Derivadas

6

ACTIVIDADES

1. Página 140

Función $f(x) = x^2 + 1$: $T.V.M.([0,1]) = \dfrac{f(1)-f(0)}{1-0} = \dfrac{2-1}{1} = 1$ $\quad T.V.M.([-2,-1]) = \dfrac{f(-1)-f(-2)}{-1-(-2)} = \dfrac{2-5}{1} = -3$

Función $g(x) = x^3 + 7$: $T.V.M.([0,1]) = \dfrac{g(1)-g(0)}{1-0} = \dfrac{8-7}{1} = 1$ $\quad T.V.M.([-2,-1]) = \dfrac{g(-1)-g(-2)}{-1-(-2)} = \dfrac{6-(-1)}{1} = 7$

2. Página 140

$$T.V.M.([1,5]) = \frac{e(5)-e(1)}{5-1} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 25 + 5 - \frac{1}{3}\cdot 1 - 1}{4} = \frac{12}{4} = 3 \text{ m/s}$$

3. Página 141

a) $f'(2) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{7(2+h)+1-15}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{7h}{h} = 7$

b) $f'(2) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{(2+h)^2}-\frac{1}{4}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-4h-h^2}{4h(2+h)^2} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-4-h}{4(2+h)^2} = -\dfrac{1}{4}$

4. Página 141

a) $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^3-1}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3h+3h^2+h^3}{h} = 3$

$f'(2) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(2+h)^3-8}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{12h+6h^2+h^3}{h} = 12$

b) $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+h}-1\right)\left(\sqrt{1+h}+1\right)}{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1+h-1}{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+h}+1} = \dfrac{1}{2}$

$f'(2) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{2+h}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2+h}+\sqrt{2}\right)}{h\left(\sqrt{2+h}+\sqrt{2}\right)} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2+h-2}{h\left(\sqrt{2+h}+\sqrt{2}\right)} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

5. Página 142

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } \quad x \le -2 \\ -\dfrac{4}{x} & \text{si } \quad x > -2 \end{cases}$$

$f'\left(-2^+\right) = \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{-\frac{4}{-2+h}-4}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{4-4\cancel{h}}{(-2+h)\cdot\cancel{h}} = -\infty \to$ No existe.

$f'\left(-2^-\right) = \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{(-2+h)^2-4}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{h^2-4h}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-}(h-4) = -4$

6. Página 142

a) $f'(0^+)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{\sqrt[3]{h}}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}h^{\left(\frac{1}{3}-1\right)}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt[3]{h^2}}=+\infty$

$f'(0^-)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{\sqrt[3]{h}}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}h^{\left(\frac{1}{3}-1\right)}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{1}{\sqrt[3]{h^2}}=+\infty$

Las derivadas laterales no existen, por lo que la función no es derivable en $x=0$.

b) $f'(0^+)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h^{\frac{1}{4}}}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}h^{\left(\frac{1}{4}-1\right)}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt[4]{h^3}}=+\infty$

$f'(0^-)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{h^{\frac{1}{4}}}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}h^{\left(\frac{1}{4}-1\right)}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{1}{\sqrt[4]{h^3}}=\nexists$

$f'(0^-)$ no existe ya que h es un número negativo y la función no está definida para números negativos. Por tanto, la función no es derivable en $x=0$.

7. Página 143

$$f(x)=\begin{cases}2x-3 & \text{si} \quad x\le 3\\ 12x-x^2 & \text{si} \quad x>3\end{cases}$$

- Si $x<3 \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(-\infty,3)$.
- Si $x>3 \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(3,+\infty)$.
- Si $x=3$:

$f(3^+)=\lim\limits_{x\to 3^+}(12x-x^2)=27 \qquad f(3^-)=\lim\limits_{x\to 3^-}(2x-3)=3$

La función no es continua en $x=3$ por no coincidir los límites laterales.

Como la función no es continua en $x=3$, se puede afirmar que tampoco es derivable en ese punto.

8. Página 143

$$f(x)=2x+|x+2|\rightarrow f(x)=\begin{cases}x-2 & \text{si} \quad x<-2\\ 3x+2 & \text{si} \quad x\ge -2\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to -2^+}f(x)=-4 \qquad \lim\limits_{x\to -2^-}f(x)=-4 \rightarrow$ La función es continua en $x=-2 \rightarrow$ Es continua en toda la recta real.

$f'(-2^+)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{3(-2+h)+2+4}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{3\cancel{h}}{\cancel{h}}=3$

$f'(-2^-)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{(-2+h)-2+4}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{\cancel{h}}{\cancel{h}}=1$

Como las derivadas laterales no coinciden, la función no es derivable en $x=-2$.

9. Página 144

$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3+2(x+h)^2-x^3-2x^2}{h}=3x^2+4x$

$f''(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+h)-f'(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3(x+h)^2+4(x+h)-3x^2-4x}{h}=6x+4$

$$f'''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f''(x+h)-f''(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{6(x+h)+4-6x-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{6\cancel{h}}{\cancel{h}}=6$$

$$f^{IV}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f'''(x+h)-f'''(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{6-6}{h}=0$$

A partir de la cuarta derivada todas las derivadas son iguales a 0.

10. Página 144

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}\cdot x\cdot(x+h)}=-\frac{1}{x^2}$$

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-1}{(x+h)^2}+\frac{1}{x^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-x^2+(x+h)^2}{h\cdot x^2\cdot(x+h)^2}=\frac{2}{x^3}$$

$$f'''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f''(x+h)-f''(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2}{(x+h)^3}-\frac{2}{x^3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-6h^2x-6hx^2-2h^3}{h\cdot x^3\cdot(x+h)^3}=\frac{-6x^2}{x^6}=\frac{-6}{x^4}$$

$$f^{n)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}$$

11. Página 145

a) $f(x)=x^2$ y $g(x)=x$

$$h'(x)=7\cdot f'(x)+3\cdot g'(x)$$

$$h'(x)=7\cdot\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}+3\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=7\cdot\lim_{h\to 0}\frac{2\cancel{h}x+h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}}+3\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}}=14x+3$$

b) $f(x)=x$ y $g(x)=x+1$

$$h(x)=\frac{g(x)}{f(x)}+2\cdot f(x)\rightarrow h'(x)=\frac{g'(x)\cdot f(x)-g(x)\cdot f'(x)}{f^2(x)}+2\cdot f'(x)$$

Así: $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h+1)-(x+1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$$

Entonces: $h'(x)=\frac{1\cdot x-(x+1)\cdot 1}{x^2}+2\cdot 1=\frac{-1}{x^2}+2$

c) $f(x)=x$ y $g(x)=x+1$

$$h(x)=\frac{g(x)}{f(x)}\rightarrow h'(x)=\frac{g'(x)\cdot f(x)-g(x)\cdot f'(x)}{f^2(x)}$$

Entonces: $h'(x)=\frac{1\cdot x-(x+1)\cdot 1}{x^2}=\frac{-1}{x^2}$

d) $f(x)=\frac{1}{x^2}$ y $g(x)=x^2$

$$h(x)=f(x)+5\cdot g(x)\rightarrow h'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{-2\cancel{h}x-h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}\cdot x^2\cdot(x+h)^2}+5\cdot\lim_{h\to 0}\frac{2\cancel{h}x+h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}}=-\frac{2}{x^3}+10x$$

12. Página 145

$$[f(x)-g(x)]' = \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-g(x+h)]-[f(x)-g(x)]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)-g'(x)$$

Sean $f(x)=x$ y $g(x)=x^2$.

Entonces: $h(x)=3\cdot f(x)-g(x)\to h'(x)=3\cdot f'(x)-g'(x)$

Así: $h'(x)=3\cdot\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=3\cdot\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{2\cancel{h}x+h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}}=3-2x$

13. Página 146

Aplicamos la derivada de las funciones potenciales: $(x^4)' = 4x^3$ $(x^2)' = 2x$

Teniendo en cuenta las operaciones con derivadas: $f'(x) = 5\cdot 4x^3 + 3\cdot 2x = 20x^3 + 6x$

14. Página 146

$$f'(x)=4\left(\frac{x-2}{x^5}\right)^3\cdot\frac{1\cdot x^5-(x-2)5x^4}{(x^5)^2}=\frac{4(x-2)^3}{x^{15}}\cdot\frac{x^5-5x^5+10x^4}{x^{10}}=\frac{(x-2)^3(-16x+40)}{x^{21}}$$

15. Página 147

$$[(g\circ f)(x)]' = \lim_{h\to 0}\frac{(g\circ f)(x+h)-(g\circ f)(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{f(x+h)-f(x)}\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{f(x+h)-f(x)}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=g'(f(x))\cdot f'(x)$$

16. Página 147

$$k'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{k(x+h)-k(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2(x+h)+5}-\sqrt{2x+5}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{2(x+h)+5}-\sqrt{2x+5}\right)\left(\sqrt{2(x+h)+5}+\sqrt{2x+5}\right)}{h\left(\sqrt{2(x+h)+5}+\sqrt{2x+5}\right)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2x+2h+5-2x-5}{h\left(\sqrt{2(x+h)+5}+\sqrt{2x+5}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{2}{\sqrt{2(x+h)+5}+\sqrt{2x+5}}=\frac{1}{\sqrt{2x+5}}$$

Si $f(x)=2x+5\to f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)+5-(2x+5)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h}=2$

Si $g(x)=\sqrt{x}\to g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Como $k(x)=(g\circ f)(x)$, aplicando la regla de la cadena:

$$k'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2x+5}}\cdot 2=\frac{1}{\sqrt{2x+5}}$$

17. Página 148

a) $f'(x)=\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

b) $f'(x)=\frac{-(x-1)\cdot sen\,x-\cos x}{(x-1)^2}=\frac{-sen\,x}{x-1}-\frac{\cos x}{(x-1)^2}$

c) $f'(x)=e^x\cdot(sen\,x+\cos x)$

d) $f'(x)=2e^{2x}$

18. Página 148

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\cdot\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)\right)=\lim_{h\to 0}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}=\ln\left(\lim_{h\to 0}\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right)=\ln e^{\lim\limits_{h\to 0}\left[\left(\frac{x+h}{x}-1\right)\frac{1}{h}\right]}=\ln e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}$$

19. Página 149

a) $f'(x)=2x\left(e^{x^2}-e^{-x^2}\right)$

b) $f'(x)=2\cos x\cdot e^{2sen\,x}$

c) $f'(x)=-2x\cdot 2\cdot\cos(x^2+1)\cdot sen(x^2+1)=-2x\cdot sen(2x^2+2)$

d) $f'(x)=-\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

20. Página 149

a) $f'(x)=-\frac{3}{1-3x}$

b) $f(x)=\ln\left(\frac{2x+1}{1-2x}\right)=\ln(2x+1)-\ln(1-2x)\to f'(x)=\frac{2}{2x+1}+\frac{2}{1-2x}=\frac{4}{1-4x^2}$

c) $f(x)=\frac{1}{2}\cdot\ln(5x+3)\to f'(x)=\frac{5}{10x+6}$

d) $f(x)=\frac{1}{2}[\ln(2x+1)-\ln(1-2x)]\to f'(x)=\frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\cancel{2}}{2x+1}+\frac{\cancel{2}}{1-2x}\right)=\frac{2}{1-4x^2}$

SABER HACER

21. Página 150

Primero determinamos la expresión algebraica de la función a partir de la gráfica:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{20}x & 0\le x<20\\ 3 & 20\le x<25\\ \frac{3}{25}x & 25\le x<50\\ -\frac{3}{5}x+36 & 50\le x<60\end{cases}$$

Ahora hallamos la tasa de variación media en los intervalos pedidos:

$$T.V.M.([5,10]) = \frac{f(10)-f(5)}{10-5} = \frac{\frac{3}{2}-\frac{3}{4}}{5} = \frac{3}{20}$$

$$T.V.M.([52,56]) = \frac{f(56)-f(52)}{56-52} = \frac{2{,}4-4{,}8}{4} = -0{,}6$$

22. Página 150

Hallamos la tasa de variación media de los intervalos que se quieren analizar.

$$T.V.M.([0,7]) = \frac{f(7)-f(0)}{7-0} = \frac{9{,}2-(-2)}{7} = 1{,}6$$

$$T.V.M.([6,7]) = \frac{f(7)-f(6)}{7-6} = \frac{9{,}2-5{,}8}{1} = 3{,}4$$

23. Página 150

a) $f'(-1) = \lim\limits_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+2-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1}(x^2-x+1) = 3$

b) $f'(-1) = \lim\limits_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1}\frac{2x^4-3x^2+1}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1}\frac{(x+1)(2x^3-2x^2-x+1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1}(2x^3-2x^2-x+1) = -2$

24. Página 151

a) $f'(x) = 15x^4 - 6 - \frac{6}{x^4}$

b) $f'(x) = \frac{-5}{x^3} + 30x^2$

25. Página 151

$f(1) = a = 3$ (ya que $\ln 1 = 0$)

$f'(x) = 4ax^3 - (b\cdot\ln x + b)$ $\qquad$ $f'(1) = 4\cdot 3\cdot 1^3 - b = 11 \rightarrow b = 1$

26. Página 151

Primero se estudia la continuidad de la función:

Si $x < 1$ o $x > 1$, la función es continua por ser un polinomio. Hay que comprobar qué sucede en el punto en el que cambia su expresión algebraica.

$f(1) = 1-4+3 = 0$

$f(1^-) = \lim\limits_{x\to1^-}(x^2-4x+3) = 1-4+3 = 0$ $\qquad$ $f(1^+) = \lim\limits_{x\to1^+}(-x^2+4x-3) = -1+4-3 = 0$

Por tanto, la función es continua en $\mathbb{R}$.

A continuación se estudia la derivabilidad de la función:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-4 & \text{si } x<1 \\ -2x+4 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Si x < 1 o x > 1, la función es derivable por ser un polinomio. Hay que comprobar qué sucede en el punto en el que cambia su expresión algebraica.

$$x=1 \to \begin{cases} f'(1^-)=2-4=-2 \\ f'(1^+)=-2+4=2 \end{cases}$$ $\to$ Como las derivadas laterales no coinciden, la función no es derivable en $x = 1$.

27. Página 152

Calculamos los límites laterales y el valor de la función en el punto.

$$f(3^-)=\lim_{x\to 3^-} x^2-2x=3=f(3)$$
$$f(3^+)=\lim_{x\to 3^+} 2x+a=6+a$$

Para que sea continua: $3 = 6 + a \to a = -3$.

La función continua es: $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & x\geq 3 \\ 2x+3 & x<3 \end{cases}$

Calculamos la derivada: $f'(x)=\begin{cases} 2x-2 & x>3 \\ 2 & x<3 \end{cases}$

Calculamos las derivadas laterales:

$$f'(3^-)=\lim_{x\to 3^-} 2x-2=4$$
$$f'(3^+)=\lim_{x\to 3^+} 2=2$$

Las derivadas laterales no coinciden, de modo que la función no es derivable en $x = 3$.

28. Página 152

Primero se estudia la continuidad de la función:

Si $x<0$ o $x>\pi$, la función es continua por ser un polinomio. Si $0<x<\pi$, la función es continua por ser una función trigonométrica. Veamos qué sucede en los puntos donde cambia su expresión algebraica.

- Si $x=0$:

$f(0)=0$ $\qquad f(0^-)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=0$ $\qquad f(0^+)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=sen(a\cdot 0)=0$

En $x = 0$ la función siempre es continua, independientemente del parámetro a.

- Si $x=\pi$:

$f(\pi)=(\pi-\pi)^2+1=1$ $\qquad f(\pi^-)=\lim_{x\to \pi^-} f(x)=sen(a\cdot\pi)$ $\qquad f(\pi^+)=\lim_{x\to \pi^+} f(x)=(\pi-\pi)^2+1=1$

Para que la función sea continua en $x=\pi$ debe cumplirse que:

$$sen(a\cdot\pi)=1 \to a\pi=\frac{(2k+1)\cdot\pi}{2} \to a=\frac{2k+1}{2},\ k\in\mathbb{Z}$$

A continuación se calcula la derivabilidad de la función:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+2 & \text{si } x<0 \\ \frac{2k+1}{2}\cdot cos\left(\frac{(2k+1)\cdot x}{2}\right) & \text{si } 0<x<\pi,\ k\in\mathbb{Z} \\ 2(x-\pi) & \text{si } x>\pi \end{cases}$$

Si $x<0$ o $x>\pi$, la función es derivable por ser un polinomio. Veamos qué sucede en los puntos en los que cambia su expresión algebraica:

$f'(0^-)=2$ $\qquad f'(0^+)=\frac{2k+1}{2}$ $\qquad f'(\pi^-)=\frac{2k+1}{2}\cdot cos\left(\frac{2k+1}{2}\cdot\pi\right)$ $\qquad f'(\pi^+)=0$

En $x=0$ la función no es derivable, porque $2=\frac{2k+1}{2} \rightarrow k=\frac{3}{2}\notin\mathbb{Z}$.

En $x=\pi$ la función es derivable para cualquier valor entero de *k*.

29. Página 153

a) $g'(x)=2e^x$ $\quad g'(f(x))=2e^{tg(x^2+1)} \rightarrow (g\circ f)'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)=\frac{4x\cdot e^{tg(x^2+1)}}{cos^2(x^2+1)}$

b) $f'(x)=\frac{2x}{cos^2(x^2+1)}$ $\quad f'(g(x))=\frac{4e^x}{cos^2\left((2e^x)^2+1\right)}$

$$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)=\frac{8e^{2x}}{cos^2\left((2e^x)^2+1\right)}$$

c) $f'(x)=\frac{2x}{cos^2(x^2+1)}$ $\quad f'(f(x))=\frac{2tg(x^2+1)}{cos^2\left((tg(x^2+1))^2+1\right)}$

$$(f\circ f)'(x)=f'(f(x))\cdot f'(x)=\frac{2\cdot tg(x^2+1)}{cos^2\left((tg(x^2+1))^2+1\right)}\cdot\frac{2x}{cos^2(x^2+1)}$$

30. Página 153

Tenemos la derivada de un cociente de modo que:

$$g(x)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

$$g'(x)=\frac{f_1'(x)f_2(x)-f_1(x)f_2'(x)}{(f_2(x))^2}=\frac{\frac{1}{x\ln 2}2x^3-6x\log_2 x}{4x^6}=\frac{\frac{2x}{\ln 2}-6\log_2 x}{4x^5}=\frac{x-3\ln 2\log_2 x}{2x^5}$$

31. Página 153

a) $g(x)$ es el producto de $2x^2$ y de $(2x-x^3)^5$. De modo que la calculamos como la derivada de un producto.

$g'(x) = 4x(2x-x^3)^5 + 2x^2\cdot 5(2x-x^3)^4\cdot(2-3x^2) = (2x-x^3)^4\,(8x-4x^4+20x^2-30x^4) = (2x-x^3)^4\,(8x-34x^4+20x^2)$

b) $g(x)$ es el producto de x^3 y de $\cos x^2$. De modo que la calculamos como la derivada de un producto.

$g'(x) = 3x^2\cos x^2 + x^3(-\text{sen}\,x^2)\,2x = x^2(3\cos x^2 - 2x^2\,\text{sen}\,x^2)$

ACTIVIDADES FINALES

32. Página 154

$$T.V.M.([2,3])=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}{1}=-\frac{1}{6}$$

$$T.V.M.([2,5])=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{\frac{1}{5}-\frac{1}{2}}{3}=-\frac{1}{10}$$

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2+h}-\frac{1}{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2-2-h}{2h(2+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{2(2+h)}=-\frac{1}{4}$$

33. Página 154

$$T.V.M.([-1,2])=\frac{f(2)-f(-1)}{2+1}=\frac{3}{3}=1$$

$$T.V.M.([-1,3])=\frac{f(3)-f(-1)}{3+1}=\frac{5+3}{4}=2$$

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{(-1+h)^2-4+3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2\cancel{h}+h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}}=-2$$

34. Página 154

$$T.V.M.([1,6])=\frac{f(6)-f(1)}{6-1}=\frac{\frac{3}{8}-1}{5}=-\frac{1}{8}$$

$$T.V.M.([1,4])=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{\frac{1}{2}-1}{3}=-\frac{1}{6}$$

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{3}{(1+h)+2}-\frac{3}{1+2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{3}-\cancel{3}-\cancel{h}}{\cancel{h}(3+h)}=-\frac{1}{3}$$

35. Página 154

$$f(x)=\ln(x+b)$$

$$T.V.M.([0,2])=\frac{f(2)-f(0)}{2}=\frac{\ln(2+b)-\ln b}{2}=\frac{\ln\left(\frac{2+b}{b}\right)}{2}=\ln 2\ \rightarrow\ b=\frac{2}{3}$$

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(0+h+\frac{2}{3}\right)-\ln\left(0+\frac{2}{3}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{h+\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{3h+2}{2}\right)}{h}=\frac{3}{2}$$

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(2+h+\frac{2}{3}\right)-\ln\left(2+\frac{2}{3}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{h+\frac{8}{3}}{\frac{8}{3}}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{3h+8}{8}\right)}{h}=\frac{3}{8}$$

36. Página 154

$$T.V.M.([0,6])=\frac{s(6)-s(0)}{6}=\frac{116-2}{6}=19$$

37. Página 154

La función que mide la superficie de un círculo según la longitud de su radio *x* es: $f(x)=\pi x^2$

$$T.V.M.([1,3])=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{9\pi-\pi}{2}=4\pi \qquad T.V.M.([3,5])=\frac{f(5)-f(3)}{5-3}=\frac{25\pi-9\pi}{2}=8\pi$$

Aunque la variación del radio es la misma, la variación de la superficie no permanece constante.

38. Página 154

a) $T.V.M.([1,7])=\frac{f(7)-f(1)}{7-1}=\frac{245-5}{6}=40$

$T.V.M.([1,5])=\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=\frac{125-5}{4}=30$

b) $f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5(1+h)^2-5}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{10\cancel{h}+5h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}}=10$

39. Página 154

a) $f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(2+h)-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h}=2$

b) $f'(-2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(-2+h)^3-(-2)^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^3-6h^2+12h}{h}=12$

c) $f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-3(2+h)+2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+h}{h}=1$

40. Página 154

a) $f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{ah+\cancel{b}-\cancel{b}}{h}=a$

b) $f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a(0+h)^2+b(0+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{ah^2+bh}{h}=\lim_{h\to 0}(ah+b)=b$

c) $f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{ah^2+bh+\cancel{c}-\cancel{c}}{h}=\lim_{h\to 0}(ah+b)=b$

d) $f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{ah^3+bh^2+ch+\cancel{d}-\cancel{d}}{h}=\lim_{h\to 0}(ah^2+bh+c)=c$

41. Página 154

a) $f'(x)=4x+4x^3\rightarrow f'(2)=40$

b) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}\rightarrow f'(2)=-\frac{1}{4}$

c) $f'(x)=-\frac{2}{x^3}\rightarrow f'(2)=-\frac{1}{4}$

d) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\rightarrow f'(2)=\frac{1}{4}$

e) $f'(x)=\begin{cases}x+3 & \text{si } x\geq -3\\ -x-3 & \text{si } x<-3\end{cases}\rightarrow f'(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x>-3\\ -1 & \text{si } x<-3\end{cases}\rightarrow f'(2)=1$

f) $f'(x)=\begin{cases}x-2 & \text{si } x\geq 2\\ -x+2 & \text{si } x<2\end{cases}$

$f'(2^+)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2+h-2}{h}=1$

$f'(2^-)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-(2+h)+2}{h}=-1$

Las derivadas laterales existen pero no son iguales; por tanto, la función no es derivable en $x=2$.

42. Página 154

a) $f'(1^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h+2}-\sqrt{2}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h+2}-\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = f'(1^-)$

b) $f'(1^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$ $\quad f'(1^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{\sqrt{h}}$

No existe la derivada por la izquierda porque la raíz cuadrada no está definida para valores negativos.

43. Página 154

a) $f(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{si } x<3 \\ x-4 & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$

La función es continua en $x = 3$: porque $f(3^-) = f(3^+) = f(3) = -1$.

$f'(3^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h-1+1}{h} = 1$

$f'(3^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-(3+h)+2+1}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$

Las derivadas laterales existen pero son distintas, entonces la función no es derivable.

b) $f(x) = \begin{cases} x+9-x^2 & \text{si } x<-3 \\ x-9+x^2 & \text{si } -3\leq x\leq 3 \\ x+9-x^2 & \text{si } x>3 \end{cases}$

La función es continua en $x = 3$, $f(3^-) = f(3^+) = f(3) = 3$

$f'(3^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{3+h+9-(3+h)^2-3}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-h^2-5h}{h} = -5$

$f'(3^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h+\cancel{3}-9+(h+3)^2-\cancel{3}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2+7h}{h} = 7$

Las derivadas laterales existen pero son distintas, entonces la función no es derivable.

44. Página 154

$f(x) = \begin{cases} 4-x-x^2 & \text{si } x\leq -2 \\ 3x+4 & \text{si } x>-2 \end{cases}$

$f'(-2^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{3\cdot(-2+h)+4-2}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{3h-4}{h} = -\infty \to \text{No existe.}$

$f'(-2^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{4-(-2+h)-(-2+h)^2-2}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{3h-h^2}{h} = 3$

45. Página 154

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-1} & \text{si} \quad x\neq 1\\ 5 & \text{si} \quad x=1\end{cases}$$

$$f'(1^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\dfrac{1+h}{1+h-1}-5}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1-4h}{h^2}=+\infty=f'(1^-)$$

No existen las derivadas laterales.

46. Página 154

a) $f(x)=\begin{cases}-2+x & x\geq 2\\ 2-x & x<2\end{cases}$

$$f'(2^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-2+2+h}{h}=-1$$

$$f'(2^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{2-(2+h)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1$$

Las derivadas laterales no son iguales, por lo que $f(x)$ no es derivable en $x=2$.

b) $g(x)=\begin{cases}x^2-4 & x<-2\\ -x^2+4 & -2\leq x\leq 2\\ x^2-4 & x>2\end{cases}$

$$g'(2^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(2+h)^2-4}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{4h+h^2}{h}=4$$

$$g'(2^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-(2+h)^2+4}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-4h-h^2}{h}=-4$$

Las derivadas laterales no son iguales, por lo que $g(x)$ no es derivable en $x=2$.

47. Página 154

$$f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h^2}=+\infty$$

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h^2}=+\infty$$

48. Página 154

$$f'(1^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2-(1+h)^2-4}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-h^2-2h-3}{h}=-\infty$$

$$f'(1^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(1+h)^2+3-4}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2h+h^2}{h}=2$$

49. Página 155

$\lim_{x\to 0^+}\sqrt[3]{x}=\lim_{x\to 0^-}\sqrt[3]{x}=0=f(0)\ \rightarrow f(x)$ es continua en $x=0$.

$f'(0)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{h}}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{h^2}}=+\infty\ \rightarrow f(x)$ no es derivable en $x=0$.

50. Página 155

a) • Si $x>0: f(x)=cosx \rightarrow$ Función trigonométrica continua y derivable en $(0,+\infty)$.

• Si $x<0: f(x)=-x^2+1 \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(-\infty,0)$.

• Estudiamos la continuidad y la derivabilidad en $x=0$:

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+} cosx=1 \qquad f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}(-x^2+1)=1 \qquad f(0)=1$$

Por tanto, la función es continua en $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=\begin{cases}-2x & \text{si } x<0\\ -senx & \text{si } x>0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}f'(0^-)=0\\ f'(0^+)=0\end{cases}$$

Las derivadas laterales existen y son iguales, entonces *f*(*x*) es derivable en $\mathbb{R}$.

b) • Si $x>0: f(x)=-x^3+2x+1 \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(0,+\infty)$.

• Si $x<0: f(x)=2\cdot senx+1 \rightarrow$ Función trigonométrica continua y derivable en $(-\infty,0)$.

• Estudiamos la continuidad y la derivabilidad en $x=0$:

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}(-x^3+2x+1)=1 \qquad f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}(2\cdot senx+1)=1 \qquad f(0)=1$$

Por tanto, la función es continua en $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=\begin{cases}2\cdot cosx & \text{si } x<0\\ -3x^2+2 & \text{si } x>0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}f'(0^-)=2\\ f'(0^+)=2\end{cases}$$

Las derivadas laterales existen y son iguales, entonces *f*(*x*) es derivable en $\mathbb{R}$.

c) • Si $x>2: f(x)=7-2^x \rightarrow$ Función exponencial continua y derivable en $(2,+\infty)$.

• Si $x<2: f(x)=\dfrac{x+3}{2x-5} \rightarrow$ Función racional continua y derivable en $(-\infty,2)$.

• Estudiamos la continuidad y la derivabilidad en $x=2$:

$$f(2^+)=\lim_{x\to 2^+}(7-2^x)=3 \qquad f(2^-)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x+3}{2x-5}=-5$$

Así, la función no es continua en $x=2$, y por tanto, tampoco será derivable en ese punto.

Es decir, la función es continua y derivable en $\mathbb{R}-\{2\}$.

d) • Si $x>1: f(x)=-2x^2+3 \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(1,+\infty)$.

• Si $x<1: f(x)=-4x+5 \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(-\infty,1)$.

• Estudiamos la continuidad y la derivabilidad en $x=1$:

$$f(1^+)=\lim_{x\to 1^+}(-2x^2+3)=1 \qquad f(1^-)=\lim_{x\to 1^-}-4x+5=1$$

Por tanto, la función es continua en $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=\begin{cases}-4 & \text{si } x<1\\ -4x & \text{si } x>1\end{cases} \rightarrow \begin{cases}f'(1^-)=-4\\ f'(1^+)=-4\end{cases}$$

Las derivadas laterales existen y son iguales, entonces *f*(*x*) es derivable en $\mathbb{R}$.

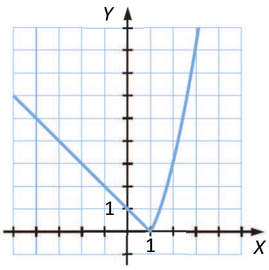
51. Página 155

$\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-1)=\lim\limits_{x\to 1^-}(-x+1)=0=f(1)\;\longrightarrow f(x)$ es continua en $x=1$.

$$f'(1^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(1+h)^2-1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0^+}(2+h)=2$$
$$f'(1^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-(1+h)+1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-h}{h}=-1$$

Las derivadas laterales no son iguales; por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x=1$.

a)



b) No existe, pues si una función es discontinua en un punto no puede ser derivable en él.

52. Página 155

- Si $x>2: f(x)=-2x\rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(2,+\infty)$.
- Si $x<2: f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}\rightarrow$ Función racional continua y derivable en $(-\infty,2)$, salvo en $x=1$.
- Estudiamos la continuidad y la derivabilidad en $x=1$:

$$f(1^+)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x-1}=+\infty \qquad f(1^-)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{x-1}=-\infty$$

$f(x)$ no es continua en $x=1$; por tanto, no es derivable en $x=1$.

- Estudiamos la continuidad y la derivabilidad en $x=2$:

$$f(2^+)=\lim_{x\to 2^+}(-2x)=-4 \qquad f(2^-)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x+1}{x-1}=3$$

$f(x)$ no es continua en $x=2$; por tanto, no es derivable en $x=2$.

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-2}{(x-1)^2} & \text{si } x<2\\ -2 & \text{si } x>2\end{cases}$$

Así, la función es continua y derivable en $\mathbb{R}-\{1, 2\}$.

53. Página 155

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x-3}{1-x^2} & \text{si} \quad -2\le x<1\\ 1-3\sqrt{2x-1} & \text{si} \quad 1\le x\le 5\end{cases} \qquad \text{Dom}\left(\frac{x^2+2x-3}{1-x^2}\right)=\mathbb{R}-\{-1,1\} \qquad \text{Dom}\left(1-3\sqrt{2x-1}\right)=\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$$

- Si $x\in(-2,-1)\cup(-1,1) \longrightarrow f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{1-x^2}$ → Función racional continua y derivable.
- Si $x\in(1,5) \longrightarrow f(x)=1-3\sqrt{2x-1}$ → Función radical continua y derivable.
- Estudiamos la continuidad y la derivabilidad en $x=-1$:

$$f(-1^+)=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2+2x-3}{-(x^2-1)}=\lim_{x\to-1^+}\frac{-(x+3)}{x+1}=+\infty \qquad f(-1^-)=\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2+2x-3}{1-x^2}=\lim_{x\to-1^-}\frac{-(x+3)}{x+1}=-\infty$$

Así, la función no es continua, y por tanto, no es derivable, en $x=-1$

- Estudiamos la continuidad y la derivabilidad en $x=1$:

$$f(1^+)=\lim_{x\to1^+}\left(1-3\sqrt{2x-1}\right)=-2 \qquad f(1^-)=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+2x-3}{1-x^2}=\lim_{x\to1^-}\frac{-(x+3)}{x+1}=-2 \qquad f(1)=-2$$

Así, la función es continua en $x=1$.

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{(x+1)^2} & \text{si } x\in[-2,-1)\cup(-1,1)\\ \dfrac{-3}{\sqrt{2x-1}} & \text{si } x\in(1,5]\end{cases} \to \begin{cases}f'(1^-)=\dfrac{1}{2}\\ f'(1^+)=-3\end{cases}$$

→ La función no es derivable en $x=1$.

54. Página 155

- Si $x<-4: f(x)=-1\to$ Función constante continua y derivable en $(-\infty,-4)$.
- Si $-4<x<2: f(x)=x+2\to$ Función polinómica continua y derivable en $(-4,2)$.
- Si $x>2: f(x)=\dfrac{8}{x}\to$ Función racional continua y derivable en $(2,+\infty)$.
- Estudiamos la continuidad y la derivabilidad en $x=-4$:

$$f(-4^+)=\lim_{x\to-4^+}(x+2)=-2 \qquad f(-4^-)=\lim_{x\to-4^-}-1=-1$$

f(*x*) no es continua en $x=-4$; por tanto, no es derivable en $x=-4$.

- Estudiamos la continuidad y la derivabilidad en $x=2$:

$$f(2^+)=\lim_{x\to2^+}\frac{8}{x}=4 \qquad f(2^-)=\lim_{x\to2^-}(x+2)=4$$

f(*x*) no es continua en $x=2$.

$$f'(x)=\begin{cases}0 & x<-4\\ 1 & -4<x<2\\ -\dfrac{8}{x^2} & x>2\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}f'(2^-)=1\\ f'(2^+)=-2\end{array}\right\}$$

→ Las derivadas laterales no son iguales; por tanto, *f*(*x*) no es derivable en $x=2$.

Así, la función es derivable en $\mathbb{R}-\{-4, 2\}$.

55. Página 155

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2+5x+6 & \text{si} \quad x\le -1 \\ 2-\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad -1<x<2 \\ \dfrac{5}{4}+2^{-x} & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$$

• Si $x<-1 \rightarrow f(x)=2x^2+5x+6 \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(-\infty,-1)$.

• Si $-1<x<0$ y $0<x<2 \rightarrow f(x)=2-\dfrac{1}{x} \rightarrow$ Función continua y derivable en $(-1,0)\cup(0,2)$.

• Si $x>2 \rightarrow f(x)=\dfrac{5}{4}+2^{-x} \rightarrow$ Función exponencial continua y derivable en $(2,+\infty)$.

• Si $x=-1$:

$$f(-1^+)=\lim_{x\to -1^+}\left(2-\frac{1}{x}\right)=3 \qquad f(-1^-)=\lim_{x\to -1^-}(2x^2+5x+6)=3 \qquad f(-1)=3$$

Así, la función es continua en $x=-1$.

$$f'(x)=\begin{cases} 4x+5 & \text{si } x<1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } -1<x<0 \text{ ó } 0<x<2 \\ \dfrac{-\ln 2}{2^x} & \text{si } x>2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(-1^-)=1 \\ f'(-1^+)=1 \end{cases} \rightarrow \text{La función es derivable en } x=-1.$$

• Si $x=0$:

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\left(2-\frac{1}{x}\right)=-\infty \qquad f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\left(2-\frac{1}{x}\right)=+\infty$$

Así, la función no es continua en $x=0$; por tanto, no es derivable en este punto.

• Si $x=2$:

$$f(2^+)=\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{5}{4}+2^{-x}\right)=\frac{3}{2} \qquad f(2^-)=\lim_{x\to 2^-}\left(2-\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{2} \qquad f(2)=\frac{3}{2}$$

Así, la función es continua en $x=2$.

$$f'(x)=\begin{cases} 4x+5 & \text{si } x<1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } -1<x<0 \text{ ó } 0<x<2 \\ \dfrac{-\ln 2}{2^x} & \text{si } x>2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(2^-)=\dfrac{1}{4} \\ f'(2^+)=\dfrac{-\ln 2}{4} \end{cases} \rightarrow \text{La función no es derivable en } x=2.$$

En resumen, la función es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{0,2\}$.

56. Página 155

$$f(x)=\begin{cases} 7-2x+6 & \text{si } x\ge 3 \\ 7+2x-6 & \text{si } x<3 \end{cases}=\begin{cases} 13-2x & \text{si } x\ge 3 \\ 1+2x & \text{si } x<3 \end{cases}$$

• Si $x<3: f(x)=13-2x \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(-\infty,3)$

• Si $x>3: f(x)=1+2x \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(3,+\infty)$

- Si $x=3$:

$f(3^-)=\lim\limits_{x\to 3^-}(1+2x)=7 \qquad f(3^+)=\lim\limits_{x\to 3^+}(13-2x)=7 \qquad f(3)=7$

Por tanto, la función es continua en $x=3$.

$f'(x)=\begin{cases}-2 & \text{si } x>3\\ 2 & \text{si } x<3\end{cases} \to \begin{cases}f'(3^+)=-2\\ f'(3^-)=2\end{cases}$ ⟶ Por tanto, la función no es derivable en $x=3$.

57. Página 155

a) • Si $x>3: f(x)=x^2-2x\to$ Función polinómica continua y derivable en $(3,+\infty)$.

- Si $x<3: f(x)=2x+a\to$ Función polinómica continua y derivable en $(-\infty,3)$.
- Para que la función sea continua en $x=3$, los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(3)=3$.

$$\left.\begin{array}{l} f(3^-)=\lim\limits_{x\to 3^-}(2x+a)=6+a\\ f(3^+)=\lim\limits_{x\to 3^-}(x^2-2x)=3\end{array}\right\}\to f(3^-)=f(3^+)=f(3)\to 6+a=3\to a=-3$$

b) La función solo puede ser derivable si es continua, por lo que consideramos:

$$f(x)=\begin{cases}x^2-2x & x\geq 3\\ 2x-3 & x<3\end{cases}$$

$$f'(3^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(3+h)^2-2(3+h)-3}{h}=\lim_{h\to 0^+}(4+h)=4$$

$$f'(3^-)=\lim_{h\to 0-}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2(3+h)-3-3}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2h}{h}=2$$

Las derivadas laterales existen, pero no son iguales; por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x=3$.

58. Página 155

- Si $x<-1: f(x)=-4x-3\to$ Función polinómica continua y derivable en $(-\infty,-1)$.
- Si $-1<x<1: f(x)=2x^2-1\to$ Función polinómica continua y derivable en $(-1,1)$.
- Si $x>1: f(x)=\dfrac{k+2}{x}\to$ Función racional continua y derivable en $(1,+\infty)$.
- Para que la función sea continua en $x=-1$, los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(-1)=1$:

$f(-1^+)=\lim\limits_{x\to -1^+}(2x^2-1)=1 \qquad f(-1^-)=\lim\limits_{x\to -1^-}(-4x-3)=1$

$f(x)$ es continua en $x=-1$.

- Para que la función sea continua en $x=1$, los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(1)=k+2$:

$f(1^+)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{k+2}{x}=k+2 \qquad f(1^-)=\lim\limits_{x\to -1^-}(2x^2-1)=1$

$f(1^-)=f(1^+)=f(1)\to k+2=1\to k=-1$.

Si $k=-1$: $f'(x)=\begin{cases}-4 & x<-1\\ 4x & -1<x<1\\ -\dfrac{1}{x^2} & x>1\end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-1^-)=-4 \\ f'(-1^+)=-4 \end{array}\right\} \rightarrow$$ Las derivadas laterales existen y son iguales; por tanto, $f(x)$ es derivable en $x=-1$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=4 \\ f'(1^+)=-1 \end{array}\right\} \rightarrow$$ Las derivadas laterales no son iguales, por tanto; $f(x)$ no es derivable en $x=1$.

59. Página 155

a) • Si $x<0: f(x)=\dfrac{1}{x^2+1} \rightarrow$ Función racional continua y derivable en $(-\infty,0)$.

• Si $0<x<3: f(x)=ax+b \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(0,3)$.

• Si $x>3: f(x)=x-5 \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(3,+\infty)$.

• Para que la función sea continua en $x=0$, los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(0)=b$:

$$f(0^+)=\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{x^2+1}=1 \qquad f(0^-)=\lim_{x\to -1^-}(ax+b)=b$$

$f(x)$ es continua en $x=0$ si $b=1$.

Consideramos que $b=1$, entonces para que la función sea continua en $x=3$ los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(3)=3a+1$:

$$f(3^+)=\lim_{x\to -1^+}(x-5)=-2 \qquad f(3^-)=\lim_{x\to -1^-}(ax+1)=3a+1$$

$$f(3^-)=f(3^+)=f(3)\rightarrow 3a+1=-2\rightarrow a=-1.$$

b) Si $a=-1$ y $b=1$: $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2} & x<0 \\ -1 & 0<x<3 \\ 1 & x>3 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=0 \\ f'(0^+)=-1 \end{array}\right\} \rightarrow$$ Las derivadas laterales no son iguales; por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x=0$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(3^-)=-1 \\ f'(3^+)=1 \end{array}\right\} \rightarrow$$ Las derivadas laterales no son iguales; por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x=3$.

60. Página 155

$$f(x)=\begin{cases} 2x-4+x & \text{si } x\geq 2 \\ -2x+4+x & \text{si } x<2 \end{cases}=\begin{cases} 3x-4 & \text{si } x\geq 2 \\ -x+4 & \text{si } x<2 \end{cases}$$

• Si $x<2: f(x)=-x+4 \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(-\infty,2)$.

• Si $x>2: f(x)=3x-4 \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(2,+\infty)$.

• Si $x=2$:

$$f(2^-)=\lim_{x\to 2^-}(-x+4)=2 \qquad f(2^+)=\lim_{x\to 2^+}(3x-4)=2 \qquad f(2)=2$$

Entonces la función es continua en $x=2$.

$$f'(x)=\begin{cases} 3 & \text{si } x>2 \\ -1 & \text{si } x<2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(2^+)=3 \\ f'(2^-)=-1 \end{cases} \rightarrow$$ Las derivadas laterales existen pero son diferentes, entonces la función no es derivable en $x=2$.

61. Página 155

$$f(x)=\begin{cases} x^3+x+1 & \text{si } x\geq 0 \\ -x^3+x+1 & \text{si } x<0 \end{cases}$$

- Si $x<0: f(x)=-x^3+x+1 \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(-\infty,0)$.
- Si $x>0: f(x)=x^3+x+1 \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(2,+\infty)$.
- Si $x=0$:

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}(x^3+x+1)=1 \qquad f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}(-x^3+x+1)=1 \qquad f(0)=1$$

Entonces la función es continua en $x=0$.

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2+1 & \text{si } x>0 \\ -3x^2+1 & \text{si } x<0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(0^+)=1 \\ f'(0^-)=1 \end{cases}$$

Las derivadas laterales existen y son iguales, entonces la función es derivable en $x=0$.

- Por otra parte:

$$f(x)=|x|^3+|x|+1=\begin{cases} -x^3-x+1 & \text{si } x<0 \\ x^3+x+1 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

$f(0^+)=f(0^-)=f(0) \longrightarrow$ Continua en $x=0$.

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2+1 & \text{si } x>0 \\ -3x^2-1 & \text{si } x<0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(0^+)=1 \\ f'(0^-)=-1 \end{cases}$$

Las derivadas laterales existen pero son diferentes, luego la función no es derivable en $x=0$.

62. Página 155

$$f(x)=\begin{cases} \cos x & \text{si } x\leq 0 \\ x^2+a & \text{si } x>0 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable, en primer lugar, debe ser continua.

La función es continua en $x=0$ si los límites laterales son iguales y coinciden con $f(0)=\cos 0=1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\cos x=1 \\ f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}(x^2+a)=a \end{array}\right\} \rightarrow f(0^-)=f(0^+)=f(0)\rightarrow a=1$$

$$f(x)=\begin{cases} \cos x & \text{si } x\leq 0 \\ x^2+1 & \text{si } x>0 \end{cases} \rightarrow f'(x)=\begin{cases} -\operatorname{sen} x & \text{si } x<0 \\ 2x & \text{si } x>0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=0 \\ f'(0^+)=0 \end{array}\right\} \rightarrow$$ Las derivadas laterales existen y son iguales; por tanto, $f(x)$ es derivable en $x=0$ si $a=1$.

63. Página 155

a) • Si $x \in (-\infty,-4) \cup (-4,-3) \longrightarrow f(x) = \frac{x}{x+4}$ ⟶ Función racional continua y derivable.

• Si $x \in (-3,+\infty) \longrightarrow f(x) = x^2 + ax$ ⟶ Función polinómica continua y derivable.

• Si $x = -4$:

No es continua ni derivable en $x = -4$ ya que no pertenece al dominio.

• Si $x = -3$:

$$\left.\begin{array}{l} f(-3^-) = \lim\limits_{x\to -3^-} \frac{x}{x+4} = -3 \\ f(-3^+) = \lim\limits_{x\to -3^+} (x^2+ax) = 9-3a \end{array}\right\} \to f(-3^-) = f(-3^+) = f(3) \to 9-3x = -3 \to a = 4$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{si } x > -3 \\ \frac{4}{(x+4)^2} & \text{si } x < -3 \end{cases} \to \begin{cases} f'(-3^+) = -2 \\ f'(-3^-) = 4 \end{cases} \to f'(3^+) \neq f'(3^-)$$

Entonces no existe ningún valor de *a* para el cual la función es derivable en $x = -3$

b) • Si $x \in (-\infty, 1) \longrightarrow f(x) = 2x + e^{1-x}$ ⟶ Función exponencial continua y derivable.

• Si $x \in (1, +\infty) \longrightarrow f(x) = 1 + \sqrt{x+m}$ ⟶ Función radical continua y derivable $\forall m \geq -x$.

• Si $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1^-) = \lim\limits_{x\to 1^-} (2x+e^{1-x}) = 3 \\ f(1^+) = \lim\limits_{x\to 1^+} (1+\sqrt{x+m}) = 1+\sqrt{1+m} \end{array}\right\} \to f(1^-) = f(1^+) \to 3 = 1+\sqrt{1+m} \to m = 3$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2-e^{1-x} & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x+3}} & \text{si } x > 1 \end{cases} \to \begin{cases} f'(1^+) = 1 \\ f'(1^-) = \frac{1}{4} \end{cases} \to f'(1^+) \neq f'(1^-)$$

Entonces no existe ningún valor de *a* para el cual la función es derivable en $x = 1$.

64. Página 155

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{25-x^2} & \text{si } -5 \leq x < 4 \\ x^2+mx+n & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable en $x = 4$ ha de ser continua en este punto:

$$\left.\begin{array}{l} f(4^-) = \lim\limits_{x\to 4^-} \sqrt{25-x^2} = 3 \\ f(4^+) = \lim\limits_{x\to 4^+} (x^2+mx+n) = 16+4m+n \end{array}\right\} \to f(4^-) = f(4^+) = f(4) \to 4m+n = -13$$

Para que la función sea derivable en $x = 4$ las derivadas laterales tienen que existir y ser iguales:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-x}{\sqrt{25-x^2}} & \text{si } -5 < x < 4 \\ 2x+m & \text{si } x > 4 \end{cases} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} f(4^-) = -\frac{4}{3} \\ f(4^+) = 8+m \end{array}\right\} \to 8+m = -\frac{4}{3} \to m = -\frac{28}{3}$$

Así, $16 + 4 \cdot \left(-\frac{28}{3}\right) + n = 3 \to\to n = 3 + \frac{112}{3} - 16 \to n = \frac{73}{3}$.

65. Página 155

$$f(x)=\begin{cases}1+a\sqrt{x+1}\cdot\ln(x+1) & \text{si } x>0\\ (x-1)^2 & \text{si } x\le 0\end{cases}$$

a) • Si $x\in(0,+\infty)\rightarrow f(x)=1+a\sqrt{x+1}\cdot\ln(x+1)$ → Producto de funciones continuas y derivables en $(0,+\infty)$.

• Si $x\in(-\infty,0)\rightarrow f(x)=(x-1)^2$ → Función polinómica continua y derivable en $(-\infty,0)$.

• Si $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)^2=1\\ f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+a\sqrt{x+1}\cdot\ln(x+1)\right)=1+a\cdot 0=1\ \ \forall a\end{array}\right\}\rightarrow f(0^-)=f(0^+)=f(0)=1\ \ \forall a\in R$$

b) $$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{a\cdot(\ln(x+1)+2)}{2\cdot\sqrt{x+1}} & \text{si } x>0\\ 2x-2 & \text{si } x<0\end{cases}$$

Para que la función sea derivable: $f'(0^+)=f'(0^-)\rightarrow\begin{cases}f'(0^+)=\dfrac{a\cdot(\ln(1)+2)}{2\sqrt{1}}=\dfrac{2a}{2}\\ f'(0^-)=-2\end{cases}\rightarrow a=-2$

66. Página 156

a) $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+}(2x+1)=1\\ \lim\limits_{x\to 0^-}e^{ax}=1\end{array}\right\}\rightarrow\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$$

$f(0)=e^{a\cdot 0}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)\rightarrow f(x)$ es continua en $x=0$.

b) $$f'(x)=\begin{cases}ae^{ax} & x<0\\ 2 & x>0\end{cases}$$

Para que la función sea derivable en $x=0$, las derivadas laterales tienen que ser iguales:

$$\left.\begin{array}{l}f'(0^-)=a\\ f'(0^+)=2\end{array}\right\}\rightarrow a=2$$

67. Página 156

a) Para que la función sea continua en $x=2$, los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(2)=3$.

$$\left.\begin{array}{l}f(2^-)=\lim\limits_{x\to 2^-}(ax^2+1)=4a+1\\ f(2^+)=\lim\limits_{x\to 2^+}(e^{2-x}+2)=3\end{array}\right\}\rightarrow f(2^-)=f(2^+)=f(2)\rightarrow 4a+1=3\rightarrow a=\frac{1}{2}$$

b) $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2+1 & x<2\\ e^{2-x}+2 & x\ge 2\end{cases}\rightarrow f'(x)=\begin{cases}x & x<2\\ -e^{2-x} & x>2\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}f'(2^-)=2\\ f'(2^+)=-1\end{array}\right\}\rightarrow$$ Las derivadas laterales no son iguales; por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x=2$.

68. Página 156

$$f(x)=\begin{cases}\ln(e+sen\,x) & \text{si } x<0\\ x^3+ax+b & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

Para que la función sea derivable en $x=0$ ha de ser continua en este punto:

$$\left.\begin{aligned}f(0^-)&=\lim_{x\to 0^-}\ln(e+sen\,x)=1\\ f(0^+)&=\lim_{x\to 0^+}(x^3+ax+b)=b\end{aligned}\right\}\to f(0^-)=f(0^+)=f(0)\to b=1$$

Para que la función sea derivable en $x=0$ las derivadas laterales tienen que existir y ser iguales:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x}{e+sen\,x} & \text{si } x<0\\ 3x^2+a & \text{si } x>0\end{cases}\ \longrightarrow\ \left.\begin{aligned}f(0^-)&=\frac{1}{e}\\ f(0^+)&=a\end{aligned}\right\}\to a=\frac{1}{e}$$

69. Página 156

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+1 & \text{si } x<0\\ a^2-sen\,x & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

- Si $x<0: f(x)=ax^2+bx+1\to$ Función polinómica continua y derivable en $(-\infty,0)$.
- Si $x>0: f(x)=a^2-senx\to$ Función trigonométrica continua y derivable en $(0,+\infty)$.
- Si $x=0$:

$$\left.\begin{aligned}f(0^-)&=\lim_{x\to 0^-}(ax^2+bx+1)=1\\ f(0^+)&=\lim_{x\to 0^+}(a^2-senx)=a^2\end{aligned}\right\}\ \longrightarrow\ f(0^-)=f(0^+)=f(0)=1\ \longrightarrow\ a^2=1\to a=\pm 1$$

$$f'(x)=\begin{cases}2ax+b & \text{si } x<0\\ -\cos x & \text{si } x>0\end{cases}\ \longrightarrow\ \left.\begin{aligned}f'(0^-)&=b\\ f'(0^+)&=-\cos 0=-1\end{aligned}\right\}\to b=-1$$

70. Página 156

a) • Si $x<\pi: f(x)=e^{a(x-\pi)}\to$ Función exponencial continua y derivable en $(-\infty,\pi)$.

• Si $x>\pi: f(x)=2a+b\cdot sen(x-\pi)\to$ Función trigonométrica continua y derivable en $(\pi,+\infty)$.

• Si $x=\pi$:

$$\left.\begin{aligned}f(\pi^-)&=\lim_{x\to\pi^-}e^{a(x-\pi)}=1\\ f(\pi^+)&=\lim_{x\to\pi^+}(2a+b\cdot sen(x-\pi))=2a\end{aligned}\right\}\to 2a=1\to a=\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{\left(\frac{x-\pi}{2}\right)} & \text{si } x<\pi\\ b\cdot\cos(x-\pi) & \text{si } x>\pi\end{cases}\ \longrightarrow\ \left.\begin{aligned}f'(\pi^-)&=\frac{1}{2}\\ f'(\pi^+)&=b\cdot\cos 0=b\end{aligned}\right\}\to b=\frac{1}{2}$$

b) • Si $x<-1: f(x)=(x+b)^2 \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(-\infty,-1)$.

• Si $x>-1: f(x)=\dfrac{ax}{\sqrt{x+2}} \rightarrow$ Función radical continua y derivable en $(-1,+\infty)$.

• Si $x=-1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(-1^-)=\lim\limits_{x\to -1^-}(x+b)^2=1-2b+b^2 \\ f(-1^+)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{ax}{\sqrt{x+2}}=-a \end{array}\right\} \rightarrow -a=1-2b+b^2$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+2b & \text{si } x<-1 \\ \dfrac{a(x+4)}{2(x+2)^{\frac{3}{2}}} & \text{si } x>-1 \end{cases} \rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(-1^-)=-2+2b \\ f'(-1^+)=\dfrac{3a}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{3a}{2}=-2+2b$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} -a=1-2b+b^2 \\ 3a=-4+4b \end{cases} \rightarrow a=-\frac{16}{9} \text{ y } b=-\frac{1}{3} \text{ o } a=0 \text{ y } b=1$$

71. Página 156

a) $$f(x)=\begin{cases} 2e^x+x+a & \text{si } x\le 0 \\ x^2+b(x+1) & \text{si } 0<x\le 2 \\ x^4-3a & \text{si } x>2 \end{cases}$$

Todas las ramas son continuas y derivables en el dominio en el que se las ha definido.

• Si $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2e^x+x+a)=2+a \\ f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+b(x+1))=b \end{array}\right\} \rightarrow 2+a=b$$

• Si $x=2$:

$$\left.\begin{array}{l} f(2^-)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2+b\cdot(x+1))=4+3b \\ f(2^+)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^4-3a)=16-3a \end{array}\right\} \rightarrow 16-3a=4+3b$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} 2+a=b \\ 16-3a=4+3b \end{cases} \rightarrow a=1, b=3$$

Comprobamos la derivabilidad: $f'(x)=\begin{cases} 2e^x+1 & \text{si } x<0 \\ 2x+3 & \text{si } 0<x<2 \\ 4x^3 & \text{si } x>2 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=3 \\ f'(0^+)=3 \end{array}\right\} \text{ y } \left.\begin{array}{l} f'(2^-)=7 \\ f'(2^+)=32 \end{array}\right\}$$

Entonces *f* es derivable en $x=0$, pero no es derivable en $x=2$.

b) $f(x)=\begin{cases} -x^3+7x+c & \text{si} \quad x\le -2 \\ ax^2+3x+11 & \text{si} \quad -2<x\le \frac{3}{2} \\ 18\sqrt{2x+1}+b & \text{si} \quad x>\frac{3}{2} \end{cases}$

Todas las ramas son continuas y derivables en el dominio en el que se las ha definido.

• Si $x=-2$:

$$\left.\begin{array}{l} f(-2^-)=\lim\limits_{x\to -2^-}(-x^3+7x+c)=c-6 \\ f(-2^+)=\lim\limits_{x\to -2^+}(ax^2+3x+11)=4a+5 \end{array}\right\}\to 4a-c+11=0$$

$$f'(x)=\begin{cases} -3x^2+7 & \text{si } x<-2 \\ 2ax+3 & \text{si } -2<x<\frac{3}{2} \\ \frac{18}{\sqrt{2x+1}} & \text{si } x>\frac{3}{2} \end{cases} \to \left.\begin{array}{l} f'(-2^-)=-5 \\ f'(-2^+)=3-4a \end{array}\right\}\to -5=3-4a\to a=2$$

Así, $8+11=c\to c=19$

• Si $x=\frac{3}{2}$ (sustituyendo los valores de *a* y *c*):

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\frac{3}{2}^-\right)=\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}^-}(2x^2+3x+11)=20 \\ f\left(\frac{3}{2}^+\right)=\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}^+}(18\sqrt{2x+1}+b)=36+b \end{array}\right\}\to 20=36+b\to b=-16$$

• Comprobamos que es derivable:

$$f'(x)=\begin{cases} -3x^2+7 & \text{si } x<-2 \\ 4x+3 & \text{si } -2<x<\frac{3}{2} \\ \frac{18}{\sqrt{2x+1}} & \text{si } x>\frac{3}{2} \end{cases} \to \left.\begin{array}{l} f'\left(\frac{3}{2}^-\right)=9 \\ f'\left(\frac{3}{2}^+\right)=9 \end{array}\right\}\to \text{Es derivable en } x=\frac{3}{2}.$$

72. Página 156

Cada rama es continua y derivable en el dominio en el que se las ha definido. Comprobamos en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+ax+ab)=ab \\ f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\log_2(x+2)=1 \end{array}\right\}\to ab=1$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+a & \text{si } x<0 \\ \frac{1}{(x+2)\cdot\ln 2}=\frac{1}{x\cdot\ln 2+\ln 4} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=a \\ f'(0^+)=\frac{1}{\ln 4} \end{array}\right\}\to a=\frac{1}{\ln 4}\to b=\ln 4$$

73. Página 156

Si $-1 < x < 1$, $f(x)=\frac{a}{x}$ $\rightarrow$ Función racional, no continua en $x = 0$; por tanto, no es derivable en $x = 0$.

Así, no existen valores de a y b para los que la función sea derivable en todos los puntos.

74. Página 156

- Si $x<0: f(x)=3x+2 \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(-\infty,0)$.
- Si $0<x<\pi: f(x)=x^2-2a\cos x \rightarrow$ Función polinómica y trigonométrica continua y derivable en $(0,\pi)$.
- Si $x>\pi: f(x)=ax^2+b \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(\pi,+\infty)$.
- Para que la función sea continua en $x=0$, los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(0) = 2a$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}(3x+2)=2 \\ f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+2a\cos x)=2a \end{array}\right\} \rightarrow f(0^-)=f(0^+)=f(0)=1 \rightarrow 2a=2\rightarrow a=1$$

Consideremos que $a = 1$, entonces para que la función sea continua en $x = \pi$ los límites laterales tiene que ser iguales y coincidir con $f(\pi) = \pi^2 + b$:

$$\left.\begin{array}{l} f(\pi^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+2\cos x)=\pi^2-2 \\ f(\pi^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+b)=\pi^2+b \end{array}\right\} \rightarrow f(\pi^-)=f(\pi^+)=f(\pi)\rightarrow \pi^2-2=\pi^2+b\rightarrow b=-2$$

Si a= 1 y $b = -2$, entonces: $f'(x)=\begin{cases} 3 & x<0 \\ 2x-2senx & 0<x<\pi \\ 2x & x>\pi \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=3 \\ f'(0^+)=0 \end{array}\right\} \rightarrow$$ Las derivadas laterales no son iguales; por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(\pi^-)=2\pi \\ f'(\pi^+)=2\pi \end{array}\right\} \rightarrow$$ Las derivadas laterales existen y son iguales; por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = \pi$.

75. Página 156

a) $f'(x) = 2$	$f''(x) = 0$	$f'''(x) = 0$
b) $g'(x) = 2x$	$g''(x) = 2$	$g'''(x) = 0$
c) $h'(x) = 3x^2$	$h''(x) = 6x$	$h'''(x) = 6$
d) $i'(x) = -\text{sen } x$	$i''(x) = -\cos x$	$i'''(x) = \text{sen } x$
e) $j'(x) = \cos x$	$j''(x) = -\text{sen } x$	$j'''(x) = -\cos x$
f) $k'(x) = 1 + \text{tg}^2\, x$	$k''(x) = 2\text{tg } x \cdot (1 + \text{tg}^2\, x)$	$k'''(x) = 2(1 + \text{tg}^2\, x)^2 + 2 \text{ tg } x \cdot 2 \text{ tg } x \cdot (1 + \text{tg}^2\, x)$

76. Página 156

La función es continua en su dominio, esto es, en $(0, +\infty)$.

$h'(x)=\frac{1}{x}$ $\rightarrow h(x)$ es derivable en $(0, +\infty)$.

$h''(x)=-\frac{1}{x^2}$

77. Página 156

a) $f(x)$ está definida por funciones polinómicas; por tanto, son continuas y derivables en $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} f\left(1^-\right)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2=1 \\ f\left(1^+\right)=\lim\limits_{x\to 1^+} 2x=2 \end{array}\right\} \to f\left(1^-\right)\neq f\left(1^+\right)\to$$ $f(x)$ no es continua en $x=1$; por tanto, no es derivable en $x=1$.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & x<1 \\ 2 & x>1 \end{cases} \qquad f''(x)=\begin{cases} 2 & x<1 \\ 0 & x>1 \end{cases}$$

Así, $f(x)$ es continua y derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$.

b) $g(x)=\begin{cases} 2x-2 & x\geq 2 \\ 2 & x<2 \end{cases}$

$g(x)$ está definida por funciones polinómicas; por tanto, son continuas y derivables en $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} g\left(2^-\right)=\lim\limits_{x\to 2^-} 2=2 \\ g\left(2^+\right)=\lim\limits_{x\to 2^+} (2x-2)=2 \end{array}\right\} \to g\left(2^-\right)=g\left(2^+\right)=g(2)\to$$ $g(x)$ es continua en $x=2$.

$$g'(x)=\begin{cases} 2 & x>2 \\ 0 & x<2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} g'(2^-)=0 \\ g'(2^+)=2 \end{array}\right\} \to$$ Las derivadas laterales existen, pero son distintas; por tanto, $g(x)$ no es derivable en $x=2$.

Así, $g(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{2\}$.

$g''(x)=0$ si $x\neq 2$

c) $h(x)$ está definida por funciones polinómicas; por tanto, son continuas y derivables en $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} h\left(-1^-\right)=\lim\limits_{x\to 2^-} (3x+4)=1 \\ h\left(-1^+\right)=\lim\limits_{x\to 2^+} (-2x-1)=1 \end{array}\right\} \to h\left(-1^-\right)=h\left(-1^+\right)=h(-1)\to$$ $h(x)$ es continua en $x=-1$.

$$h'(x)=\begin{cases} 3 & x<-1 \\ -2 & x>-1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} h'(-1^-)=3 \\ h'(-1^+)=-2 \end{array}\right\} \to$$ Las derivadas laterales existen, pero son distintas; por tanto, $h(x)$ no es derivable en $x=-1$.

Así, $h(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{-1\}$.

$h''(x)=0$ si $x\neq 1$

78. Página 156

a) $f'(x)=\dfrac{(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}=\dfrac{2}{(1-x)^2}$ $\qquad f''(x)=-\dfrac{4}{(1-x)^3}$ $\qquad f'''(x)=\dfrac{12}{(1-x)^4}$ $\qquad f^{IV)}(x)=-\dfrac{48}{(1-x)^5}$

La derivada n-ésima es: $f^{n)}(x)=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{2\cdot n!}{(1-x)^{n+1}}$

b) $g'(x)=2$ sen x cos $x=$ sen $2x$ $\qquad g''(x)=2\cos 2x$ $\qquad g'''(x)=-4$ sen $2x$ $\qquad g^{IV)}(x)=-8\cos 2x$

$g^{V)}(x)=16$ sen $2x$

Así, la derivada n-ésima puede calcularse según las expresiones:

$$g^{n)}=\begin{cases} g^{2k-1)}(x)=(-1)^{k+1}2^{2k-2}\text{sen } 2x \\ g^{2k)}(x)=(-1)^{k+1}2^{2k-1}\cos 2x \end{cases}$$ para $k=1, 2, 3\ldots$

c) $h'(x) = x^{-1}$ $h''(x) = -x^{-2}$ $h'''(x) = 2x^{-3}$ $h^{IV)}(x) = -6x^{-4}$

La derivada n-ésima es: $h^{n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot (n-1)!x^{-n}$

79. Página 156

a) $y' = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x}$

b) $y' = \frac{6}{x^3} + 1$

c) $y' = (3e)^{-x}(1 - x(1 + \ln 3))$

d) $y' = e^{-x}(x^2 - x - 1)$

e) $y' = \frac{-1}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}$

f) $y' = \frac{-4x-9}{(x-3)^4}$

80. Página 157

a) $y' = \frac{4x-9}{x(x-3)}$

b) $y' = \frac{x}{x^2-2}$

c) $y' = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$

d) $y' = \frac{15x^2}{(5x^3-1)\cdot \ln 2}$

81. Página 157

a) $y' = \frac{4}{sen 4x}$

b) $y' = -6x \cdot tg(x^2 - 1)$

c) $\frac{20x}{(x^4 - 25)\cdot \ln 2}$

d) $y' = \frac{1}{2x - 2x^2}$

e) $y' = \frac{1 + sen^2 x - 2x\, sen(2x)}{2x \cdot \ln 10 \cdot (sen^2 x + 1)}$

82. Página 157

a) $y' = -\frac{16x}{(x^2-4)^2}$

b) $y' = \frac{2x^2 - 2x + 1}{(x-1)^2 x^2}$

c) $y' = \frac{7}{2\sqrt{x}} + \frac{8}{3\sqrt[3]{x^2}}$

d) $y' = e^x(x+1)$

83. Página 157

a) $y' = \frac{10x}{3\sqrt[3]{(5x^2)^2}} = \frac{10}{3\sqrt[3]{25x}}$

b) $y' = \frac{-1}{(x-3)^2}$

c) $y' = \frac{-x(x+2)}{(x+1)^2}$

d) $y' = -15x^2 + 2x\, sen\, x + x^2 cos\, x$

e) $y' = \frac{1}{x \ln 2} + 2^x \ln 2$

84. Página 157

a) $y'=\dfrac{2xe^x-(x^2+1)e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{-x^2+2x-1}{e^x}$

b) $y'=\dfrac{\ln x-x\cdot\dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}$

c) $y'=\dfrac{-\sqrt{x-1}}{(x-1)^2\sqrt{x+1}}$

d) $y'=\dfrac{2(x+2)(x+1)-(x+2)^2}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

e) $y'=\dfrac{-2x^3+4x}{e^{x^2}}$

f) $y'=\dfrac{-4x^3-3x^2-2}{2\sqrt{\dfrac{2x+1}{x^3-1}}(x^3-1)^2}$

85. Página 157

a) $y'=3^{x^2+4}\ln 3\cdot 2x$

b) $y'=15x^4(x^5-2)^2$

c) $y'=\dfrac{1}{3}(x^3-2x)^{-\frac{2}{3}}\cdot(3x^2-2)=\dfrac{3x^2-2}{3\sqrt[3]{(x^3-2x)^2}}$

d) $y'=-10xe^{-x^2}$

e) $y'=\dfrac{-5x-6}{2x^4\sqrt{x+1}}$

86. Página 157

a) $y'=\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$

b) $y'=2xe^{x^2-7}$

c) $y'=2\,sen\,x\cdot cos\,x$

d) $y'=2^{sen\,x}\cdot\ln 2\cdot cos\,x$

87. Página 157

a) $y'=12\cdot\dfrac{1}{2}(3x^2+x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(6x+1)=\dfrac{36x+6}{\sqrt{3x^2+x}}$

b) $y'=\dfrac{cos\,x^2\cdot 2x}{sen\,x^2}=2x\,cotg\,x^2$

c) $y'=(8x-5)\cdot 3^x+(4x^2-5x+1)\cdot 3^x\cdot\ln 3$

88. Página 157

a) $y'=4tg(2x+3)(1+tg^2(2x+3))$

b) $y'=\dfrac{3x^2}{1+(x^3+6)^2}$

c) $y'=\dfrac{1}{2}(\ln(3x-5))^{-\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{3}{3x-5}=\dfrac{3}{2(3x-5)\sqrt{\ln(3x-5)}}$

89. Página 157

a) $y'=\frac{1}{4}(5x^3+1)^{-\frac{3}{4}}\cdot 15x^2=\frac{15x^2}{4\sqrt[4]{(5x^3+1)^3}}$

b) $y'=2\,arc\,sen\,x+\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$

c) $y'=\frac{2}{3}(5x-2)^{-\frac{1}{3}}\cdot 5=\frac{10}{3\sqrt[3]{5x-2}}$

90. Página 157

a) $y'=-\frac{4x}{x^4+4}$

b) $y'=\frac{\cos x}{2\,sen\,x}$

c) $y'=-4\left(tg^2(\cos(2x))+1\right)\cdot sen(2x)\cdot tg(\cos(2x))$

d) $y'=-\frac{2x}{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{-4x^2+1}}$

91. Página 157

a) $y'=-2e^{\cos 2x}\cdot sen^2 2x+2\cos 2x\cdot e^{\cos 2x}$

b) $y'=-10\left(tg^2(-5x+1)+1\right)\cdot tg(-5x+1)$

c) $y'=-6(2x-1)^2\cdot sen((2x-1)^3)$

d) $y'=-6\cos^2(2x-1)\cdot sen(2x-1)$

92. Página 157

a) $y'=\frac{2x+e^x}{x^2+e^x}$

b) $y'=\frac{4x}{x^2+1}$

c) $y'=2-\frac{1}{x}$

d) $y'=\frac{2x^2+9x-3}{3x\left(x^2+2x-3\right)}$

e) $y'=-\frac{x\,sen\,x+\cos x+1}{x+x\cos x}$

93. Página 157

a) $y'=\frac{4x^2-2}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $y'=-\frac{\sqrt[3]{cotgx}\cdot cosec\,x\cdot sec\,x}{3}$

c) $y'=-\frac{1}{2}cosec\,x\cdot\left(cotg^2x+cosec^2x\right)$

d) $y'=-2sen(2-x)\cos(2-x)=-sen(4-2x)$

94. Página 157

a) $y'=\frac{-x\,sen\,x+sen\,x+x\cos x}{e^x}$

b) $y'=\frac{2^x\ln 2}{2^x-1}$

c) $y'=-\frac{x\,sen\,x+2\cos x}{x^3}$

d) $y'=\frac{sen\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. Página 158

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Meterse en la piscina en verano para refrescarse, encender la calefacción para calentarse o el aire acondicionado, utilizar cualquier electrodoméstico o artículo electrónico que libera energía calórica, utilizar una sartén u olla, echar hielos en la bebida…

2. Página 158

El punto de equilibrio térmico es la temperatura a la que llegan cuerpo y medio simultáneamente y que hace que no haya más variación de temperatura (en el sentido de bajar una y subir la otra).

3. Página 158

Lo que ocurrirá es que tenderán a bajar una y subir otra hasta que lleguen a la misma temperatura y se equilibren.

4. Página 158

• Primera ley del movimiento: «todo cuerpo permanece en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme, salvo que actúen fuerzas sobre él que le obliguen a cambiar de estado».

• Segunda ley del movimiento: «la fuerza neta sobre un objeto es igual a la tasa de variación temporal del producto de su masa y velocidad».

• Tercera ley del movimiento: «a cada acción le corresponde una reacción igual y en sentido opuesto».

• Ley de la gravitación universal: la fuerza de atracción entre dos objetos es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa.

• Teoría de las mareas: Isaac Newton realizó varios estudios del comportamiento de las mareas y calculó la altura de estas según la fecha del mes, la estación del año y la latitud. La explicación que dio, es la que se acepta actualmente.

• Teoría del color: descubrió que la luz procedente del sol (la luz blanca) se puede descomponer en colores.