - 20 > 0$

La función es creciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ y decreciente en $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Tiene máximos relativos en $x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$.

58. Página 175

a) $y = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases} \rightarrow y' = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ $y'(x) = 0 \rightarrow x = 0$

$y'(-1) = -2 < 0$ $y'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 > 0$

$y(1^-) = y(1^+) = y(1) = 0 \rightarrow$ La función es continua en $x = 1$.

$y'(1^-) = 2 \neq y'(1^+) = 1 \rightarrow$ La función no es derivable en $x = 1$.

$y'(2) = \frac{1}{2} > 0$

La función es creciente en $(0, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, 0)$. Tiene el mínimo relativo en $x = 0$.

b) $y = |x^2 - 4| - 3 \rightarrow y = \begin{cases} x^2 - 7 & \text{si } x \in (-\infty, \sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty) \\ -x^2 + 1 & \text{si } x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \end{cases}$

$y' = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in (-\infty, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty) \\ -2x & \text{si } x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \end{cases}$ $y' = 0 \rightarrow x = 0$

$y'(-2) = -4 < 0$ $y'(2) = 4 > 0$ $y'(-1) = 2 > 0$ $y'(1) = -2 < 0$

La función es creciente en $(-\sqrt{2},0)\cup(\sqrt{2},+\infty)$ y decreciente en $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(0,\sqrt{2})$. Tiene máximo relativo en $x=0$ y mínimos relativos en $x=\sqrt{2}, x=-\sqrt{2}$.

59. Página 175

a) $f(x)=x^2(x+1)$ $\quad$ $\text{Dom}\, f(x)=\mathbb{R}$

$f'(x)=3x^2+2x=x(3x+2)$ $\quad$ $f'(x)=0\to x(3x+2)=0\to x_1=0, x_2=-\dfrac{2}{3}$

$f'(-1)=1>0$ $\quad$ $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}<0$ $\quad$ $f'(1)=5>0$

La función es creciente en $\left(-\infty,-\dfrac{2}{3}\right)\cup(0,+\infty)$ y decreciente en $\left(-\dfrac{2}{3},0\right)$.

Tiene máximo relativo en $x=-\dfrac{2}{3}$ y mínimo relativo en $x=0$.

b) $g(x)=3x^3-7x+2$ $\quad$ $\text{Dom}\, g(x)=\mathbb{R}$

$g'(x)=9x^2-7$ $\quad$ $g'(x)=0\to 9x^2=7\to x=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

$g'(-1)=2>0$ $\quad$ $g'(0)=-7<0$ $\quad$ $g'(1)=2>0$

La función es creciente en $\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{7}}{3},+\infty\right)$ y decreciente en $\left(-\dfrac{\sqrt{7}}{3},\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right)$.

Tiene máximo relativo en $x=-\dfrac{\sqrt{7}}{3}$ y mínimo relativo en $x=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

c) $h(x)=-x^4+3x^2-2x$ $\quad$ $\text{Dom}\, h(x)=\mathbb{R}$

$h'(x)=-4x^3+6x-2$ $\quad$ $h'(x)=0\to(x-1)(-4x^2-4x+2)=0\to x=1, x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

$h'(-2)=18>0$ $\quad$ $h'(0)=-2<0$ $\quad$ $h'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}>0$ $\quad$ $h'(2)=-22<0$

La función es creciente en $\left(-\infty,\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2},1\right)$ y decreciente en $\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2},\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)\cup(1,+\infty)$.

Tiene máximos relativos en $x=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$ y $x=1$ y mínimo relativo en $x=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

60. Página 175

a) $y=|x^2-2|\to y=\begin{cases}x^2-2 & \text{si } x\in(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},+\infty)\\ -x^2+2 & \text{si } x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})\end{cases}$

$y'=\begin{cases}2x & \text{si } x\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)\\ -2x & \text{si } x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})\end{cases}$ $\quad$ $y'=0\to x=0$

$y'(-2)=-4<0$ $\quad$ $y'(-1)=2>0$ $\quad$ $y'(1)=-2<0$ $\quad$ $y'(2)=4>0$

La función es creciente en $(-\sqrt{2},0)\cup(\sqrt{2},+\infty)$ y decreciente en $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(0,\sqrt{2})$.

Tiene mínimos relativos en $x=-\sqrt{2}$ y $x=\sqrt{2}$ y máximo relativo en $x=0$.

b) $y=\left|-x^2+6x-9\right| \rightarrow y=\left|-(x-3)^2\right|=(x-3)^2$

$y'=2(x-3)$ $\qquad$ $y'=0 \rightarrow x=3$

$y'(0)=-6<0$ $\qquad$ $y'(4)=2>0$

La función es creciente en $(3,+\infty)$ y decreciente en $(-\infty,3)$ y tiene un mínimo relativo en $x=3$.

c) $y=\left|-x^2+5x-6\right| \rightarrow y=\begin{cases} -x^2+5x-6 & \text{si } x\in[2,3] \\ x^2-5x+6 & \text{si } x\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty) \end{cases}$

$y'=\begin{cases} -2x+5 & \text{si } x\in(2,3) \\ 2x-5 & \text{si } x\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty) \end{cases}$ $\qquad$ $y'=0 \rightarrow x=\dfrac{5}{2}$

$y'(0)=-5<0$ $\qquad$ $y'\left(\dfrac{11}{5}\right)=\dfrac{3}{5}>0$ $\qquad$ $y'\left(\dfrac{13}{5}\right)=-\dfrac{1}{5}<0$ $\qquad$ $y'(4)=3>0$

La función es creciente en $\left(2,\dfrac{5}{2}\right)\cup(3,+\infty)$ y decreciente en $(-\infty,2)\cup\left(\dfrac{5}{2},3\right)$.

Tiene mínimos relativos en $x=2$ y $x=3$ y el máximo relativo en $x=\dfrac{5}{2}$.

61. Página 175

a) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$ $\qquad$ $\text{Dom } f(x)=\mathbb{R}-\{1\}$

$f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ $\qquad$ $f'(x)=0 \rightarrow x=0,\ x=2$

En $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ se tiene $f'(x)>0 \longrightarrow f(x)$ es creciente.

En $(0,1)\cup(1,2)$ se tiene $f'(x)<0 \longrightarrow f(x)$ es decreciente.

Así, $f(x)$ tiene un máximo relativo en $x=0$ y un mínimo relativo en $x=2$.

b) $g(x)=\dfrac{40-5x}{10-x}$ $\qquad$ $\text{Dom } g(x)=\mathbb{R}-\{10\}$

$g'(x)=\dfrac{-10}{(10-x)^2}<0\ \ \forall x\in\mathbb{R}-\{10\}$ $\rightarrow$ Por tanto, $g(x)$ es decreciente en todo su dominio.

c) $h(x)=\dfrac{7x^2+2}{x}$ $\qquad$ $\text{Dom } h(x)=\mathbb{R}-\{0\}$

$h'(x)=\dfrac{7x^2-2}{x^2}$ $\qquad$ $h'(x)=0 \rightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{2}{7}}$

En $\left(-\infty,-\sqrt{\dfrac{2}{7}}\right)\cup\left(\sqrt{\dfrac{2}{7}},+\infty\right)$ se tiene $h'(x)>0 \longrightarrow h(x)$ es creciente.

En $\left(-\sqrt{\dfrac{2}{7}},0\right)\cup\left(0,\sqrt{\dfrac{2}{7}}\right)$ se tiene $h'(x)<0 \longrightarrow h(x)$ es decreciente.

La función tiene un máximo relativo en $x=-\sqrt{\dfrac{2}{7}}$ y un mínimo relativo en $x=\sqrt{\dfrac{2}{7}}$.

d) $i(x)=\dfrac{x}{x^2+2}$ Dom $i(x)=\mathbb{R}$

$i'(x)=\dfrac{-x^2+2}{(x^2+2)^2}$ $i'(x)=0 \rightarrow x=\pm\sqrt{2}$

En $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$ se tiene $i'(x)<0 \longrightarrow i(x)$ es decreciente.

En $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ se tiene $i'(x)>0 \longrightarrow i(x)$ es creciente.

Así, $i(x)$ tiene un máximo relativo en $x=\sqrt{2}$ y un mínimo relativo en $x=-\sqrt{2}$.

e) $j(x)=\dfrac{1}{x-2}$ Dom $j(x)=\mathbb{R}-\{2\}$

$j'(x)=\dfrac{-1}{(x-2)^2}<0 \quad \forall x\neq 2 \longrightarrow j(x)$ es decreciente en todo su dominio.

f) $k(x)=-\dfrac{x^3}{x^2-3}$ Dom $k(x)=\mathbb{R}-\left\{\pm\sqrt{3}\right\}$

$k'(x)=\dfrac{-x^4+9x^2}{(x^2-3)^2}$ $k'(x)=0 \rightarrow x=0,\ x=\pm 3$

En $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$ se tiene $k'(x)<0 \longrightarrow k(x)$ es decreciente en dicho intervalo.

En $(-3,-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3},0)\cup(0,\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},3)$ se tiene $k'(x)>0 \longrightarrow k(x)$ es creciente en dicho conjunto.

La función tiene un mínimo relativo en $x=-3$ y un máximo relativo en $x=3$.

62. Página 175

a) $y=\ln x-2$

El dominio de $y(x)$ es el intervalo $(0,+\infty)$.

$y'=\dfrac{1}{x} \longrightarrow y'>0$ en todo el dominio de y .

Por tanto, no tiene máximos ni mínimos relativo y es creciente para $x>0$.

b) $y=\ln(x-2)$

El dominio de $y(x)$ es el intervalo $(2,+\infty)$.

$y'=\dfrac{1}{x-2} \longrightarrow y'>0$ en todo el dominio de y .

Por tanto, no tiene máximos ni mínimos relativos y es creciente para $x>0$.

c) $y=\dfrac{2}{x}+\ln x$

El dominio de $y(x)$ es el intervalo $(0,+\infty)$.

$y'=\dfrac{-2}{x^2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{-2+x}{x^2} \longrightarrow y'=0 \rightarrow x=2$ $y'(1)=-1<0$ $y'(4)=\dfrac{1}{8}>0$

La función es decreciente en (0, 2) y creciente en $(2,+\infty)$. Tiene un mínimo relativo en $x=2$.

d) $y = \dfrac{\ln x}{x}$

El dominio de $y(x)$ es el intervalo $(0, +\infty)$.

$y' = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

$y' = 0 \rightarrow 1 - \ln x = 0 \rightarrow x = e$

$y'(1) = 1 > 0$ $\qquad$ $y'(e^2) = \dfrac{1-2}{e^2} < 0$

Por tanto, hay un máximo relativo en $x = e$, es creciente en $(0, e)$ y decreciente en $(e, +\infty)$.

e) $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$ $\rightarrow$ El dominio de $y(x)$ es el intervalo $(0, +\infty)$.

$y' = \dfrac{1 - 2\ln x}{x^3}$ $\qquad$ $y' = 0 \rightarrow 1 - 2\ln x = 0 \rightarrow \ln x = \dfrac{1}{2} \rightarrow x = \sqrt{e}$

$y'(1) = 1 > 0 \ \rightarrow \ y$ es creciente a la izquierda de $x = \sqrt{e}$.

$y'(2) = \dfrac{1 - 2\ln 2}{8} < 0$

Por tanto, y es decreciente a la derecha de $x = \sqrt{e}$ $\rightarrow$ Es creciente en $(0, \sqrt{e})$ y decreciente en $(\sqrt{e}, +\infty)$.

Hay un máximo relativo en $x = \sqrt{e}$.

f) $y = \ln(\sqrt{x})$

El dominio de $y(x)$ es el intervalo $(0, +\infty)$.

$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2x} \ \rightarrow \ y' > 0$ en todo el dominio de y.

Por tanto, no tiene máximos ni mínimos y es creciente para $x > 0$.

63. Página 175

a) $f(x) = 2cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) \ \rightarrow \ f(x) = -2sen(x)$ $\qquad$ $\text{Dom}\, f(x) = \mathbb{R}$

La función es continua en toda la recta real y $f'(x) = -2 \cdot cos\, x$.

Es periódica de período 2π, la estudiamos en $[-\pi, \pi]$:

En $\left(-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ se tiene $f'(x) > 0 \ \rightarrow \ f(x)$ es creciente en dicho intervalo.

En $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ se tiene $f'(x) < 0 \ \rightarrow \ f(x)$ es decreciente en dicho intervalo.

b) $g(x) = x - sen\, x$ $\qquad$ $\text{Dom}\, g(x) = \mathbb{R}$

$g(x)$ es continua en toda la recta real.

$g'(x) = 1 - cosx$ $\qquad$ $g'(x) = 0 \rightarrow x = 0 \pm k\dfrac{\pi}{2}, k = 0, 1, 2, \ldots$

Pero como en el intervalo $[-\pi, \pi]$ $cos\, x \leq 1$, $g'(x)$ es siempre positiva.

Así, $g(x)$ es siempre creciente y no tiene extremos relativos.

c) $h(x)=tg\,x$ Dom $h(x)=\mathbb{R}$

$h'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x} \to h'(x)>0$ para todo $x \to h(x)$ siempre creciente y no tiene extremos relativos.

64. Página 175

a) $y=2x^2\cdot e^x$ Dom $y(x)=\mathbb{R}$

$y'=2xe^x(2+x)$ $y'=0 \to x=0, x=-2$

En $(-\infty,-2)$ se tiene que $y'>0$ y en $(-2,0)$ se tiene que $y'<0$.

En $(0,\infty)$ se tiene que $y'>0$.

Por tanto, es creciente en $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ y decreciente en $(-2,0)$.

En $x=-2$ se alcanza el máximo relativo y en $x=0$ el mínimo.

b) $y=(x-4)\cdot e^x$ Dom $y(x)=\mathbb{R}$

$y'=e^x(x-3)$ $y'=0 \to x=3$

En $(-\infty,3)$ se tiene que $y'<0$. $\to$ Es decreciente en $(-\infty,3)$.

En $(3,+\infty)$ se tiene que $y'>0$. $\to$ Es creciente en $(3,+\infty)$.

En $x=3$ se alcanza el mínimo relativo.

c) $y=e^{x^2+2x}+1$ Dom $y(x)=\mathbb{R}$

$y'=2(x+1)e^{x^2+2x}$ $y'=0 \to x=-1$

En $(-\infty,-1)$ se tiene que $y'<0$. $\to$ Es decreciente en $(-\infty,-1)$.

En $(-1,+\infty)$ se tiene que $y'>0$ $\to$ Es creciente en $(-1,+\infty)$

En $x=-1$ se alcanza el mínimo relativo.

d) $y=x\cdot 2^x$ Dom $y(x)=\mathbb{R}$

$y'=2^x(1+x\ln 2)$ $y'=0 \to x=-\dfrac{1}{\ln 2}$

En $\left(-\infty,-\dfrac{1}{\ln 2}\right)$ se tiene que $y'<0$ $\to$ Es decreciente en $\left(-\infty,-\dfrac{1}{\ln 2}\right)$.

En $\left(-\dfrac{1}{\ln 2},+\infty\right)$ se tiene que $y'>0$ $\to$ Es creciente en $\left(-\dfrac{1}{\ln 2},+\infty\right)$.

En $x=-\dfrac{1}{\ln 2}$ se alcanza el mínimo relativo.

e) $y=2^{x-x^2}-3$ Dom $y(x)=\mathbb{R}$

$y'=(1-2x)2^{x-x^2}\ln 2$ $y'=0 \to x=\dfrac{1}{2}$

En $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$ se tiene que $y'>0$. $\to$ Es creciente en $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$.

En $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ se tiene que $y'<0$. $\to$ Es decreciente en $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

En $x=\dfrac{1}{2}$ se alcanza el máximo relativo.

f) $y = 2^{x^3+1}$ Dom $y(x) = \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 \cdot 2^{x^3+1} \cdot \ln 2$ $y' = 0 \rightarrow x = 0$

En $(-\infty, 0)$ se tiene que $y' > 0$ y en $(0, +\infty)$ se tiene que $y' > 0$.

Por tanto, es creciente en $\mathbb{R}$ y no tiene extremos relativos.

65. Página 175

a) $y' = 3x^2 - 24$ $y'(x) = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{8}$ $y'' = 6x$

$y''(\sqrt{8}) = 6\sqrt{8} > 0 \rightarrow x = \sqrt{8}$ es un mínimo.

$y''(-\sqrt{8}) = -6\sqrt{8} < 0 \rightarrow x = -\sqrt{8}$ es un máximo.

b) $y'(x) = 8 + 12x - 4x^3$ $y'(x) = 0 \rightarrow x = -1, x = 2$ $y''(x) = 12 - 12x^2$

$y''(2) = -36 < 0 \rightarrow x = 2$ es un máximo.

$y''(-1) = 0$, $y'''(x) = -24x \rightarrow y'''(-1) = 24 \neq 0 \rightarrow x = -1$ es un punto de inflexión.

c) $y'(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2}$ $y'(x) = 0 \rightarrow x = \pm 2$ $y''(x) = \dfrac{8}{x^3}$

$y''(2) = 1 > 0 \rightarrow$ La función alcanza un mínimo en $x = 2$.

$y''(-2) = -1 < 0 \rightarrow$ La función alcanza un máximo en $x = -2$.

d) $y' = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$ $y' = 0 \rightarrow x = 0$ $y'' = \dfrac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$

$y''(0) = 2 \rightarrow$ La función alcanza un mínimo en $x = 0$.

66. Página 175

$y(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 13$

Veamos que si $y(x)$ siempre creciente, entonces $y'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$:

$y'(x) = 3x^2 - 4x + 6$ $y'(x) = 0 \rightarrow x = -\dfrac{-4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot (3 \cdot 6)}}{6} = \dfrac{4 \pm \sqrt{-56}}{6}$

$y'(x)$ no tiene raíces reales (es decir, nunca se anula) y es continua $\rightarrow$ El signo de *y* es constante.

Comprobamos el signo de la derivada: $y'(0) = 6 > 0$

Es decir: $y'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

67. Página 175

$y(x) = x^5 + mx + 2$ $y'(x) = 5x^4 + m$

$5x^4 > 0 \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow m > 0 \rightarrow 5x^4 + m > 0$

Por tanto, $y'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow y(x)$ es creciente en todos los números reales y para cualquier valor del parámetro *m*.

68. Página 175

a) $f(x)$ no es derivable en todos sus puntos, ya que las derivadas laterales en $x=-1$ no coinciden.

b) $f'(x)<0$ en $(-\infty,-2)$ $\rightarrow$ $f(x)$ es decreciente en $(-\infty,-2)$.

$f'(x)>0$ en $(-2,+\infty)$ $\rightarrow$ $f(x)$ es creciente en $(-2,+\infty)$.

c) Existe un mínimo relativo en $x=-2$ porque es el punto donde se anula la derivada.

d) $f'(x)=1$ si $x\geq -1$ $\rightarrow$ $f(x)=x+k$ si $x\geq -1$ porque la derivada de una recta es justamente su pendiente.

Para obtener *k*, imponemos la condición dada: $f(1)=1\rightarrow 1+k=1\rightarrow k=0$

Así, $f(2)=2+0=2$.

69. Página 175

$y(x)=ax^2+bx+c$

La función pasa por $(1,2)$ y $(2,6)$ $\rightarrow$ $2=a+b+c$ y $6=4a+2b+c$.

$y'(x)=2ax+b$

$y'(2)=4a+b$ equivale a la pendiente de la recta tangente.

La recta tangente en $(2,6)$ es $y=7x-8$ $\rightarrow$ $4a+b=7$

Tenemos, por tanto, un conjunto de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} a+b+c=2 \\ 4a+2b+c=6 \\ 4a+b=7 \end{cases} \rightarrow \quad a=3, b=-5, c=4$$

Es decir, $y(x)=3x^2-5x+4$.

A continuación estudiamos la monotonía de la función:

$y'(x)=6x-5 \qquad y'(x)=0\rightarrow x=\frac{5}{6}$

En $\left(-\infty,\frac{5}{6}\right)$: $y'(x)<0$ $\rightarrow$ $y(x)$ es decreciente en este intervalo.

En $\left(\frac{5}{6},+\infty\right)$: $y'(x)>0$ $\rightarrow$ $y(x)$ es creciente en este intervalo.

En $x=\frac{5}{6}$ está el único mínimo relativo de la función.

70. Página 176

$y(x)=ax^2+bx+c$

La función pasa por $(1,0)$ y $(0,-2)$ $\rightarrow$ $0=a+b+c$ y $-2=c$.

Además, tiene un mínimo relativo en $x=\frac{3}{2}$ $\rightarrow$ $y'\left(\frac{3}{2}\right)=0$.

$y'(x)=2ax+b \rightarrow 2a\frac{3}{2}+b=0 \rightarrow 3a+b=0$

Tenemos el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+b=0 \\ c=-2 \end{cases} \rightarrow a=-1\ , b=3\ , c=-2 \rightarrow y(x)=-x^2+3x-2$$

A continuación estudiamos la monotonía de la función:

$y'(x)=-2x+3 \qquad y'(x)=0 \rightarrow -2x+3=0 \rightarrow x=\dfrac{3}{2}$

En $\left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right)$: $y'(x)>0 \rightarrow y(x)$ creciente en este intervalo.

En $\left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$: $y'(x)<0 \rightarrow y(x)$ decreciente en este intervalo.

En $x=\dfrac{3}{2}$ está el único máximo relativo de la función.

71. Página 176

a) $y=x^3+ax \qquad y'(x)=3x^2+a$

Como existe un extremo relativo en $x=2 \rightarrow y'(2)=0$:

$3\cdot 2^2+a=0 \rightarrow a=-12$

Es decir, $y(x)=x^3-12x$.

b) $y(x)=x^3-12x \qquad y'(x)=3x^2-12 \qquad y''(x)=6x$

$y'(x)=0 \rightarrow a=\pm 2$

$y''(2)=12>0 \qquad y''(-2)=-12<0$

Es decir:

- $x=2$ es un mínimo relativo y $x=-2$ es un máximo relativo.
- $y(x)$ es creciente en $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ y decreciente en $(-2,2)$.

72. Página 176

$y(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$y(0)=0 \quad \rightarrow d=0$

$y(1)=\dfrac{5}{6} \rightarrow a+b+c+d=\dfrac{5}{6} \rightarrow 6a+6b+6c=5$

$y'(x)=3ax^2+2bx+c$

$y(x)$ tiene máximo en $x=1 \rightarrow 3a+b+c=0$.

$y(x)$ tiene mínimo en $x=2 \rightarrow 12a+4b+c=0$.

Por tanto, tenemos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas:

$$\begin{cases} 6a+6b+6c=5 \\ 3a+b+c=0 \\ 12a+4b+c=0 \end{cases} \rightarrow a=-\frac{5}{12}\ ,\ b=\frac{5}{4}\ ,\ c=0 \text{ y } d=0$$

73. Página 176

a) $y=\dfrac{ax^2+x+b}{x^2+1}$

$y'=\dfrac{2ax-2bx-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

Tiene un máximo en $x=-1 \rightarrow y'(-1)=0=\dfrac{-2a+2b}{4} \rightarrow a=b$.

Pasa por $P\left(-2,\dfrac{13}{5}\right) \rightarrow y(-2)=\dfrac{13}{5}=\dfrac{4a-2+b}{5} \rightarrow 4a-2+b=13$.

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} a=b \\ 4a+b-15=0 \end{cases} \rightarrow a=b=3$$

Por tanto, la función es $y=\dfrac{3x^2+x+3}{x^2+1}$.

b) Estudiamos la monotonía de la función:

El dominio es toda la recta real.

$y'(x)=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

$y'(x)=0 \rightarrow 1-x^2=0 \rightarrow x=\pm 1$

En $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, $y'(x)<0 \rightarrow y(x)$ decreciente en este conjunto de intervalos.

En $(-1,1)$, $y'(x)>0 \rightarrow y(x)$ creciente en este intervalo.

En $x=-1$ existe el único mínimo relativo de la función y en $x=1$, el único máximo relativo.

74. Página 176

$f(x)=\dfrac{a^2x}{2x^2-5ax+2a^2} \rightarrow f'(x)=\dfrac{2a^2(a^2-x^2)}{(2x^2-5ax+2a^2)^2}$

$f(x)$ tiene extremo relativo en $x=2 \rightarrow f'(2)=0=\dfrac{2a^2(a^2-4)}{(8-10a+2a^2)^2}$.

La anterior identidad se verifica si $2a^2(a^2-4)=0 \rightarrow a=0$ y $a=\pm 2$.

Por tanto, $a=\pm 2$, ya que en el enunciado se pide descartar la solución $a=0$.

- Si $a=-2$:

  $2x^2+10x+8=0 \rightarrow x^2+5x+4=0 \rightarrow x_1=-4, x_2=-1$

  Así, $\text{Dom}\, f=\mathbb{R}-\{-4,-1\}$.

- Si $a=2$:

  $2x^2-10x+8=0 \rightarrow x^2-5x+4=0 \rightarrow x_1=4, x_2=1$

  Así, $\text{Dom}\, f=\mathbb{R}-\{1,4\}$.

75. Página 176

$$y=\frac{x^2+ax+b}{x^2+ax+c} \rightarrow y'(x)=\frac{(2x+a)(c-b)}{(x^2+ax+c)^2}$$

Tiene un extremo relativo en $P(2,-1) \rightarrow y'(2)=0 \rightarrow \frac{(4+a)(c-b)}{(4+2a+c)^2}=0 \rightarrow (a+4)(c-b)=0$.

Pasa por el punto (2, –1) $\rightarrow y(2)=-1 \rightarrow \frac{4+2a+b}{4+2a+c}=-1 \rightarrow 4a+b+c=-8$.

Pasa por el origen $\rightarrow y(0)=0=\frac{b}{c} \rightarrow b=0$ y $c\neq 0$.

Resolviendo el sistema: $\begin{cases}(4+a)(c-b)=0\\ 8+4a+b+c=0\\ b=0\end{cases} \rightarrow a=-4$, $b=0$ y $c=8$

76. Página 176

$$y(x)=x\cdot e^{ax} \rightarrow y'(x)=e^{ax}+ax\cdot e^{ax}=e^{ax}(1+ax)$$

Tiene un extremo relativo en $x=1 \rightarrow e^{a}(1+a)=0 \rightarrow a=-1$.

Así, $y(x)=x\cdot e^{-x}$.

77. Página 176

$$f(x)=x+ax\cdot|x| \rightarrow f(x)=\begin{cases}x+ax^2 & \text{si } x\geq 0\\ x-ax^2 & \text{si } x<0\end{cases} \qquad \text{Dom } f(x)=\mathbb{R}$$

$$f'(x)=\begin{cases}1+2ax & \text{si } x>0\\ 1-2ax & \text{si } x<0\end{cases}$$

Tiene un extremo relativo en $x=1 \rightarrow f'(1)=0 \rightarrow 1+2a=0 \rightarrow a=-\frac{1}{2}$.

Entonces:

$$f(x)=\begin{cases}x-\frac{1}{2}x^2 & \text{si } x\geq 0\\ x+\frac{1}{2}x^2 & \text{si } x<0\end{cases} \rightarrow f'(x)=\begin{cases}1-x & \text{si } x>0\\ 1+x & \text{si } x<0\end{cases}$$

En $x=0$, $f(x)$ es continua por coincidir sus límites laterales y $f(x)$ es derivable por coincidir sus derivadas laterales.

Ahora ya podemos calcular la monotonía de la función y sus extremos relativos:

$$f'(x)=0 \rightarrow \begin{cases}1-x=0\\ 1+x=0\end{cases} \rightarrow x=\pm 1$$

En $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ se tiene que $f'(x)<0 \rightarrow$ La función es decreciente.

En $(-1,0)\cup(0,1)=(-1,1)$ se tiene que $f'(x)>0$. $\rightarrow$ La función es creciente.

En $x=-1$ se alcanza el mínimo relativo y en $x=1$ el máximo.

78. Página 176

$y(x)=x^3+ax^2-3x \rightarrow y'(x)=3x^2-2ax-3 \rightarrow y''(x)=6x-2a$

$y(x)$ tiene punto de inflexión en $x=1 \rightarrow y''(1)=0 \rightarrow 6\cdot 1-2a=0 \rightarrow a=3$.

79. Página 176

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c \rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b \rightarrow f''(x)=6x+2a$

$f(x)$ tiene punto de inflexión en $x=3 \rightarrow f''(3)=0 \rightarrow 6\cdot 3+2a=0 \rightarrow a=-9$.

$f(x)$ pasa por $(1,0) \rightarrow f(1)=0 \rightarrow b+c=8$.

$f(x)$ tiene mínimo relativo en $x=1 \rightarrow f'(1)=0 \rightarrow b=15$.

Como $b+c=8$ y $b=15 \rightarrow c=-7 \rightarrow f(x)=x^3-9x^2+15x-7$.

80. Página 176

a) $y=x^3+3x^2-5x+1 \rightarrow y'=3x^2+6x-5 \rightarrow y''=6x+6$

$y''(x)=0 \rightarrow x=-1$

$\text{Dom } y=\mathbb{R}$

$y''(x)>0$ en el intervalo $(-1,+\infty) \rightarrow y$ es cóncava en dicho intervalo.

$y''(x)<0$ en el intervalo $(-\infty,-1) \rightarrow y$ es convexa en dicho intervalo.

b) $y=x^4-6x^2 \rightarrow y'=4x^3-12x \rightarrow y''=12x^2-12$

$y''(x)=0 \rightarrow x=\pm 1$

$\text{Dom } y=\mathbb{R}$

$y''(x)>0$ en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \rightarrow y$ es cóncava en dicho conjunto de intervalos.

$y''(x)<0$ en el intervalo $(-1,1) \rightarrow y$ es convexa en dicho intervalo.

c) $y=\dfrac{x^2}{x^2-1} \rightarrow y'=\dfrac{-2x}{(x^2-1)^2} \rightarrow y''=\dfrac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$ $\quad$ $\text{Dom } y=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

$y''(x)\neq 0 \ \forall x\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$

$y''(x)>0$ en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \rightarrow y$ es cóncava en dicho conjunto de intervalos.

$y''(x)<0$ en el intervalo $(-1,1) \rightarrow y$ es convexa en dicho intervalo.

d) $y=\dfrac{x^3-1}{x^2} \rightarrow y'=\dfrac{x^3+2}{x^3} \rightarrow y''=-\dfrac{6}{x^2}$

$y''(x)<0 \ \forall x\in\mathbb{R}-\{0\} \rightarrow y$ es convexa en $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

e) $y=\sqrt{x^2+4} \rightarrow y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}} \rightarrow y''=\dfrac{4}{(x^2+4)^{3/2}}$ $\quad$ $\text{Dom } y=\mathbb{R}$

$y''(x)\neq 0 \ \forall x\in\mathbb{R}$ $\quad$ $y''>0 \ \forall x \rightarrow y$ es cóncava en toda la recta real.

f) $y=\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \rightarrow y'=-\frac{x}{2\sqrt{4-x^2}} \rightarrow y''=-\frac{2}{(4-x^2)^{3/2}}$ Dom $y=[-2, 2]$

$y''(x)\neq 0 \quad \forall x\in(-2, 2)$

$y''<0$ en (–2, 2) $\rightarrow$ y es convexa en (–2, 2).

$y''>0$ en $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ $\rightarrow$ y es cóncava en $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

g) $y=1-2\ln x \rightarrow y'=-\frac{2}{x} \rightarrow y''=\frac{2}{x^2}$ Dom $y=(0,+\infty)$

$y''(x)\neq 0 \quad \forall x\in(0,+\infty)$

$y''>0$ para todo $x>0$ $\rightarrow$ y es cóncava en todo su dominio.

h) $y=\ln(x^2-x)$ Dom$y=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

$y'=\frac{2x-1}{x^2-x} \rightarrow y''(x)=\frac{2(x^2-x)-(2x-1)^2}{(x^2-x)}=\frac{-2x^2+2x-1}{x^2(x-1)^2}$

$y''(x)\neq 0 \quad \forall x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

$y''<0$ en $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ $\rightarrow$ y es convexa en todo su dominio.

i) $y=\frac{\ln x}{x} \rightarrow y'=\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x^2} \rightarrow y''=\frac{-3}{x^3}+\frac{2\ln x}{x^3}$ Dom$y=(0,+\infty)$

$y''=0 \rightarrow x=e^{\frac{3}{2}}$

$y''(x)>0$ en el intervalo $\left(e^{\frac{3}{2}},+\infty\right)$ $\rightarrow$ y es cóncava en dicho intervalo.

$y''(x)<0$ en el intervalo $\left(0,e^{\frac{3}{2}}\right)$ $\rightarrow$ y es convexa en dicho intervalo.

j) $y=(x-1)e^x \rightarrow y'=xe^x \rightarrow y''=(x+1)e^x$ Dom$y=\mathbb{R}$

$y''=0 \rightarrow x=-1$

$y''(x)>0$ en el intervalo $(-1,+\infty)$ $\rightarrow$ y es cóncava en dicho intervalo.

$y''(x)<0$ en el intervalo $(-\infty,-1)$ $\rightarrow$ y es convexa en dicho intervalo.

k) $y=\frac{x}{e^x} \rightarrow y'=\frac{1-x}{e^x} \rightarrow y''=\frac{x-2}{e^x}$ Dom$y=\mathbb{R}$

$y''=0 \rightarrow x=2$

$y''(x)>0$ en el intervalo $(2,+\infty)$ $\rightarrow$ y es cóncava en dicho intervalo.

$y''(x)<0$ en el intervalo $(-\infty,2)$ $\rightarrow$ y es convexa en dicho intervalo.

l) $y=1+2senx \rightarrow y'=2\cos x \rightarrow y''=-2senx$ Dom$y=\mathbb{R}$

Estudiamos la función en $(-\pi,\pi)$ por ser periódica de período 2π .

$y''=0 \rightarrow x=0$

$y''(x)>0$ en el intervalo $(-\pi,0)$ $\rightarrow$ y es cóncava en dicho intervalo.

$y''(x)<0$ en el intervalo $(0,\pi)$ $\rightarrow$ y es convexa en dicho intervalo.

m) $y = cos\,2x \rightarrow y' = -2sen\,2x \rightarrow y'' = -4cos\,2x$ $\quad$ $\text{Dom}\,y = \mathbb{R}$

Estudiamos la función en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ por ser periódica de período π.

$y'' = 0 \rightarrow x = -\frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{4}$

$y''(x) > 0$ en $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow y$ es cóncava en dicho conjunto de intervalos.

$y''(x) < 0$ en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow y$ es convexa en dicho intervalo.

n) $y = sen^2 x \rightarrow y' = sen\,2x \rightarrow y'' = 2\cos 2x$ $\quad$ $\text{Dom}\,y = \mathbb{R}$

Estudiamos la función en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ por ser periódica de período π.

$y'' = 0 \rightarrow x = -\frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{4}$

$y''(x) > 0$ en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow y$ es cóncava en dicho intervalo.

$y''(x) < 0$ en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow y$ es convexa en dicho intervalo.

81. Página 176

$y(x) = x^4 + 3x^2 - 5x + 6 \rightarrow y'(x) = 4x^3 + 6x - 5 \rightarrow y''(x) = 12x^2 + 6$

$y''(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ ya que $12 > 0$ y $12x^2 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

Es decir, $y(x)$ no tiene puntos de inflexión al no anularse nunca su segunda derivada.

82. Página 176

a) $y(x) = x^3 + ax^2 - ax + b \rightarrow y'(x) = 3x^2 + 2ax - a \rightarrow y''(x) = 6x + 2a$

$y(x)$ tiene punto de inflexión en $(1, 3) \rightarrow y''(1) = 0 \rightarrow 6 \cdot 1 + 2a = 0 \rightarrow a = -3$

$y(1) = 3 \rightarrow b = 2$

Es decir, $y(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$

b) $y'(x) = 3x^2 - 6x + 3$ $\qquad$ $y'(x) = 0 \rightarrow x = 1$.

$y'(0) = 3 > 0$ y $y'(2) = 3 > 0 \rightarrow x = 1$ no es extremo relativo $\rightarrow y$ es creciente en todo $\mathbb{R}$.

Ya hemos visto que $y(x)$ tiene derivada segunda nula en $x = 1$.

Estudiamos $y''(x)$ en torno a $x = 1$:

$y''(0) = -6 < 0 \rightarrow y(x)$ es convexa para $x < 1$

$y''(2) = 6 > 0 \rightarrow y(x)$ es cóncava para $x > 1$

Esto confirma que $x = 1$ es en efecto un punto de inflexión.

83. Página 176

$f(x)=x^3+ax^2+bx+7 \rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b \rightarrow f''(x)=6x+2a$

Punto de inflexión en $x=1 \rightarrow f''(1)=0=6+2a \rightarrow a=-3$

La recta tangente que forma 45º con el eje *OX* es la recta $y=x$. Así:

$$f'(1)=1=3+2a+b \rightarrow 1=3-6+b \rightarrow b=4$$

84. Página 176

$y(x)=ax^4+bx^2+cx+d \rightarrow y'(x)=4ax^3+2bx+c \rightarrow y''(x)=12ax^2+2b$

$y(x)$ pasa por $P(0,3) \rightarrow y(0)=3=d$.

$y(x)$ pasa por $Q(1,0) \rightarrow y(1)=0=a+b+c+3$.

$y(x)$ tiene extremo relativo en $Q(1,0) \rightarrow y'(1)=0 \rightarrow 4a+2b+c=0$.

$y(x)$ tiene punto de inflexión en $x=\frac{1}{2} \rightarrow y''\left(\frac{1}{2}\right)=0=12a\left(\frac{1}{2}\right)^2+2b \rightarrow 3a+2b=0$.

$y(x)$ viene, por tanto, dada por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a+b+c=-3 \\ 4a+2b+c=0 \\ 3a+2b=0 \end{cases} \rightarrow a=2,\ b=-3,\ c=-2,\ d=3$$

Así, $y(x)=2x^4-3x^2-2x+3$.

Estudiamos a continuación la naturaleza del extremo relativo $Q(1,0)$:

$y'(x)=8x^2-6x-2$

$y'(-1)<0$ y $y'(2)>0 \rightarrow$ El extremo relativo es un mínimo.

85. Página 176

$y(x)=x^3-ax^2-4x+b \rightarrow y'(x)=3x^2-2ax-4 \rightarrow y''(x)=6x-2a$

$y(x)$ tiene punto de inflexión en $x=\frac{2}{3} \rightarrow y''\left(\frac{2}{3}\right)=0 \rightarrow 6\cdot\frac{2}{3}-2a=0 \rightarrow a=2$

$y(x)$ pasa por $(3,0) \rightarrow y(3)=0 \rightarrow b=3$.

Es decir, $y(x)=x^3+2x^2-4x+3$.

86. Página 176

Si *x* e *y* son las dimensiones, tenemos que: $xy=12 \rightarrow y=\frac{12}{x}$

Como la nueva habitación se añade a la casa, una de sus paredes debe coincidir, y de esa forma no necesitamos ningún ladrillo, puesto que ya está construida.

Así, debemos minimizar: $P(x,y)=2x+y \rightarrow P(x)=2x+\frac{12}{x}$

$P'(x) = 2 - \frac{12}{x^2} = \frac{2x^2 - 12}{x^2} = 0 \rightarrow x = -\sqrt{6}, x = \sqrt{6}$

Y como una longitud no puede ser negativa, tenemos que: $x = \sqrt{6} \rightarrow y = 2\sqrt{6}$

Comprobamos que en este punto se alcanza un mínimo:

$P''(x) = \frac{24}{x^3} \rightarrow P''\left(\sqrt{6}\right) > 0 \rightarrow$ Se trata de un mínimo.

Las dimensiones de la habitación son $x = \sqrt{6}$ m e $y = 2\sqrt{6}$ m.

87. Página 176

Llamamos x e y a las dimensiones de la parcela. Como va a estar unida a la pared de la nave, se verifica que: $2x + y = 200 \rightarrow y = 200 - 2x$.

Se trata de maximizar la función superficie dada por:

$S(x) = xy \rightarrow S(x) = x(200 - 2x) = 200x - 2x^2$

$S'(x) = 200 - 4x = 0 \rightarrow x = 50$

$S''(x) = -4 < 0$ en $\mathbb{R} \rightarrow$ En $x = 50$ alcanza un máximo.

Las dimensiones de la parcela son $x = 50$ m e $y = 100$ m.

88. Página 176

Llamamos x a la arista de la base e y a la altura del prisma cuadrangular.

Entonces se debe cumplir que: $x^2y = 20 \rightarrow y = \frac{20}{x^2}$

Como un paragüero no tiene base superior, tenemos que minimizar la función superficie que viene dada por:

$S(x,y) = x^2 + 4xy \rightarrow S(x) = x^2 + 4x\frac{20}{x^2} = x^2 + \frac{80}{x}$

$S'(x) = 2x - \frac{80}{x^2} = \frac{20x^3 - 80}{x^2} = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{40}$

$S''(x) = 2 + \frac{160}{x^3} \rightarrow S''\left(\sqrt[3]{40}\right) > 0 \rightarrow$ Se alcanza un mínimo.

Las dimensiones del paragüero son:

Arista de la base: $x = \sqrt[3]{40}$ dm   Altura: $y = \frac{20}{\left(\sqrt[3]{40}\right)^2} = \frac{20}{\sqrt[3]{1600}}$ dm

89. Página 177

Sean c_1, c_2 los catetos de un triángulo rectángulo cualquiera.

El área, $A(c_1, c_2)$ de dicho triángulo viene dada por la función $A(c_1, c_2) = \frac{c_1 \cdot c_2}{2}$.

El enunciado impone la siguiente restricción: $c_1 + c_2 = 20 \longrightarrow c_2 = 20 - c_1$

$A(c_1) = \frac{c_1(20 - c_1)}{2} = 10c_1 - \frac{1}{2}c_1^2$ $A'(c_1) = 10 - c_1$ $A'(c_1) = 0 \rightarrow c_1 = 10$

Además, $A''(c_1) = -1 < 0 \longrightarrow A(c_1)$ tiene un máximo en $c_1 = 10$. Y como $c_2 = 20 - c_1 \longrightarrow c_2 = 10$.

Así, el triángulo rectángulo con mayor área es aquel que tiene $c_1 = c_2 = 10$ cm.

Por tanto, su área es: $A(10) = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50$ cm^2.

90. Página 177

h : hipotenusa de un triángulo rectángulo.

c_1, c_2 : catetos del triángulo rectángulo.

Por el teorema de Pitágoras se tiene que $8^2 = c_1^2 + c_2^2 \rightarrow c_2 = \sqrt{64 - c_1^2}$.

Así, la función área viene dada por la siguiente expresión:

$$A(c_1, c_2) = \frac{c_1 \cdot c_2}{2} = \frac{c_1 \cdot \sqrt{64 - c_1^2}}{2}$$

$$A'(c_1) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{64 - c_1^2} - \frac{c_1^2}{\sqrt{64 - c_1^2}}\right) \qquad A'(c_1) = 0 \rightarrow \sqrt{64 - c_1^2} = \frac{c_1^2}{\sqrt{64 - c_1^2}} \rightarrow c_1 = \pm 4\sqrt{2}$$

Descartamos la solución negativa, y comprobamos que la positiva es un máximo:

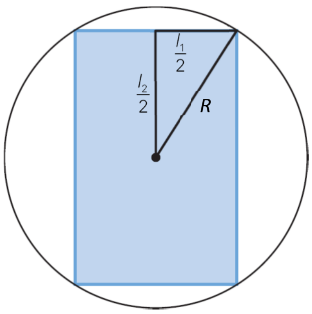
$$A'(5) = \frac{7\sqrt{39}}{39} > 0 \qquad A'(6) = \frac{-2\sqrt{7}}{7} < 0$$

Por tanto, en $c_1 = c_2 = 4\sqrt{2}$ cm la función alcanza su valor máximo:

$$A(4\sqrt{2}) = \frac{1}{2}(4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}) = 16 \text{ cm}^2$$

91. Página 177

El área de un rectángulo es $A(l_1, l_2) = l_1 \cdot l_2$, donde l_1, l_2 son los lados del rectángulo.



Como el rectángulo está inscrito en la circunferencia, se tiene que:

$$(2R)^2 = l_1^2 + l_2^2 \rightarrow l_2 = \sqrt{144 - l_1^2}$$

Así, la función que se quiere maximizar es la siguiente:

$$A(l_1) = l_1\sqrt{144 - l_1^2}$$

$$A'(l_1) = \sqrt{144 - l_1^2} - \frac{l_1^2}{\sqrt{144 - l_1^2}} \qquad A'(l_1) = 0 \rightarrow 144 - l_1^2 = l_1^2 \rightarrow l_1 = \pm 6\sqrt{2}$$

Descartamos el valor negativo, y comprobamos que $l_1 = 6\sqrt{2}$ es un máximo:

$$A''(l_1) = \frac{-l_1}{\sqrt{144 - l_1^2}} - \frac{2l_1\sqrt{144 - l_1^2} + \frac{l_1^3}{\sqrt{144 - l_1^2}}}{144 - l_1^2} \qquad A''(6\sqrt{2}) = -4 < 0$$

Los rectángulos con lado $l_1 = l_2 = 6\sqrt{2}$ cm son los que maximizan el área.

El rectángulo de área máxima que encaja en el círculo de radio $R = 6$ cm es un cuadrado de lado $l = 6\sqrt{2}$ cm.

92. Página 177

El área de un rectángulo es $A(l_1,l_2)=l_1\cdot l_2$, donde l_1, l_2 son los lados del rectángulo.

Como el rectángulo está inscrito en la circunferencia, se tiene que:

$$(2R)^2=l_1^2+l_2^2 \rightarrow l_2=\sqrt{4R^2-l_1^2}$$

Así, la función que queremos maximizar viene dada por la siguiente expresión: $A(l_1)=l_1\sqrt{4R^2-l_1^2}$

$$A'(l_1)=\sqrt{4R^2-l_1^2}-\frac{l_1^2}{\sqrt{4R^2-l_1^2}} \qquad A'(l_1)=0\rightarrow 2l_1(l_1^2-2R^2)=0\rightarrow l_1=\pm R\sqrt{2}$$

Descartamos el valor negativo, y comprobamos que $l_1=R\sqrt{2}$ es un máximo:

$$A''(l_1)=\frac{-l_1}{\sqrt{4R^2-l_1^2}}-\frac{2l_1\sqrt{4R^2-l_1^2}+\dfrac{l_1^3}{\sqrt{4R^2-l_1^2}}}{4R^2-l_1^2} \qquad A''(R\sqrt{2})<0$$

Por tanto, $l_1=R\sqrt{2}$ es un máximo para la función $A(l_1,l_2)=l_1\cdot l_2$.

El rectángulo de área máxima que encaja en el círculo de radio R es un cuadrado de lado $l=R\sqrt{2}$ cm.

93. Página 177

Sean *x* e *y* las dimensiones del rectángulo, y sea *d* su diagonal.

Por un lado, el área del rectángulo viene dada por $xy=3$.

Por otro lado, por el teorema de Pitágoras se tiene que $d\cdot d=d^2=x^2+y^2$.

Así, la función que se quiere minimizar es: $P(x)=x^2+\left(\frac{3}{x}\right)^2=x^2+\frac{9}{x^2}$.

$$P'(x)=2x-\frac{18}{x^3} \qquad P'(x)=0\rightarrow 2x^4-18=0\rightarrow x=\pm\sqrt{3}$$

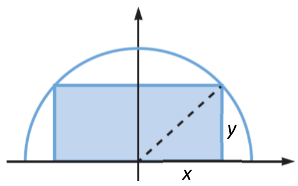
La única solución válida es $x=\sqrt{3}$. Comprobamos que es un mínimo de la función: $P''(x)=2+\frac{54}{x^4}\rightarrow P''\left(\sqrt{3}\right)>0$

Las dimensiones del rectángulo son $x=\sqrt{3}$ e $y=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$, es decir, se tiene un cuadrado de lado $\sqrt{3}$ metros.

94. Página 177

Sean *x* la mitad de la base del rectángulo e *y* su altura. Se cumple que:

$$x^2+y^2=25 \rightarrow y=\sqrt{25-x^2}$$



La función que queremos maximizar es:

$$A(x)=2x\sqrt{25-x^2}=2\sqrt{25x^2-x^4}$$

$$A'(x)=\frac{50x-4x^3}{\sqrt{25x^2-x^4}} \qquad A'(x)=0\rightarrow 50x-4x^3=0\rightarrow x=0,\ x=\pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

En $\left(0,\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\rightarrow A'(x)>0$ y en $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2},5\right)\rightarrow A'(x)<0$. Por tanto, en $x=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ alcanza un máximo.

Así, la base del rectángulo de área máxima mide $5\sqrt{2}$ cm y la altura $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm.

95. Página 177

l: longitud del lado del cuadrado r: radio del círculo

Se sabe que la suma de perímetros es 98 cm.

Además, aproximando el valor de π por 3, obtenemos: $4l+6r=98 \rightarrow l=\frac{49-3r}{2}$

La función que queremos minimizar es: $A(r,l)=l^2+3r^2 \rightarrow A(r)=\left(\frac{49-3r}{2}\right)^2+3r^2$

$A'(r)=\frac{21r-147}{2}$ $A'(r)=0 \rightarrow 21r-147=0 \rightarrow r=\frac{147}{21}=7$

Como $A''(7)>0$, se puede afirmar que en $r=7$ cm se alcanza el mínimo de la función. Así, el lado mide:

$$l=\frac{49-3r}{2} \xrightarrow{r=7} l=14 \text{ cm}$$

Por tanto, para que la suma de áreas sea mínima, el lado del cuadrado y el radio del círculo deben medir 14 cm y 7 cm, respectivamente.

96. Página 177

l: lado de la base cuadrada del prisma h: altura del prisma

$A_{\text{Total}}=24 \rightarrow 2l^2+4lh=24 \rightarrow h=\frac{12-l^2}{2l}=\frac{6}{l}-\frac{l}{2}$

Así, la función que queremos maximizar es: $V(l)=l^2\left(\frac{6}{l}-\frac{l}{2}\right)=6l-\frac{l^3}{2}$

$V'(l)=6-\frac{3}{2}l^2=0 \rightarrow 6=\frac{3}{2}l^2 \rightarrow l=\pm 2$

La única solución válida es $l=2$cm. Comprobamos que donde se alcanza el máximo: $V''(l)=-3l \rightarrow V''(2)=-6<0$

Así, se tiene que $h=\frac{6}{2}-\frac{2}{2}=2$ cm.

Por tanto, el prisma que maximiza el volumen es un cubo de lado 2 cm.

97. Página 177

r: radio de la base del cilindro h: altura del cilindro.

La cartulina rectangular, por las condiciones del enunciado, tendrá dimensiones h y r, por lo que se cumplirá que:

$$2h+2r=60 \rightarrow h=30-r$$

La función que vamos a optimizar es:

$$V(r,h)=\pi r^2 h \rightarrow V(r)=\pi r^2(30-r)=30\pi r^2-\pi r^3$$

$V'(r)=60\pi r-3\pi r^2$ $V'(r)=0 \rightarrow 60\pi r=3\pi r^2 \rightarrow r=0, r=20$

La solución válida es $r=20$. Comprobamos que es donde se alcanza el máximo: $V''(r)=60\pi-6\pi r \rightarrow V''(20)<0$

Así, se tiene que $h=30-r \xrightarrow{r=20} h=10$ cm.

Por tanto, las dimensiones de la cartulina para conseguir el volumen máximo son 20 × 10 cm.

98. Página 177

g: longitud de los lados iguales

r: longitud de la mitad del lado desigual

Perímetro = 10 $\rightarrow 2g+2r=10 \rightarrow g=5-r$

$V_{Cono}=\frac{A_{Base}\cdot h}{3}=\frac{\pi r^2 h}{3}$

Por el teorema de Pitágoras, se tiene que $h^2=g^2-r^2$ Así, la función que queremos maximizar es:

$$V(r)=\frac{\pi r^2\cdot\sqrt{(5-r)^2-r^2}}{3}=\frac{\pi r^2\sqrt{25-10r}}{3}$$

$V'(r)=\frac{2\pi r}{3}\sqrt{25-10r}-\frac{5\pi r^2}{3\sqrt{25-10r}}$

$V'(r)=0 \rightarrow 2r(25-10r)=5r^2 \rightarrow r=0, r=2$

La solución válida es $r=2$ m .Comprobamos que es donde se alcanza el máximo:

En (0, 2) se tiene que $V'(r)>0$ y en $(2,+\infty)$, $V'(r)<0$.

Así, se tiene que $g=5-r \xrightarrow{r=2} g=3$ m.

Por tanto, para que el volumen del cono generado sea máximo, los lados del triángulo deben medir 3, 3 y 4 m respectivamente.

99. Página 177

x: radio de la base del cilindro

y: longitud de la mitad de la altura del cilindro

$R=9$ es el radio de la esfera.

Se verifica que $x^2+y^2=R^2 \rightarrow x^2+y^2=81 \rightarrow y=\sqrt{81-x^2}$.

La función que queremos maximizar es:

$V(x,y)=\pi x^2 h$, donde $h=2y$.

$V(x,y)=2\pi x^2 y \rightarrow V(x)=2\pi x^2\sqrt{81-x^2}=2\pi\sqrt{81x^4-x^6}$

$V'(x)=\frac{2\pi(324x^3-6x^5)}{2\sqrt{81x^4-x^6}}=\frac{\pi(324x^3-6x^5)}{\sqrt{81x^4-x^6}}$

$V'(x)=0 \rightarrow x=0, x=\pm\sqrt{54}=\pm 3\sqrt{6}$

La solución válida es $x=3\sqrt{6}$. Comprobamos que es donde se alcanza el máximo:

En $\left(0, 3\sqrt{6}\right) \rightarrow V'(x)>0$

En $\left(3\sqrt{6},+\infty\right) \rightarrow V'(x)<0$

Así, la altura y el radio del cilindro de mayor volumen que puede inscribirse en una esfera de radio 9 cm son:

Radio = $3\sqrt{6}$ cm

Altura = $2\sqrt{81-54}=6\sqrt{3}$ cm.

100. Página 177

Llamamos *r* y *h* al radio y a la altura del cono, respectivamente.

Se cumple que:

$$r^2+(h-9)^2=81 \rightarrow r^2=81-(h-9)^2=-h^2+18h$$

La función que debemos optimizar es:

$$V(r,h)=\frac{1}{3}\pi r^2 h \to V(h)=\frac{1}{3}\pi(-h^2+18h)h=\frac{1}{3}\pi(-h^3+18h^2)$$

$V'(h)=\frac{1}{3}\pi(-3h^2+36h)=\pi(-h^2+12h)$ $V'(h)=0 \to h=0,\ h=12$

La solución válida es $h=12$. Comprobamos que es donde se alcanza el máximo:

$$V''(h)=\pi(-2h+12) \to V''(12)<0$$

Por tanto, las dimensiones del cono de mayor volumen son:

Altura = 12 cm Radio de la base = $\sqrt{-12^2+18\cdot 12}=6\sqrt{2}$ cm.

101. Página 177

x: abscisa del punto de corte de la recta con el eje OX

m: pendiente de la recta n: ordenada en el origen de la recta

Como r pasa por los puntos $(2,1)$ y $(x,0)$ se tiene que:

$$m=\frac{1-0}{2-x}=\frac{1}{2-x}$$

$$r: y=mx+n \xrightarrow{P(2,1)} 1=2m+n \to n=1-2m \to n=1-2\cdot\frac{1}{2-x}=\frac{x}{x-2}$$

Entonces, la función que se quiere minimizar es: $A(x)=\dfrac{x\cdot\frac{x}{x-2}}{2}=\dfrac{x^2}{2x-4}$

$A'(x)=\dfrac{x^2-4x}{2x^2-8x+8}$ $A'(x)=0 \to x=0,\ x=4$ La solución válida es $x=4$.

$$A''(x)=\frac{(2x-4)(2x^2-8x+8)-(x^2-4x)(4x-8)}{(2x^2-8x+8)^2}=\frac{4}{(x-2)^3} \to A''(4)=\frac{1}{2}>0$$

Por tanto, $m=\dfrac{1}{2-4}=-\dfrac{1}{2}$ y $n=1-2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=2$.

Y la recta buscada que minimiza el área del triángulo es $y=-\dfrac{1}{2}x+2$.

102. Página 177

Uno de los vértices está sobre la recta $x+2y=2$. Así, los cuatro vértices que forman el rectángulo son de la forma:

$O(0,0)$ $A(x,0)$ $B\left(0,\dfrac{2-x}{2}\right)$ $C\left(x,\dfrac{2-x}{2}\right)$

La función que queremos maximizar es: $f(x)=x\cdot\dfrac{2-x}{2}=\dfrac{2x-x^2}{2}$

$f'(x)=1-x$ $f'(x)=0 \to x=1$

$f''(x)=-1 \to f''(1)=-1<0 \to$ En $x=1$ se alcanza el máximo.

Por tanto, los vértices del rectángulo de máxima área son:

$O(0,0)$ $A(1,0)$ $B\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ $C\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$

Y el área de dicho rectángulo es $f(1)=\dfrac{2\cdot 1-1^2}{2}=\dfrac{1}{2}$ u².

103. Página 177

Los puntos buscados son de la forma (x, x^2).

La distancia entre estos puntos y $(0, 1)$ viene determinada por: $D(x)=\sqrt{(x-0)^2+(x^2-1)^2}=\sqrt{x^4-x^2+1}$

$D'(x)=\dfrac{2x^3-x}{\sqrt{x^4-x^2+1}}$ $\qquad$ $D''(x)=\dfrac{2x^6-3x^4+6x^2-1}{\sqrt{(x^4-x^2+1)^3}}$

$D'(x)=0 \rightarrow x(2x^2-1)=0 \rightarrow x=0,\ x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ Las tres soluciones son válidas. Así:

$D''(0)=-\dfrac{1}{1}=-1<0 \rightarrow$ En $x=0$ no es un mínimo.

$D''\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}>0 \rightarrow$ En $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ es un mínimo. $\qquad$ $D''\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}>0 \rightarrow$ En $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ es un mínimo.

Por tanto, los puntos de distancia mínima son: $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ y $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

Y dicha distancia es: $D\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=D\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^4-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1}=\sqrt{\dfrac{3}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ u

104. Página 177

El vértice (a, b) está sobre la curva $y=\dfrac{1}{x^2}+4$.

Así, los cuatro vértices que forman el rectángulo son de la forma:

$$O(0,0) \qquad A(a,0) \qquad B\left(0,\frac{1}{a^2}+4\right) \qquad C\left(a,\frac{1}{a^2}+4\right)$$

La función que queremos minimizar es $f(a)=a\cdot\left(\dfrac{1}{a^2}+4\right)=\dfrac{1}{a}+4a$.

$f'(a)=-\dfrac{1}{a^2}+4$ $\qquad$ $f'(a)=0 \rightarrow 4a^2=1 \rightarrow a=\pm\dfrac{1}{2}$

La solución válida es $a=\dfrac{1}{2}$ porque a debe ser positivo.

$f''(a)=\dfrac{2}{a^3} \rightarrow f''\left(\dfrac{1}{2}\right)=16>0 \rightarrow$ En $a=\dfrac{1}{2}$ se alcanza el mínimo.

Por tanto, los vértices del rectángulo son:

$$O(0,0) \qquad A\left(\frac{1}{2},0\right) \qquad B(0,8) \qquad C\left(\frac{1}{2},8\right)$$

Y el área de dicho rectángulo es $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2+\dfrac{4}{2}=4$ u^2.

105. Página 177

La función del enunciado representa una parábola con vértice en el eje *Y*, por lo que habrá dos soluciones simétricas con respecto a este eje, una en el primer cuadrante y otra en el segundo. Sea $(a, 4-a^2)$ un punto de la parábola del primer cuadrante.

$y' = -2x \rightarrow y'(a) = -2a \rightarrow$ La ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto $(a, 4 - a^2)$ es:
$y - (4 - a^2) = -2a(x - a) \rightarrow y = -2ax + a^2 + 4$

Los puntos de intersección de esta recta con los ejes son: $(0, a^2 + 4)$ y $\left(\frac{a^2+4}{2a}, 0\right)$.

El área del triángulo que se forma con estos puntos y el punto (0, 0) es: $A(a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2+4}{2a}(a^2+4) = \frac{(a^2+4)^2}{4a}$, que es la función que debemos optimizar.

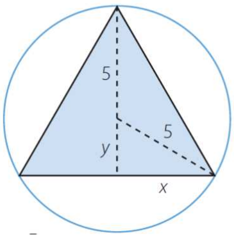
$$A'(a) = \frac{16a^2(a^2+4) - 4(a^2+4)^2}{16a^2} = \frac{3a^4 + 8a^2 - 16}{4a^2} = 0 \rightarrow a = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ es la solución del primer cuadrante.

$$A''(a) = \frac{4a^2(12a^3 + 16a) - 8a(3a^4 + 8a^2 - 16)}{16a^4} = \frac{3a^4 + 16}{2a^3} \rightarrow A''\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) > 0$$

En $\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}, \frac{8}{3}\right)$ la tangente forma con los ejes un triángulo de área mínima.

106. Página 177



Llamamos x a la mitad de la base del triángulo, $y + 5$ a la altura. Se verifica que: $x^2 + y^2 = 25 \rightarrow x = \sqrt{25 - y^2}$

La función que hay que optimizar viene dada por:

$$A(y) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{25 - y^2}(y + 5) = (y + 5)\sqrt{25 - y^2}$$

$$A'(y) = \sqrt{25 - y^2} + (y + 5) \cdot \frac{-2y}{2\sqrt{25 - y^2}} = \frac{25 - y^2 - y^2 - 5y}{\sqrt{25 - y^2}} = 0 \rightarrow -2y^2 - 5y + 25 = 0 \rightarrow y = -5, y = \frac{5}{2}$$

La solución válida es la solución positiva.

- En $\left(-5, \frac{5}{2}\right) \rightarrow A'(y) > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right) \rightarrow A'(y) < 0 \rightarrow$ Función decreciente

Así, en $y = \frac{5}{2}$ alcanza un máximo.

Por tanto, las dimensiones del triángulo de mayor área son:

Base: $2x = 2 \cdot \frac{\sqrt{75}}{2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ cm

Altura: $y + 5 = \frac{5}{2} + 5 = \frac{15}{2}$ cm

107. Página 177

a) $I(x) = 50x$

b) $B(x) = I(x) - C(x) = 50x - (10x^2 - 1\,850x + 25\,000) = -10x^2 + 1\,900x - 25\,000$

c) $B'(x) = -20x + 1\,900 = 0 \rightarrow x = \frac{1900}{20} = 95$

$B''(x) = -20 < 0 \rightarrow$ En $x = 95$ se alcanza un máximo.

$B(95) = -90\,250 + 180\,500 - 25\,000 = 62\,250$

Así, para maximizar el beneficio se deben vender los 95 juguetes, ascendiendo el beneficio a 65 250 €.

108. Página 177

$$B'(x) = \frac{-x^2+16}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = \pm 4$$

$$B''(x) = \frac{-32}{x^3}$$

- $B''(-4) > 0 \rightarrow$ En $x = -4$ se alcanza un mínimo.
- $B''(4) < 0 \rightarrow$ En $x = 4$ se alcanza un máximo.

$$B(4) = \frac{-16+36-16}{4} = 1$$

Así, para obtener el beneficio máximo se deben vender 4 artículos, siendo este beneficio de 1 000 €.

109. Página 177

Si r y h son el radio y la altura del cilindro: $\pi r^2 h = 10 \rightarrow h = \frac{10}{\pi r^2}$

La función que se optimiza es:

$$S(r,h) = \pi r^2 + 2\pi rh \rightarrow S(r) = \pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{10}{\pi r^2} = \pi r^2 + \frac{20}{r}$$

$$S'(r) = 2\pi r - \frac{20}{r^2} = 0 \rightarrow 2\pi r^3 - 20 = 0 \rightarrow \pi r^3 - 10 = 0 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$$

$$S''(r) = 2\pi + \frac{40}{r^3} \rightarrow S''\left(\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}\right) > 0 \rightarrow \text{ En } r = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}} \text{ alcanza un mínimo.}$$

Por tanto, para utilizar la menor cantidad de material, las dimensiones de la papelera cilíndrica serán $r = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$ dm y $h = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$ dm.

110. Página 177

Llamamos *x, y, z* a los números que buscamos.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=100 \\ x+2y+3z=200 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x=100-y-z \\ x=200-2y-3z \end{array}\right\} \rightarrow 100-y-z = 200-2y-3z \rightarrow y = 100-2z$$

Por tanto, resulta: $x = 100 - (100-2z) - z = 2z - z = z$

$P(x,y,z) = xyz \rightarrow P(z) = z(100-2z)z = 100z^2 - 2z^3$

$P'(z) = 200z - 6z^3 = z(200-6z) = 0 \rightarrow z = 0, z = \frac{200}{6} = \frac{100}{3}$

$P''(z) = 200 - 12z \rightarrow P''\left(\frac{100}{3}\right) < 0 \rightarrow$ En $z = \frac{100}{3}$ se alcanza un máximo.

Así, tenemos que: $x = \frac{100}{3}$, $y = 100 - \frac{200}{3} = \frac{100}{3}$, $z = \frac{100}{3}$

111. Página 178

$C(t) = (t-a)^2 + b,\ 9 \le t \le 14$

$C'(t) = 2(t-a)$

$C(t)$ tiene un mínimo en $t = 12 \longrightarrow 2(12-a) = 0$.

$C(12) = 15 \longrightarrow (12-a)^2 + b = 15$

Resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones, obtenemos los parámetros buscados:

$\begin{cases} -2a + 24 = 0 \\ (12-a)^2 + b = 15 \end{cases} \longrightarrow a = 12,\ b = 15$

112. Página 178

a) $C(t) = 8t^3 - 84t^2 + 240t,\ 1 \le t \le 6$

$C'(t) = 24t^2 - 168t + 240 \qquad C'(t) = 0 \longrightarrow t^2 - 7t + 10 = 0 \longrightarrow t = 2, t = 5$

$C''(t) = 48t - 168 \qquad C''(2) = 96 - 168 < 0$ y $C''(5) = 240 - 168 > 0$

Es decir:

En $t = 2$ está el máximo de $C(t)$ con valor $C(2) = 208$.

En $t = 5$ está el mínimo de $C(t)$ con valor $C(5) = 100$.

b) Dado que la ecuación modela el gasto de energía en calefacción, lo natural sería que esta reflejase un mayor gasto en los meses de invierno y un menor gasto en los meses cercanos al verano, como efectivamente ocurre. De ahí que el máximo se dé en febrero y el mínimo en mayo.

$C(t)$ es creciente en $(1, 2) \cup (5, 6)$ y decreciente en $(2, 5)$.

113. Página 178

a) $R(t) = A \cdot t \cdot (B-t),\ 0 < t \le 20$

$R'(t) = A(B-t) - At$

Máximo rendimiento para $t = 10 \longrightarrow A(B-10) - 10A = 0$

$R(10) = 100 \longrightarrow 10A(B-10) = 100$

Los valores de A y B vendrán dados por el siguiente sistema de ecuaciones:

$\begin{cases} A(B-20) = 0 \\ 10A(B-10) = 100 \end{cases} \longrightarrow A = 1,\ B = 20$

Es decir, $R(t) = t(20-t)$.

b) $R(t)=64 \rightarrow 64=20t-t^2 \quad -t^2+20t-64=0 \rightarrow t=4, t=16$

Se alcanza un rendimiento del 64 % para $t=4$ y $t=16$.

Estos valores tienen sentido ya que se encuentran ambos a la misma distancia (6 horas) del máximo del rendimiento, que se alcanzaba para $t=10$.

114. Página 178

a) Los gastos iniciales se corresponden con $G(0)$, y tienen un valor de $G(0)=100$.

Este valor representa la inversión inicial que debe realizar la empresa para comenzar su actividad comercial.

b) $B(t)=I(t)-G(t) \rightarrow B(t)=-2t^2+50t-(t^2-16t+100)=-3t^2+66t-100$

La función de los beneficios será: $B(t)=-3t^2+66t-100$

c) $B'(t)=-6t+66 \qquad B'(t)=0 \rightarrow t=11 \qquad B''(11)=-6<0 \rightarrow t=11$ es máximo.

Los beneficios son máximos para $t=11$, el undécimo año desde su fundación.

Los beneficios totales en ese año son $B(11)=-3\cdot 11^2+66\cdot 11-100=263$ miles de euros.

115. Página 178

Sueldo: $1\,000+17x-0{,}0025x^3$ Gasto: $200+5x$

Ganancia: $G(x)=1\,000+17x-0{,}0025x^3-200-5x=-0{,}0025x^3+12x+800$

$G'(x)=-0{,}0075x^2+12=0 \rightarrow x^2=\dfrac{12}{0{,}0075}=1600 \rightarrow x=\pm 40$

$G''(x)=-0{,}015x \rightarrow G''(40)<0 \rightarrow$ Para que la ganancia sea máxima se deben contratar mensualmente 40 pólizas.

$G(40)=1\,120 \rightarrow$ La ganancia obtenida será de 1 120 €.

116. Página 178

En la bañera entran $10\cdot 9{,}6=96$ litros de agua.

Llenar la bañera cuesta $96\cdot 0{,}01=0{,}96$ €.

Si x es el número de minutos que el grifo de la ducha está abierto, la función del gasto viene dada por $G(x)=12\cdot 0{,}008x=0{,}096x$.

El máximo de esta función debe ser menor que 0,96.

$G(x)=0{,}0096x<0{,}96 \rightarrow x<\dfrac{0{,}96}{0{,}0096} \rightarrow x<100$

Los costes de la ducha y el baño se igualarían a los 100 minutos.

117. Página 178

a) $N'(t)=80-20t=0 \rightarrow t=4$

$N''(t)=-20<0 \rightarrow$ Para $t=4$ se alcanza un máximo.

$N(4)=320-160=160$

Así, el número de clientes es máximo cuando pasan 4 horas desde que la discoteca se abre.

b) Como máximo hay 160 clientes.

c) La discoteca cerrará cuando no quede ningún cliente.

$N(t) = 0 \rightarrow 80t - 10t^2 = 0 \rightarrow t(80 - 10t) = 0 \rightarrow t = 0,\ t = 8$

La discoteca cerrará cuando lleve 8 horas abierta, es decir, a las 6 de la mañana.

118. Página 178

a) En $x = 6$ la función es continua: $f(6) = f(6^-) = 0$ $\qquad f(6^+) = 15 - 15 = 0$

$$f(x) = \begin{cases} -10x + 40 & 0 < x < 6 \\ \dfrac{5}{2} & 6 < x < 10 \end{cases}$$

● En $(0, 6) \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow -10x + 40 = 0 \rightarrow x = 4 \rightarrow \begin{cases} \text{En } (0, 4) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x) \text{ es creciente} \\ \text{En } (4, 6) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x) \text{ es decreciente} \end{cases}$

● En $(6, 10) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

$f(0) = -60 \qquad f(4) = 20 \qquad f(6) = 0 \qquad f(10) = 10$

$-5x^2 + 40x - 60 = 0 \rightarrow x = 2,\ x = 6$

Así, la función es negativa en (0, 2) y es positiva en (2, 6). También es positiva en (6, 10).

Por tanto, la empresa no tendrá pérdidas a partir de un gasto en publicidad de 2 000 €.

b) El gasto en publicidad que produce el máximo beneficio es 4 000 €.

c) El beneficio máximo es de 20 000 €.

119. Página 179

a) $R'(t) = \dfrac{1}{100} - \dfrac{2}{1000}t \qquad R'(t) = 0 \rightarrow t = 5$

$R''(t) = -\dfrac{2}{1000} < 0 \qquad R''(5) < 0 \rightarrow t = 5$ es un máximo.

La rentabilidad $R(t)$ será máxima para $t = 5$ años.

b) $R(5) = 3 + \dfrac{1}{100}5 - \dfrac{1}{1000}5^2 = 3 + \dfrac{1}{20} - \dfrac{1}{40} = 3 + \dfrac{1}{40} = \dfrac{121}{40} = 3{,}025\%$

120. Página 179

x: largo del escenario $\qquad$ y: ancho del escenario

$A_{\text{Escenario}} = 100 \rightarrow xy = 100 \rightarrow y = \dfrac{100}{x}$

La función que debemos minimizar es: $P(x) = 2\left(x + \dfrac{100}{x}\right)$

$P'(x) = 2 - \dfrac{200}{x^2} \qquad P'(x) = 0 \rightarrow 2 = \dfrac{200}{x^2} \rightarrow x = \pm 10$ La solución válida es $x = 10$.

$P''(x) = \dfrac{400}{x^3} \rightarrow P''(10) > 0 \rightarrow$ En $x = 10$ se alcanza el mínimo.

Por tanto, las dimensiones que debe tener el escenario para cumplir las especificaciones dadas son:

Largo = 10 m $\qquad$ Ancho = 10 m

Es decir, el escenario debe tener forma cuadrada.

121. Página 179

x : longitud de los lados iguales de tela metálica.

y: longitud del lado de tela metálica que mide igual que la pared.

Como disponemos de 1 000 metros de tela metálica:

$$2x + y = 1000 \rightarrow y = 1000 - 2x$$

La función que queremos maximizar es:

$$A(x) = x(1000 - 2x) = 1000x - 2x^2$$

$A'(x) = 1000 - 4x$ $\quad A'(x) = 0 \rightarrow 1000 = 4x \rightarrow x = 250$

$A''(250) = -4 < 0 \rightarrow$ En $x = 250$ se alcanza el máximo.

Por tanto, la cerca estará construida por la pared y tres paredes metálicas de longitud 250, 250 y 500 metros, respectivamente.

Área: $250 \cdot 500 = 125000$ metros cuadrados.

122. Página 179

x: largo de la barra en metros $\quad$ y: ancho de la barra en metros

$P = 2(x + y) = 30 \rightarrow x + y = 15 \rightarrow x = 15 - y$

$A_{\text{interor}} = (y - 1) \cdot (x - 1) = (y - 1) \cdot (14 - y)$

$A'_{\text{interior}} = 15 - 2y$ $\quad A'_{\text{interior}} = 0 \rightarrow 15 - 2y = 0 \rightarrow y = \dfrac{15}{2}$

Por tanto, la barra debe ser de forma cuadrada, con sus lados de $\dfrac{15}{2}$ metros.

123. Página 179

x: número de alarmas tipo A $\quad$ y: número de alarmas tipo B

Como se van a colocar 9 alarmas, se tiene que $x + y = 9 \rightarrow y = 9 - x$.

La función que se quiere maximizar es:

$$S(x, y) = \frac{xy^2}{10} \rightarrow S(x) = \frac{x(9 - x)^2}{10}$$

$S'(x) = \dfrac{(9 - x)^2 - 2x(9 - x)}{10} = \dfrac{3x^2 - 36x + 81}{10}$ $\quad S'(x) = 0 \rightarrow x = 3, x = 9$

$S''(x) = \dfrac{3x - 18}{5} \rightarrow S''(3) < 0 \rightarrow$ En $x = 3$ se alcanza un máximo.

$\rightarrow S''(9) > 0 \rightarrow$ En $x = 9$ se alcanza un mínimo.

Por tanto, la seguridad será máxima cuando se instalen 3 alarmas tipo A y 6 alarmas tipo B.

124. Página 179

Ángulo de 90º $\rightarrow b^2=2c^2 \rightarrow c=\frac{b\sqrt{2}}{2}$

Perímetro = 6 $\rightarrow 2a+b+2c=6 \rightarrow 2a+b(1+\sqrt{2})=6 \rightarrow a=\frac{6-b(1+\sqrt{2})}{2}$

h : altura del triángulo.

Por el teorema de la altura: $h^2=\frac{b}{2}\cdot\frac{b}{2} \rightarrow h=\frac{b}{2}$

Para que haya mayor luminosidad, el área de la ventana debe ser máxima. Es decir, la función que queremos optimizar es:

$$A(a,b,h)=a\cdot b+\frac{b\cdot h}{2} \rightarrow A(b)=\frac{6-b\cdot(1+\sqrt{2})}{2}\cdot b+\frac{b\cdot\frac{b}{2}}{2}=\frac{12b-b^2(1+2\sqrt{2})}{4}$$

$A'(b)=3-\frac{b}{2}\left(1+2\sqrt{2}\right)$ $\qquad A'(b)=0 \rightarrow b=\frac{6}{1+2\sqrt{2}}$

$A''(b)=-\frac{1}{2}-\sqrt{2}<0 \rightarrow b=\frac{6}{1+2\sqrt{2}}$ es el máximo.

Por tanto, las dimensiones de la ventana deben ser:

$a=\frac{12-3\sqrt{2}}{7}$ metros $\qquad b=\frac{6}{1+2\sqrt{2}}$ metros $\qquad c=\frac{12-3\sqrt{2}}{7}$ metros

125. Página 179

x: altura de la ventana $\qquad y$: ancho de la ventana

Área = 1 $\rightarrow xy=1 \rightarrow y=\frac{1}{x}$

La función que queremos minimizar es: $P(x)=2(x+\frac{1}{x})$

$P'(x)=2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$ $\qquad P'(x)=0 \rightarrow 1=\frac{1}{x^2} \rightarrow x=\pm 1$ La solución válida es $x=1$.

$P''(x)=\frac{4}{x^3} \rightarrow P''(1)>0 \rightarrow$ En $x=1$ se alcanza el mínimo.

Por tanto, la ventana debe ser un cuadrado de 1 metro de lado para que se minimice el coste del marco.

126. Página 179

r: radio de la base $\qquad h$: altura de la lata

Volumen = 10 dm³ $\rightarrow \pi r^2 h=10 \rightarrow h=\frac{10}{\pi r^2}$

La función que queremos minimizar es: $A(r,h)=\pi r^2+2\pi r h \xrightarrow{h=\frac{10}{\pi r^2}} A(r)=\pi r^2+\frac{20}{r}$

$A'(r)=2\pi r-\frac{20}{r^2}$ $\qquad A'(r)=0 \rightarrow \pi r^3=10 \rightarrow r=\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$

$A''(r)=2\pi+\frac{40}{r^3} \rightarrow A''\left(\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}\right)>0 \rightarrow$ En $r=\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$ se alcanza el mínimo.

$$h=\frac{10}{\pi r^2}\xrightarrow{r=\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}}h=\frac{10}{\pi\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}\right)^2}\xrightarrow{\text{Racionalizando}}h=\frac{10}{\pi\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}}{\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}}=\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$$

Por tanto, las dimensiones de la lata deben ser:

$$r=\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}\text{ dm}\qquad\qquad h=\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}\text{ dm}$$

127. Página 179

x: lado de la base $\qquad$ h: altura del depósito

Volumen = 20 $\rightarrow$ $x^2h=20$ $\rightarrow$ $h=\frac{20}{x^2}$

La función que queremos minimizar es:

$$C(x,h)=4xh+2x^2\xrightarrow{h=\frac{20}{x^2}}C(x)=\frac{80}{x}+2x^2$$

$$C'(x)=-\frac{80}{x^2}+4x\qquad C'(x)=0\ \rightarrow\ x^3=20\ \rightarrow\ x=\sqrt[3]{20}$$

$C''(x)=\frac{160}{x^3}+4\ \rightarrow\ C''(\sqrt[3]{20})=\frac{160}{20}+4=12>0\ \rightarrow$ En $x=\sqrt[3]{20}$ se alcanza el mínimo.

Por tanto, las dimensiones deben ser:

$$x=\sqrt[3]{20}\text{ metros}\qquad\qquad h=\frac{20}{\left(\sqrt[3]{20}\right)^2}=\sqrt[3]{20}\text{ metros}$$

Y el coste mínimo es: $C\left(\sqrt[3]{20}\right)=\frac{80}{\sqrt[3]{20}}+2\left(\sqrt[3]{20}\right)^2=\frac{120}{\sqrt[3]{20}}=12\sqrt[3]{50}$ **€.**

128. Página 179

r: radio de las semiesferas y del cilindro $\qquad$ h: altura de la zona cilíndrica

Volumen = $10\pi\ \rightarrow\ \pi r^2h+\frac{4}{3}\pi r^3=10\pi\ \rightarrow\ h=\frac{10}{r^2}-\frac{4}{3}r$

La función que queremos minimizar es:

$$C(r,h)=20\cdot 4\pi r^2+10\cdot 2\pi rh=80\pi r^2+20\pi r\left(\frac{10}{r^2}-\frac{4}{3}r\right)$$

$$C'(r)=\frac{320\pi r}{3}-\frac{200\pi}{r^2}\qquad\qquad C'(r)=0\rightarrow r=\sqrt[3]{\frac{15}{8}}$$

$$C''(r)=\frac{160\cdot 2}{3}\pi+\frac{400\pi}{r^3}\qquad\qquad C''\left(\sqrt[3]{\frac{15}{8}}\right)>0$$

Por tanto, en $r=\sqrt[3]{\frac{15}{8}}$ metros se alcanza un mínimo.

Las dimensiones que minimizan el coste son:

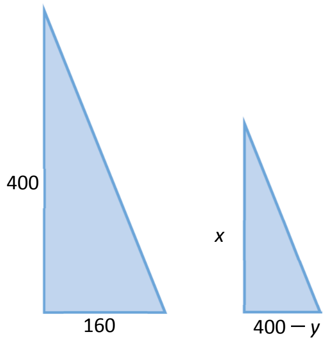
$$r=\sqrt[3]{\frac{15}{8}}\text{ m}\qquad\qquad h=2\sqrt[3]{15}\text{ m}$$

129. Página 179

x: altura en metros del campo para maíz

y: ancho en metros del campo para maíz

Por el teorema de Tales:



$$\frac{400}{160}=\frac{x}{400-y}\rightarrow y=\frac{2000-2x}{5}$$

La función que queremos maximizar es:

$$B(x,y)=0{,}12xy+0{,}10\cdot 240\cdot(400-x)\xrightarrow{y=\frac{2000-2x}{5}}B(x)=24x-\frac{6}{125}x^2+9600$$

$$B'(x)=24-\frac{12}{125}x^2 \qquad B'(x)=0\rightarrow x=250$$

$$B''(x)=-\frac{12}{125} \qquad B''(250)=-\frac{12}{125}<0$$

Por tanto, en $x=250$ metros se alcanza el máximo.

Así, el campo de maíz debe medir 250 metros de alto por 300 metros de ancho; y el campo de trigo, 150 metros de alto por 240 metros de ancho.

El beneficio máximo es:

$$B(x)=24x-\frac{6}{125}x^2+9600\xrightarrow{x=250}B(250)=12600\text{ €}$$

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. Página 180

Superficie de la lata ideal: $S_{\text{Ideal}}=2\pi\cdot 3{,}75\cdot 7{,}5+2\pi\cdot 3{,}75^2=265{,}07$ cm^2.

Superficie de la lata común: $S_{\text{Común}}=2\pi\cdot 3{,}25\cdot 11{,}5+2\pi\cdot 3{,}25^2=301{,}20$ cm^2.

$S_C-S_I=36{,}13$ cm^2

2. Página 180

No pueden existir otras medidas para latas cilíndricas. Las únicas dimensiones que minimizan la superficie son las obtenidas anteriormente.

3. Página 180

Depende de la lata. Habría que comprobarlo teniendo en cuenta los diferentes tipos de latas que se encuentran en el mercado.

4. Página 180

Coste por lata:

$C_{\text{Ideal}}=\frac{265{,}07\cdot 50}{10000}=1{,}325$ céntimos.

$C_{\text{Normal}}=\frac{301{,}20\cdot 50}{10\,000}=1{,}506$ céntimos.