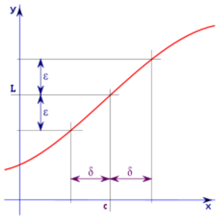
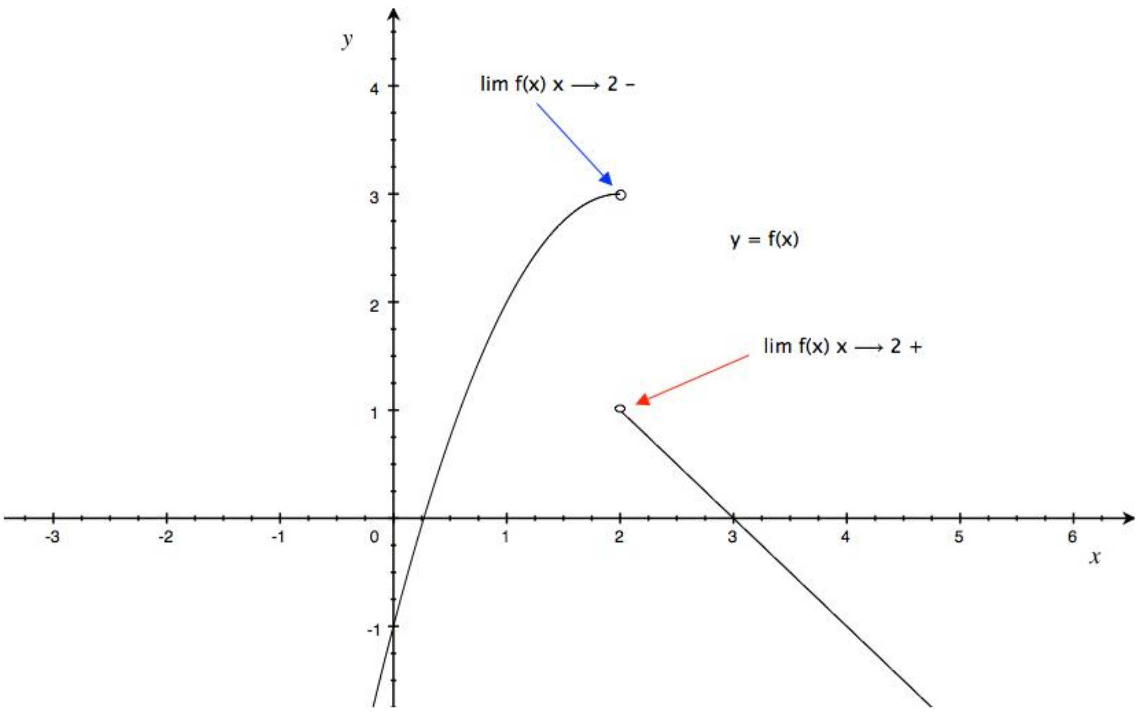


Apuntes

Matemáticas 2º de bachillerato

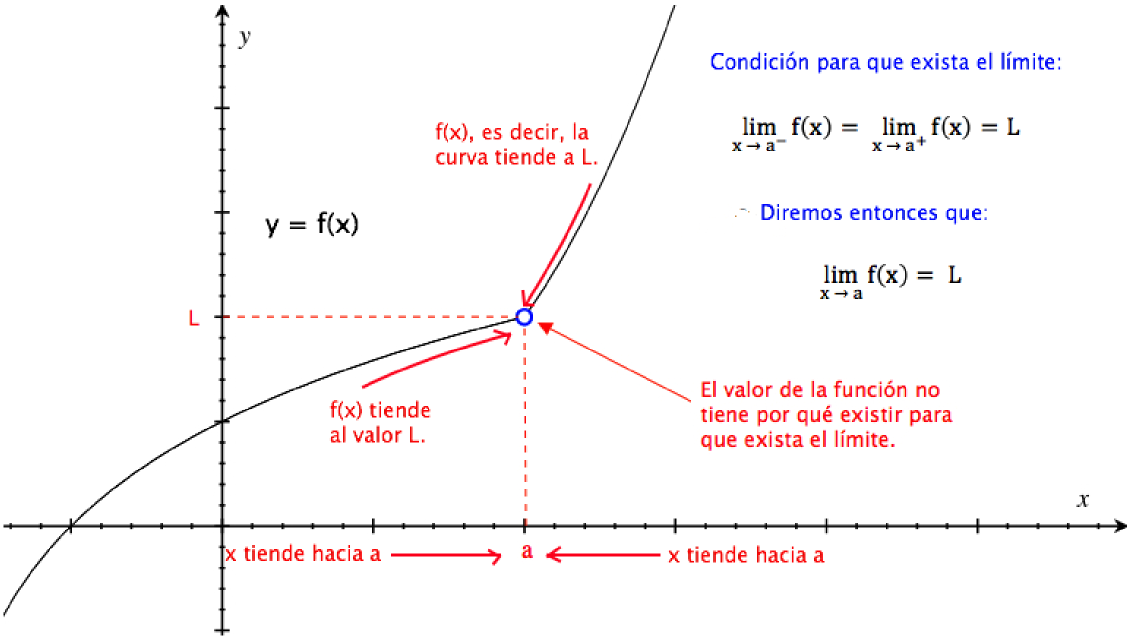
Tema 2

Límites de funciones

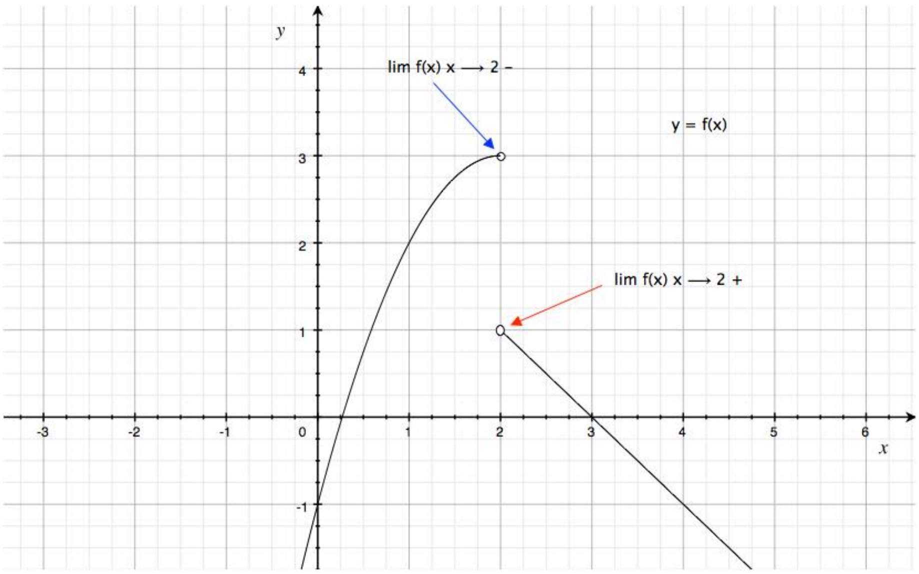


2.1 Límites de funciones

Def.: Dada una función f(x), diremos que su límite cuando x tiende hacia a es el número L, y lo escribiremos, $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si existen los límites laterales cuando x tiende hacia a y ambos son iguales: $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$.



En caso contrario, diremos que no existe el límite en x = a.



A continuación repasamos una serie de conceptos que hemos trabajado en años anteriores:

$\frac{K}{0} = \pm\infty$
$\frac{\infty}{0} = \pm\infty$
$\frac{K}{\infty} = 0$
$\frac{0}{\infty} = 0$

$$a^{\infty} = \begin{cases} \infty & \text{si } 1 < a \\ \text{IND } 1^{\infty} & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

A la hora de resolver los límites, deberíamos tener claro si se trata o no de una indeterminación, ya que sólo estas últimas las tendremos que operar. Trabajaremos con las siguientes indeterminaciones:

$\infty - \infty$
$0 \cdot \infty$
$\frac{\infty}{\infty}$
$\frac{0}{0}$
1^{∞}

Ejemplos:

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 5x} - x\right) =$

2. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{x+2}{x^2-1} - \frac{x+3}{x^2+x-2}\right) =$

3. $\lim\limits_{x \to \infty} 2x \cdot \frac{5x}{x^2-3x+1} =$

4. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2+4}{x^2-4x+4} =$

5. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{x^2+x+1}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x-1}} =$

Ejercicios

1. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-2x^2+x} =$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - x^2) =$
3. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x}\right) =$
4. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(5 + \frac{1}{5x}\right)^{5x} =$
5. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{3x^3+5}{x+2} - \frac{4x^3-x}{x-2}\right) =$
6. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{3}{2x}\right)^{5x} =$
7. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3-2x^2+2x+5}{x^2-6x-7} =$
8. $\lim\limits_{x \to 6} \left(\frac{x^2-4x-10}{x-4}\right)^{\frac{1}{x-6}} =$

9. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x^2 - 5x + 2}{x^2 + 2x} - \frac{x^3 + 2x + 1}{x^3 + x} \right) =$

2.2 Infinitésimos equivalentes

Def.: Una función f(x) se dice que es un **infinitésimo** cuando $x \to a$ si se cumple:

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 .$$

Ejemplo: f(x) = sen x es un infinitésimo cuando $x \to 0$.
Ejemplo: f(x) = tg x es un infinitésimo cuando $x \to 0$.
Ejemplo: $f(x) = 9 - x^2$ es un infinitésimo cuando $x \to 3$.
Ejemplo: f(x) = 1 – sen x <u>NO es un infinitésimo</u> cuando $x \to 0$.

Def.: Dos **infinitésimos** f(x) y g(x) se dicen **equivalentes** cuando $x \to a$, si el límite de los cocientes entre ambas es la unidad:

$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ **¡Error! Marcador no definido.**$\Rightarrow$ $f(x) \sim g(x)$

Tabla reducida de infinitésimos:

Infinitésimos	Equivalentes
$x \to 0$	
sen x	x
tg x	x
arcsen x	x
1 – cosx	$\frac{x^2}{2}$
$\sqrt[n]{1+x} - 1$	$\frac{x}{n}$
$x \to 1$	
ln x	x – 1

Ejemplos:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x^3 - x^2 + 5x} =$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x\,(1 - \cos x)}{\ln^3(x+1)} =$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\ln(\cos x)} =$

2.3 Límites por L´Hôpital

Este método sirve para resolver indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$. Si f(x) y g(x) son derivables en un entorno de a, tenemos que $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Ojo: Derivaremos por separado el numerador y el denominador, no se aplica la regla del cociente.

Antes de aplicar L´Hôpital sustituiremos, si es posible, algún infinitésimo por otro equivalente más sencillo.

Ejemplos:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} =$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} =$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x \cos x}{x\,(1 - \cos x)} =$

Ejercicios

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{x^2} =$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(e^x + x)}{x} =$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(\cos 2x)}{x^2} =$

2.4 IND $0 \cdot \infty$

Cuando tengamos IND $0 \cdot \infty$ intentaremos convertirla en $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$ para poder aplicar L´Hôpital.

Ejemplos

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x \ln \frac{x}{x+1} \right) =$

2. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{e^x - e} - \frac{1}{x+1} \right) =$

3. $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 e^{-x} =$

Ejercicios

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{x^2} =$
2. $\lim\limits_{x \to 2} (x-2) \ln (x-2) =$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 + x}{\sqrt{9+x} - 3} =$
4. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x} =$
5. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1-x} - 1} =$

6. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 4x^2 + x4} =$

2.5 Resolución de indeterminaciones del tipo 1^{∞}, 0^0 e ∞^0

Para resolver este tipo de indeterminaciones, tomaremos logaritmos, como se muestra en los ejemplos a continuación.

Ejemplos

1. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \text{sen } x)^{\frac{2}{\text{tg } x}} =$

2. $\lim\limits_{x \to 0} x^{\text{sen } x} =$

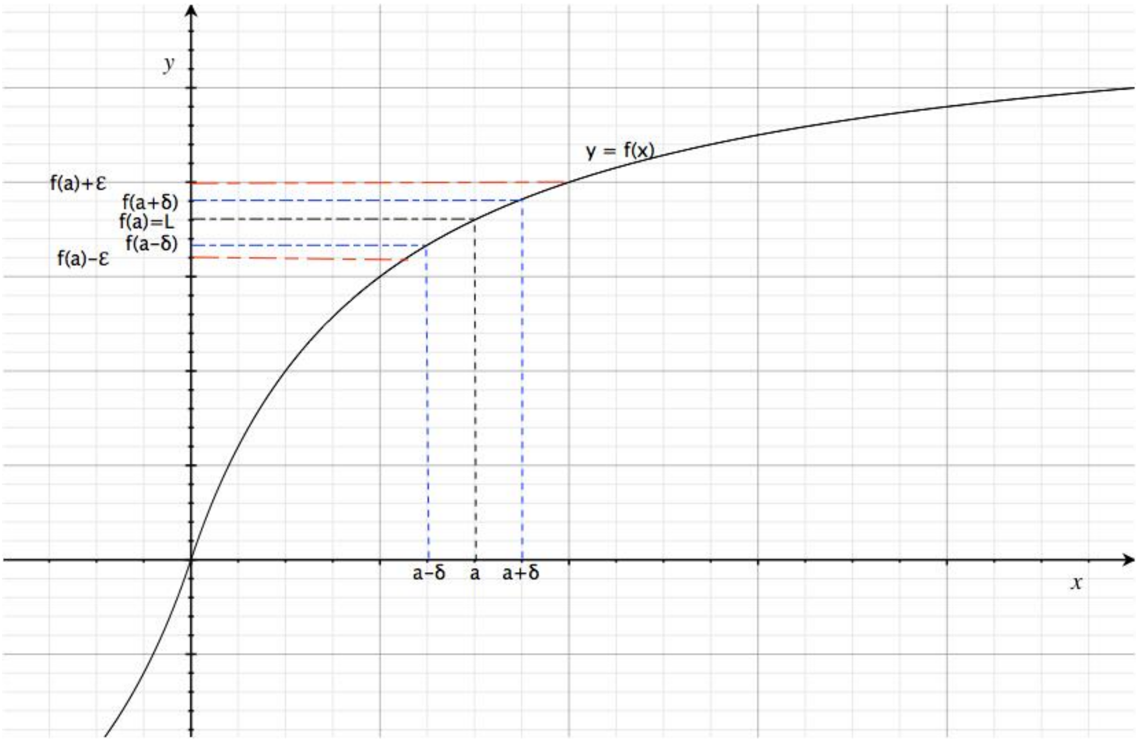
3. $\lim\limits_{x \to \infty} x^{\frac{1}{x}} =$

Ejercicios

1. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos x)^{\frac{1}{\cos x}} =$
2. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\text{tg } x} =$

3. $\lim\limits_{x \to 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} =$

2.6 Definición de límite



Def.:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L = f(a) \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : |x - a| < \delta \longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Coloquialmente diríamos que una función f(x) tiene por límite L = f(a) cuando x tiende a “a”, cuando para cualquier valor de x tan próximo a x = a se encontrará siempre un valor f(x) tan próximo a L = f(a) como se desee. Es decir, podremos elegir siempre una franja roja tan estrecha como queramos que por cada una de ellas tendremos siempre una franja azul en torno a x = a, de forma que sus valores estarán dentro de la franja roja, por tanto, se aproximarán a los de L.

Ejercicios

Calcula los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{3x^2-2x}}{\sqrt{x^2+4}} =$

2. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{2x^2-2x-4} =$

3. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{x+3}{x^2+1}\right)^{\frac{3}{x-2}} =$

4. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2+3}}{x^2+x-2} =$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{Ln}(1+x)}{x} =$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\mathrm{tg}x} - \frac{1}{\mathrm{sen}x} =$

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x \cdot \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{x}\right)\right) =$

8. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\mathrm{Ln}(1+e^x)}{x} =$

9. $\lim\limits_{x\to -\infty} xe^x =$

10. $\lim\limits_{x\to\infty} xe^x =$

11. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x-8}{2^{x+1}} =$

12. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{5+x}{3x+1}\right)^{-x+3} =$

13. $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{2\mathrm{tg}^3(x-\pi)}{3\big(\mathrm{sen}(x-\pi)\big)\cdot(1-\cos(x-\pi))} =$

14. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3(\sqrt{x}-1)^2}{(\mathrm{Ln}x^3)\cdot\mathrm{arcsen}(x-1)} =$ (prueba sumando y restando 1 dentro de la raíz)

15. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sqrt{x^4+1}-2}{x^4} =$

16. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} =$

17. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{2x^2+3x-2} - \sqrt{2x^2+5x-1} =$

18. $\lim_{x\to 0}(\text{cotg}x)^{\text{sen}x} =$

19. $\lim_{x\to 0} x^{\text{tg}x} =$

20. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\text{sen}x} =$

21. $\lim_{x\to \infty} \frac{x}{(\text{Ln}x)^3 + 2x} =$

22. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} (\text{tg}x - 1)\cdot \sec x =$

23. $\lim_{x\to 0} \frac{1 + \text{sen}x - e^x}{\text{arctg}x} =$

24. $\lim_{x\to \frac{\pi^+}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\cdot \text{tg}x =$

Ejercicios PAU

1. Resuelve el siguiente límite: $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{2x-3} - 1} =$ (Junio de 2013)
2. Resuelve el siguiente límite: $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\,x\,(1-\cos x)}{\ln^3 (x+1)} =$ (Junio de 2012)

Ficha de repaso del tema 2

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}^2 3x}{3x^2} =$ (Sol.: 1)

2. $\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - x}{\sqrt{x+9} - 3} =$ (Sol.: - 6)

3. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{\text{Ln}\, x} =$ (Sol.: 1)

4. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x} - e^{x}}{3 \,\text{sen}\, x} =$ (Sol.: - 2/3)

5. $\lim_{x \to 7} \frac{x^2 - 9x + 14}{\text{Ln}\,(x^2 - 6x - 6)} =$ (Sol.: 5/8)

6. $\lim_{x \to \infty} \frac{e^{x}}{\text{Ln}\,(x + 1)} =$ (Sol.: ∞)

7. $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{4x} - \frac{2}{xe^{x}}\right) =$ (Sol.: - ∞)

8. $\lim_{x \to \infty} \sqrt[x]{x^2 + 2} =$ (Sol.: 1)

9. $\lim_{x \to 0} (\cos x + \text{sen}\, x)^{\frac{1}{x}} =$ (Sol.: e)

10. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - x - \cos x}{\text{sen}^2 x} =$ (Sol.: 1)

11. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - e^{-x} - 2x}{x - \text{sen} x} =$ (Sol.: 1)

12. $\lim_{x \to 0} \frac{\text{Ln}\, x}{\text{cotg}\, x} =$ (Sol.: 1)

13. $\lim_{x \to 0} (e^{x} - x)^{\frac{1}{x}} =$ (Sol.: 1)

14. $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\text{Ln}\, x} - \frac{1}{x - 1}\right) =$ (Sol.: ½)

15. $\lim_{x \to 0} (\cos 2x)^{\text{sen}\, x^2} =$ (Sol.: e^{-2})

16. $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{1 - \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} x\right)}{\text{Ln}\,(4x^2)} =$ (Sol.: - π/4)

17. $\lim_{x \to 1} \frac{3 \,\text{arcsen}\,(x - 1)\left(\text{Ln}\, x^2\right)^3}{(1 - \cos(x - 1))^2} =$ (Sol.: 96)