Límites y continuidad

5

ACTIVIDADES

1. Página 114

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2}{x^2-1} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2}{x^2-1} = 1$$

2. Página 114

$$\left|\frac{3x}{x-5}-3\right| = \left|3\left(\frac{x}{x-5}-1\right)\right| = 3\left|\frac{5}{x-5}\right| < \varepsilon \to \frac{15}{|x-5|} < \varepsilon \to 15 < \varepsilon|x-5| \to |x-5| > \frac{15}{\varepsilon} \to x > \frac{15}{\varepsilon}+5$$

Para $\varepsilon = 0{,}001$:

$$x_0 = \frac{15}{0{,}001}+5 = 15005$$

Tomando $x = 15\,006$:

$$|f(15006)-3| \approx 0{,}00099 < 0{,}001$$

3. Página 115

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

4. Página 115

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $f(x) = x^2 - x + 1$

b) $f(x) = x - x^2$

c) $f(x) = x^2 + x - 4$

d) $f(x) = x^3 - x$

e) $f(x) = \cos x$

f) $f(x) = 1 - \operatorname{sen} 2x$

5. Página 116

a) $2 + (+\infty) = +\infty$

b) $2 + (-\infty) = -\infty$

c) $2 \cdot (+\infty) + (+\infty) = +\infty$

d) $2 \cdot (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$

6. Página 116

a) $2^{+\infty} + (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$

b) $2^{-\infty} + (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$

c) $(+\infty)^2 + (+\infty) = +\infty$

d) $(-\infty)^2 \cdot (+\infty) = +\infty$

7. Página 117

a) $\lim_{x\to+\infty}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to+\infty}f(x)+\lim_{x\to+\infty}g(x)=-8+\infty=+\infty$

b) $\lim_{x\to+\infty}[f(x):g(x)]=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x)\right):\left(\lim_{x\to+\infty}g(x)\right)=\frac{-8}{+\infty}=0$

c) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{\lim_{x\to+\infty}f(x)}=\sqrt[3]{-8}=-2$

d) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{g(x)}=\sqrt[4]{\lim_{x\to+\infty}g(x)}=\sqrt[4]{+\infty}=+\infty$

8. Página 117

a) $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-g(x)]=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)-\left(\lim_{x\to-\infty}g(x)\right)=-\infty-\frac{4}{9}=-\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty}[f(x)\cdot g(x)]=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to-\infty}g(x)\right)=(-\infty)\cdot\left(\frac{4}{9}\right)=-\infty$

c) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt[4]{f(x)}=\sqrt[4]{\lim_{x\to-\infty}f(x)}=\sqrt[4]{-\infty}$ (No existe en $\mathbb{R}$)

d) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{g(x)}=\sqrt{\lim_{x\to-\infty}g(x)}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$

9. Página 118

a) $\lim_{x\to+\infty}x^5=(+\infty)^5=+\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty}x^5=(-\infty)^5=-\infty$

c) $\lim_{x\to+\infty}x^{-5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^5}=\frac{1}{+\infty}=0$

d) $\lim_{x\to-\infty}x^{-5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^5}=\frac{1}{-\infty}=0$

e) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[5]{x}=\sqrt[5]{\lim_{x\to+\infty}x}=+\infty$

f) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt[5]{x}=\sqrt[5]{\lim_{x\to-\infty}x}=-\infty$

10. Página 118

a) $\lim_{x\to+\infty}5^x=5^{+\infty}=+\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty}5^x=5^{-\infty}=\frac{1}{5^{+\infty}}=\frac{1}{+\infty}=0$

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{-x}=\lim_{x\to+\infty}5^x=5^{+\infty}=+\infty$

d) $\lim_{x\to+\infty}5^{\frac{1}{x}}=5^{\frac{1}{+\infty}}=5^0=1$

e) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{5}\right)^x=\left(\sqrt{5}\right)^{+\infty}=+\infty$

f) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{+\infty}}=\left(\sqrt{5}\right)^0=1$

11. Página 119

a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+7}{x+13}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$

b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3-2x}{x^2+1}=\frac{-2}{1}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+x}{9+2x^2}=\frac{4}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=2$

d) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2-1\right)^2-x^2}{4-x^2}=\frac{1}{-1}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{x^2}=-\lim_{x\to+\infty}x^2=-\infty$

12. Página 119

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2-x+2}{5x-1}\right)^2=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2}{5x}\right)^2=\dfrac{9}{25}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4}{x^2}=\dfrac{9}{25}\cdot(+\infty)=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-2}{2x^2+15}\right)^{-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+15}{x^2-2}\right)^3=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2}{x^2}\right)^3=2^3\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^6}{x^6}=8\cdot1=8$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax^2-3x}{2x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax^2}{2x}=\dfrac{a}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=\begin{cases}+\infty & \text{si } a>0\\ -\infty & \text{si } a<0\end{cases}$

Si $a=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax^2-3x}{2x-1}=-\dfrac{3}{2}$

d) Si $a\neq-2$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{4x-(a+2)x^2}=\dfrac{1}{-(a+2)}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=-\dfrac{1}{a+2}$

Si $a=-2$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{4x-(a+2)x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{4x}=+\infty$

13. Página 120

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{2x+1}=\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+3}}=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+3}}=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-12x+9}{\sqrt[3]{x^5+5x-2}}=+\infty$

14. Página 120

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+x}{x}=1$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7x+\sqrt{3x-2}}{2x}=\dfrac{7}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-\sqrt{6+x}}{2x+4}=1$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+2x}{6x-3}=\dfrac{1}{2}$

15. Página 121

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+2x}{x-3}-\dfrac{3x^2-1}{1+3x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+3x^3+2x+6x^2-(3x^3-9x^2-x+3)}{x+3x^2-3-9x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{16x^2}{3x^2}\right)=\dfrac{16}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{4x^3+x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-(4x^3+x+1)}{\left(x+\sqrt{4x^3+x+1}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4x^3}{\left(\sqrt{4x^3}\right)}=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(4x^2+x+1-4x^2\right)}{\left(\sqrt{4x^2+x+1}+2x\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{4x}=\dfrac{1}{4}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2-(x^2-2x)}{\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\left(2\sqrt{x^2}\right)}=1$

16. Página 121

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+ax-x^2}{\sqrt{x^2+ax}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{\sqrt{x^2+ax}+x}=\frac{a}{2}=1\to a=2$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+bx-3}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+bx-3-4x^2}{\sqrt{4x^2+bx-3}+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{bx-3}{\sqrt{4x^2+bx-3}+2x}=\frac{b}{4}=-\frac{1}{4}\to b=-1$

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+7}-cx\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2+7-c^2x^2}{\sqrt{9x^2+7}+cx}=0\to c=3$

d) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{dx^2+x-5}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{dx^2+x-5-4x^2}{\sqrt{dx^2+x-5}+2x}=+\infty\to d>4$

17. Página 122

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x+3}\right)^{x+2}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x+3}-1\right)(x+2)}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+4}{x+3}\right)}=e^2$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2x}{x^2-1}\right)^{x+2}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2x}{x^2-1}-1\right)(x+2)}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2x^2+4x}{x^2-1}\right)}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(3-\frac{4x}{2x+1}\right)^{x-3}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(3-\frac{4x}{2x+1}-1\right)(x-3)}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{4x}{2x+1}\right)(x-3)}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{2x+1}\right)(x-3)}=e^1=e$

d) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3x^2-9}{6x^2+5}\right)^{2x+1}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3x^2-9}{6x^2+5}-1\right)(2x+1)}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-9}{6x^2+5}-\frac{1}{2}\right)(2x+1)}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-23}{12x^2+10}\right)(2x+1)}=e^0=1$

18. Página 122

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-5}\right)^{\frac{x^2}{2-x}}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-5}-1\right)\left(\frac{x^2}{2-x}\right)}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{8}{x^2-5}\right)\left(\frac{x^2}{2-x}\right)}=e^0=1$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-5}\right)^{\frac{x^3}{2-x}}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-5}-1\right)\left(\frac{x^3}{2-x}\right)}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{8}{x^2-5}\right)\left(\frac{x^3}{2-x}\right)}=e^{-8}=\frac{1}{e^8}$

c) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^2+3x}{7+3x^2}\right)^{\frac{x^4+x}{x^3-1}}=e^{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^2+3x}{7+3x^2}-1\right)\left(\frac{x^4+x}{x^3-1}\right)}=e^{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-7}{7+3x^2}\right)\left(\frac{x^4+x}{x^3-1}\right)}=e^1=e$

d) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^2+3x}{7+3x^2}\right)^{\frac{x^2+x}{x^3-1}}=e^{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^2+3x}{7+3x^2}-1\right)\left(\frac{x^2+x}{x^3-1}\right)}=e^{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-7}{7+3x^2}\right)\left(\frac{x^2+x}{x^3-1}\right)}=e^0=1$

19. Página 123

a) $\lim_{x\to0^-}f(x)=1$ b) $\lim_{x\to0^+}f(x)=3$

20. Página 123

a) $\lim_{x\to-1^-}f(x)=0$ c) $\lim_{x\to3^-}f(x)=+\infty$

b) $\lim_{x\to-1^+}f(x)=2$ d) $\lim_{x\to3^+}f(x)=-2$

21. Página 124

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{2}{-1}=-2$

b) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\dfrac{-2+2}{4-1}=0$

c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\dfrac{3}{0}=\infty \to \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty\end{array}\right\}\to$ No existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

d) $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}} f(x)=\dfrac{\sqrt{2}+2}{1}=\sqrt{2}+2$

22. Página 124

a) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\dfrac{1}{0}=\infty \to \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=+\infty\end{array}\right\}\to$ No existe $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

b) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=1+\sqrt{4}=3$

c) $\lim\limits_{x\to 9} f(x)=1+\sqrt{9}=4$

d) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} (x+1)^{-1}=\dfrac{1}{1}=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} \left(1+\sqrt{x}\right)=1+0=1\end{array}\right\}\to \lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

23. Página 125

a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x^2+2x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{0}=\infty\to \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{1}{x+1}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{1}{x+1}=+\infty\end{array}\right\}\to$ No existe $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x^2+2x+1}$.

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{(x-2)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+6x^2+12x+8}{x^3-2x^2-4x+8}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x^2+4x+4)}{(x+2)(x^2-4x+4)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4x+4}=\dfrac{0}{16}=0$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x^2+2x}{x^2-4x+4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2-x)}{(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-x)}{(x-2)}=\dfrac{2}{0}=\infty\to \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x^2-x)}{(x-2)}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(x^2-x)}{(x-2)}=+\infty\end{array}\right\}\to$ No existe $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x^2+2x}{x^2-4x+4}$.

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2-x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x-1}{x+1}=\dfrac{-1}{2}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x^2+3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x(x+3)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{x+3}=\dfrac{2}{3}$

24. Página 125

a) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}}{1-x}\to\frac{0}{0}$ $\quad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^{1/2}}{-(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{-\sqrt{(x-1)}}=\frac{1}{0}=\infty\to \left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{-\sqrt{(x-1)}}\to \text{No existe}\\ \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{-\sqrt{(x-1)}}=-\infty\end{array}\right\}\to \text{No existe } \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}}{1-x}.$

b) $\lim_{x\to -2}\frac{2+x}{\sqrt{4-x^2}}\to\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to -2}\frac{2+x}{\sqrt{4-x^2}}=\lim_{x\to -2}\frac{2+x}{\sqrt{2+x}\sqrt{2-x}}=\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x}}=\frac{0}{2}=0$$

c) $\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{\sqrt{x-3}}\to\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{\sqrt{x-3}}=-\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)^{1/2}}=-\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-3)^{1/2}}{(x-3)}=-\lim_{x\to 3}(x-3)^{1/2}=0$$

d) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-9}}{3x-x^2}\to\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-9}}{3x-x^2}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+3}\sqrt{x-3}}{-x(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+3}}{-x\sqrt{x-3}}=\frac{\sqrt{6}}{0}=\infty\to \left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 3^-}\frac{\sqrt{x+3}}{-x\sqrt{x-3}}\to \text{No existe}\\ \lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x+3}}{-x\sqrt{x-3}}=-\infty\end{array}\right\}\to \text{No existe } \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-9}}{3x-x^2}.$$

e) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{1-x^2}\to\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{(1+x)(1-x)}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{(1+x)\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{(1+x)\left(1+\sqrt{x}\right)}=-\frac{1}{4}$$

f) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{\sqrt{x-2}}\to\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{\sqrt{x-2}}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{(x-2)^{1/2}}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)^{1/2}}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)(x-2)^{1/2}}{(x-2)}=\lim_{x\to 2}(x+1)(x-2)^{1/2}=0$$

25. Página 126

$\nexists\, f(-2)=\frac{1}{0}\ \to$ La función no es continua en $x=-2$.

$\nexists\, f(2)=\frac{5}{0}\ \to$ La función no es continua en $x=-2$.

26. Página 126

Expresamos la función como una función definida a trozos: $f(x)=\begin{cases}-2(x+1) & \text{si}\quad x\le -1\\ 2(x+1) & \text{si}\quad 1<x\end{cases}$

$f(-1)=2(-1+1)=0\to$ Existe $f(-1)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to -1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^-}-2(x+1)=0\\ \lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}2(x+1)=0\end{array}\right\}\to \lim_{x\to -1}f(x)=0$$

$f(-1)=0=\lim_{x\to -1}f(x)\to$ La función es continua en $x=-1$.

27. Página 127

Si $x < 0 \rightarrow f(x) = 1 - x^2 \rightarrow f(x)$ es continua en $(-\infty, 0)$.

Si $0 < x < 2 \rightarrow f(x) = \sqrt{4x-1} \rightarrow f(x)$ no está definida en $\left(0, \frac{1}{4}\right)$. Es continua en $\left(\frac{1}{4}, 2\right)$.

Si $x > 2 \rightarrow f(x) = x + 1 \rightarrow f(x)$ es continua en $(2, +\infty)$.

Si $x = 0 \rightarrow f(0) = 1 - 0 = 1 \rightarrow$ Existe $f(0)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (1-x^2) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{4x-1} \rightarrow \text{ No existe} \end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x\to 0} f(x).$$

La función no es continua en $x = 0$.

Si $x = 2 \rightarrow f(2) = 2 + 1 = 3 \rightarrow$ Existe f(2).

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \sqrt{4x-1} = \sqrt{7} \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} x+1 = 3 \end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x\to 2} f(x).$$

La función no es continua en $x = 2$.

28. Página 127

Si $x < 3 \rightarrow f(x) = x^2 - 4 \rightarrow f(x)$ es continua en $(-\infty, 3)$.

Si $x > 3 \rightarrow f(x) = \frac{x+m}{x} \rightarrow f(x)$ es continua en $(3, +\infty)$.

Si $x = 3 \rightarrow f(3) = 9 - 4 = 5 \rightarrow$ Existe $f(3)$.

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (x^2-4) = 5 \qquad \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{x+m}{x} = 1 + \frac{m}{3}$$

$f(x)$ es continua en $x = 3$ si:

$$f(3) = 5 = \lim_{x\to 3} f(x) \rightarrow 5 = 1 + \frac{m}{3} \rightarrow m = 12$$

SABER HACER

29. Página 128

$$\lim_{t\to +\infty} \frac{2t}{1+t^2} = 0 \rightarrow$$ Cuando pasan muchos años, los beneficios se reducen a cero.

30. Página 128

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+ax+1} - x\right) \rightarrow (+\infty - \infty) \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+ax+1} - x\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{ax+1}{\sqrt{x^2+ax+1}+x} = \frac{a}{2}$$

$$\frac{a}{2} = 2 \rightarrow a = 4$$

31. Página 128

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^4+ax^3}{2+x^4}\right)^{\frac{3x^3+1}{x^2-2}}\to 1^{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^4+ax^3}{2+x^4}\right)^{\frac{3x^3+1}{x^2-2}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^4+ax^3}{2+x^4}-1\right)\left(\frac{3x^3+1}{x^2-2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{ax^3-2}{2+x^4}\right)\left(\frac{3x^3+1}{x^2-2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3ax^6}{x^6}}=e^{3a}$$

$$e^{3a}=e^3\to a=1$$

32. Página 129

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-e^{3x}+7e^{-5x}}{2e^{-5x}-4e^{3x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{-e^{3x}+7e^{-5x}}{e^{3x}}}{\dfrac{2e^{-5x}-4e^{3x}}{e^{3x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1+7e^{-8x}}{2e^{-8x}-4}=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-e^{3x}+7e^{-5x}}{2e^{-5x}-4e^{3x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{-e^{3x}+7e^{-5x}}{e^{-5x}}}{\dfrac{2e^{-5x}-4e^{3x}}{e^{-5x}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-e^{8x}+7}{2-4e^{8x}}=\frac{7}{2}$$

33. Página 129

$$\lim_{x\to-\frac{1}{5}}2^{\frac{2x}{5x^2+x}}=\lim_{x\to-\frac{1}{5}}2^{\frac{2}{5x+1}}=2^{\infty}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\frac{1}{5}^-}\dfrac{2x}{5x^2+x}=\lim\limits_{x\to-\frac{1}{5}^-}\dfrac{2}{5x+1}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\frac{1}{5}^+}\dfrac{2x}{5x^2+x}=\lim\limits_{x\to-\frac{1}{5}^+}\dfrac{2}{5x+1}=+\infty\end{array}\right\}\to \text{No existe }\lim_{x\to-\frac{1}{5}}\frac{2x}{5x^2+x}\to \text{No existe }\lim_{x\to-\frac{1}{5}}2^{\frac{2x}{5x^2+x}}.$$

34. Página 129

a) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{5x-25}{\sqrt{x-1}-2}\to\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to5}\frac{5x-25}{\sqrt{x-1}-2}=\lim_{x\to5}\frac{5(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{x-5}=\lim_{x\to5}5\left(\sqrt{x-1}+2\right)=20$$

b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-x+1}{\sqrt{2-x}-1}\to\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to1}\frac{-x+1}{\sqrt{2-x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{-(1-x)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}{1-x}=\lim_{x\to1}\left[-\left(\sqrt{2-x}+1\right)\right]=-2$$

c) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{\sqrt{3-x}-2}\to\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{\sqrt{3-x}-2}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{3-x}+2\right)}{-x-1}=\lim_{x\to-1}\left[-\left(\sqrt{3-x}+2\right)\right]=-4$$

d) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{2x-10}{\sqrt{2x-6}-4}=\lim\limits_{x\to5}\dfrac{0}{-2}=0$

35. Página 130

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-ax+6}{x^3-4x^2-4x+16}=\frac{14-2a}{0}$$

Si $a>7$ entonces:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^3-ax+6}{x^3-4x^2-4x+16}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^3-ax+6}{x^3-4x^2-4x+16}=+\infty\end{array}\right\}\to \text{No existe } \lim_{x\to 2} f(x).$$

Si $a<7$ entonces:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^3-ax+6}{x^3-4x^2-4x+16}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^3-ax+6}{x^3-4x^2-4x+16}=-\infty\end{array}\right\}\to \text{No existe } \lim_{x\to 2} f(x).$$

Si $a=7$ entonces:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-7x+6}{x^3-4x^2-4x+16}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x-3)}{(x-2)(x^2-2x-8)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x-8}=-\frac{5}{8}$$

36. Página 130

$f(-1)=(-1)^2+4\cdot(-1)-1=-4\to$ Existe $f(-1)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} 3x-2=-5\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} x^2+4x-1=-4\end{array}\right\}\to \lim_{x\to -1^-} f(x)\neq \lim_{x\to -1^+} f(x)\to \text{No existe } \lim_{x\to -1} f(x)\to f(x) \text{ es discontinua en } x=-1.$$

37. Página 131

Si $x<0\to f(x)=ax^2+b$

Por ser una función polinómica, es continua en $\mathbb{R}$ y, por tanto, en el intervalo $(-\infty, 0)$.

Si $0\le x<1\to f(x)=x-a$

Por ser una función polinómica, es continua en $\mathbb{R}$ y, por tanto, en el intervalo (0, 1).

Si $x\ge 1\to f(x)=\dfrac{a}{x}+b$

Es una función racional. No está definida en $x=0$. Es continua en $(1, +\infty)$.

Para $x=0\to f(0)=-a$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(ax^2+b)=b$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x-a)=-a$

Para $x=1\to f(1)=a+b$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x-a)=1-a$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{a}{x}+b\right)=a+b$

Para $x=0$ $\quad f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\to b=-a$

Para $x=1$ $\quad f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\to a+b=1-a$

$$\left.\begin{array}{l}b=-a\\ a+b=1-a\end{array}\right\}\to 0=1-a\to a=1;\ b=-1$$

38. Página 131

$P(t)=t^2 \longrightarrow$ Función polinómica $\longrightarrow P(t)$ es continua en (0, 5).

$P(t)=\dfrac{50t-62,5}{0,5t+5} \longrightarrow$ Definida en $\mathbb{R}-\{-10\} \longrightarrow P(t)$ es continua en $(5,+\infty)$.

$P(5)=25$

$\left.\begin{matrix}\lim\limits_{t\to 5^-} P(t)=25\\ \lim\limits_{t\to 5^+} P(t)=25\end{matrix}\right\} \to \lim\limits_{t\to 5} P(t)=25=P(5) \to$ $P(t)$ es continua en $t=5$.

Luego la función es continua en $(0,+\infty)$.

ACTIVIDADES FINALES

39. Página 132

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=1$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=+\infty$

40. Página 132

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^5=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2}=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^2}=+\infty$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^4}=0$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^4}=0$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} 5^x=+\infty$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty} 5^x=0$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^x=0$

j) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^x=+\infty$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} 4^{x^2}=+\infty$

l) $\lim\limits_{x\to-\infty} 4^{x^2}=+\infty$

41. Página 132

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{x-3}=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+1}{x-3}=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+1}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-x^6}{3x^2+2x-1}=-\infty$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-x^6}{3x^2+2x-1}=-\infty$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-x^4}{-x^4+2x^2-5}=1$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-x^4}{-x^4+2x^2-5}=1$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2x+3}{-x^3-3x^2-5}=0$

j) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-2x+3}{-x^3-3x^2-5}=0$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{16}{x-2}=0$

l) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{16}{x-2}=0$

42. Página 132

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x+3}{2x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x}=0$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x+3}{2x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x}=0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^2+3}{2x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^2}{2x^2}=2$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^2+3}{2x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^2}{2x^2}=2$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^3+3}{2x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x}{2}=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^3+3}{2x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x}{2}=-\infty$

43. Página 132

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+2}}{\frac{1}{2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-3}{\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\frac{1}{2}\left(2\sqrt{x^2}\right)}=2$$

44. Página 132

a) $\lim_{x\to+\infty}(0,7)^{3x+2}=(0,7)^{+\infty}=0$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(2x-0,01x^2\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-0,01x^2\right)=-\infty$

c) $\lim_{x\to+\infty}(3x-7)^{2-x}=\lim_{x\to+\infty}(3x)^{-x}=0$

d) $\lim_{x\to+\infty}\left((x-2)^2-x^2\right)=\lim_{x\to+\infty}(-4x+4)=-\infty$

45. Página 132

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-6x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{\left(x+\sqrt{x^2-6x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{\left(x+\sqrt{x^2}\right)}=\frac{6}{2}=3$

b) $\lim_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2-6x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{6x}{\left(x+\sqrt{x^2-6x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{6x}{\left(x+\sqrt{x^2}\right)}=\frac{6}{2}=3$

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-\sqrt{x^2-6x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4-x^2+6x}{x^2+\sqrt{x^2-6x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{x^2}=+\infty$

d) $\lim_{x\to-\infty}\left(x^2-\sqrt{x^2-6x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4-x^2+6x}{x^2+\sqrt{x^2-6x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4}{x^2}=+\infty$

46. Página 132

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4+2x^2}-x^2\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{\sqrt{x^4+2x^2}+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{\sqrt{x^4}+x^2}=1$

b) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^4+2x^2}-x^2\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{\sqrt{x^4+2x^2}+x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{\sqrt{x^4}+x^2}=1$

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x^2\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x-x^4}{\sqrt{x^2+3x}+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^4}{2x^2}=-\infty$

d) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x^2\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x-x^4}{\sqrt{x^2+3x}+x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^4}{2x^2}=-\infty$

47. Página 132

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x-1}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x}\right)(x-1)}=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-3}{x}}=e^3$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{x-1}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{3}{x}\right)(x-1)}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{3x-3}{x}\right)}=e^{-3}=\frac{1}{e^3}$

c) $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{1-x}=e^{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{x}\right)(1-x)}=e^{\lim_{x\to-\infty}\frac{3-3x}{x}}=e^{-3}=\frac{1}{e^3}$

d) $\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{1-x}=e^{\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{3}{x}\right)(1-x)}=e^{\lim_{x\to-\infty}\frac{-3+3x}{x}}=e^3$

48. Página 132

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{x^2+x}}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x+2}{2\left(\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2+x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x}{2\left(2\sqrt{x^2}\right)}=-1$$

49. Página 132

a) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^4+2x^3-5}-\sqrt{x^4-3x}}{x+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-5+3x}{(x+4)\left(\sqrt{x^4+2x^3-5}+\sqrt{x^4-3x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x\left(2\sqrt{x^4}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x\left(2\sqrt{x^4}\right)}=1$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2-3}}=2$$

50. Página 132

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4+3x^2-2}-x^2+3\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4+3x^2-2}-(x^2-3)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2-11}{\sqrt{x^4+3x^2-2}+(x^2-3)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2}{2x^2}=\frac{9}{2}$$

51. Página 132

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{8}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}}{\dfrac{4}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)}{4\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\left(2\sqrt{x}\right)}{\left(2\sqrt{x}\right)}=2$$

52. Página 132

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+1}{x^2-3x}-\frac{x^2+2x}{x-3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-3-2x^3+6x^2}{(x^2-3x)(x-3)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^3}{x^3}=-2$$

53. Página 132

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x+\sqrt{2x}}-\sqrt{2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x+\sqrt{2x}}+\sqrt{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x}}{2\sqrt{2x}}=\frac{1}{2}$$

54. Página 132

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-8}-\sqrt{x^2+mx+7}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(3-m)x-15}{\sqrt{x^2+3x-8}+\sqrt{x^2+mx+7}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(3-m)x}{2\sqrt{x^2}}=\frac{3-m}{2}=-1\Rightarrow m=5$$

55. Página 132

a) $$\lim_{x\to+\infty}\left(2x^2-\sqrt{4x^4+mx^2-5}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-mx^2+5}{2x^2+\sqrt{4x^4+mx^2-5}}=\frac{-m}{4}=2\to m=-8$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+4x}-3x+m\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+4x}-(3x-m)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2+4x-(9x^2-6mx+m^2)}{\sqrt{9x^2+4x}+(3x-m)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(4+6m)x}{6x}=\frac{4+6m}{6}=\frac{1}{2}\to m=-\frac{1}{6}$$

56. Página 132

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3+2x}{1+2x}\right)^{x-6}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{1+2x}\right)(x-6)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-12}{1+2x}\right)}=e^1=e$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x}\right)^{\frac{x}{2}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-6x+2}{x^2+3x}\right)\left(\frac{x}{2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-6x^2}{2x^2}\right)}=e^{-3}=\frac{1}{e^3}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3-3x}{1+2x^3}\right)^{\frac{x^2-3}{3}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x-1}{1+2x^3}\right)\left(\frac{x^2-3}{3}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x^3}{6x^3}\right)}=e^{\frac{-1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+4x}{4x+7}\right)^{\frac{x^3+1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-6}{4x+7}\right)\left(\frac{x^3+1}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-6x^3}{4x^2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x}{2}\right)}=e^{-\infty}=0$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+6}{6x+3x^2}\right)^{-\frac{x}{4}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{6-6x}{6x+3x^2}\right)\left(-\frac{x}{4}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{6x^2}{12x^2}\right)}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^4-2}{(2x^2-1)^2+1}\right)^{\frac{x^3-3x}{x+2}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2-4}{4x^4-4x^2+2}\right)\left(\frac{x^3-3x}{x+2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^5}{4x^5}\right)}=e^1=e$

57. Página 133

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+3}{mx+2x^2}\right)^{x+2}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{+3-mx}{mx+2x^2}\right)(x+2)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-mx^2}{2x^2}\right)}=\frac{1}{e}\to\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-mx^2}{2x^2}\right)=-1\to m=2$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+3}{2+5x}\right)^{\frac{x^2-2}{8+mx}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2+5x}\right)\left(\frac{x^2-2}{8+mx}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{5mx^2}\right)}=e^{\frac{1}{5m}}=\frac{7}{10}\to\frac{1}{5m}=\ln\left(\frac{7}{10}\right)\to m=\frac{1}{5\ln\left(\frac{7}{10}\right)}$

58. Página 133

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^x+10}{3^{x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3^x}{3^{x+1}}+\frac{10}{3^{x+1}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{10}{3^{x+1}}\right)=\frac{1}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^{x+1}}{3^x+10}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^{x+1}}{3^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^x\cdot 3}{3^x}=3$

59. Página 133

a) $f(x)=\begin{cases}-x-2 & \text{si } x<-2\\ x+2 & \text{si } -2\le x\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x-2)=+\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)=+\infty$

b) $f(x)=\begin{cases}x-(3-2x) & \text{si } x<\frac{3}{2}\\ x-(-3+2x) & \text{si } x\ge\frac{3}{2}\end{cases}\to f(x)=\begin{cases}3x-3 & \text{si } x<\frac{3}{2}\\ -x+3 & \text{si } x\ge\frac{3}{2}\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(3x-3)=-\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+3)=-\infty$

c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+3}{x-2} & \text{si } x<-\dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{2x+3}{x-2} & \text{si } -\dfrac{3}{2}\leq x<2 \\ \dfrac{2x+3}{x-2} & \text{si } x>2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+3}{x-2}=2$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{x-2}=2$

d) $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x-3}{1-x} & \text{si } x<1 \\ \dfrac{x-3}{1-x} & \text{si } 1<x<3 \\ -\dfrac{x-3}{1-x} & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{x-3}{1-x}\right)=1$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{x-3}{1-x}\right)=1$

60. Página 133

a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-1$

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$

d) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=0$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

61. Página 133

a) $\lim\limits_{x\to -3} g(x)=0{,}7$

b) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$

c) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=-2{,}9$

d) $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=0$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$

62. Página 133

a) $\lim\limits_{x\to 1} 2^{\ln x}=2^{\ln 1}=2^0=1$

b) $\lim\limits_{x\to e} 2^{\ln x}=2^{\ln e}=2^1=2$

c) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{e}} 2^{\ln x}=2^{\ln\frac{1}{e}}=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to 2} 3^{\ln(x-1)}=3^{\ln 1}=3^0=1$

e) $\lim\limits_{x\to e+1} 3^{\ln(x-1)}=3^{\ln e}=3^1=3$

f) $\lim\limits_{x\to \frac{e+1}{e}} 3^{\ln(x-1)}=3^{\ln\left(\frac{e+1-e}{e}\right)}=3^{\ln\left(\frac{1}{e}\right)}=3^{-1}=\dfrac{1}{3}$

63. Página 133

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2-3}}=\dfrac{4+1}{\sqrt{4-3}}=5$

b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2-3}}=\dfrac{-4+1}{\sqrt{4-3}}=-3$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2-3}}=\dfrac{6+1}{\sqrt{9-3}}=\dfrac{7}{\sqrt{6}}$

64. Página 133

a) $\lim\limits_{x\to 4}(\log_2(x-3)+1)=\log_2 1+1=0+1=1$

b) $\lim\limits_{x\to 11}(\log_2(x-3)+1)=\log_2(8)+1=3+1=4$

c) $\lim\limits_{x\to \frac{7}{2}}(\log_2(x-3)+1)=\log_2\left(\dfrac{1}{2}\right)+1=-1+1=0$

d) $\lim\limits_{x\to \frac{13}{4}}(\log_2(x-3)+1)=\log_2\left(\dfrac{1}{4}\right)+1=-2+1=-1$

65. Página 133

a) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{x-2}+\log_{\frac{1}{2}}x\right)=\frac{1}{\frac{-7}{4}}+\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}=-\frac{4}{7}+2=\frac{10}{7}$

b) $\lim\limits_{x\to 8}\left(\frac{1}{x-2}+\log_{\frac{1}{2}}x\right)=\frac{1}{6}+\log_{\frac{1}{2}}8=\frac{1}{6}-3=-\frac{17}{6}$

66. Página 133

$$\lim_{x\to 0}\frac{6x-12}{x^2-3x-4}=3$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{6x-12}{x^2-3x-4}=\frac{-18}{0}\to\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=+\infty\end{array}\right\}\to \text{No existe } \lim_{x\to -1}f(x).$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{6x-12}{x^2-3x-4}=1$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{6x-12}{x^2-3x-4}=\frac{12}{0}\to\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 4^-}f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 4^+}f(x)=+\infty\end{array}\right\}\to \text{No existe } \lim_{x\to 4}f(x).$$

67. Página 133

a) $\lim\limits_{x\to 5}(m(x)+n(x)+p(x))=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 5}(m(x)\cdot n(x)-p(x))=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 5}(m(x)\cdot p(x))=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{n(x)}{m(x)}=0$

e) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{m(x)}{n(x)}=\frac{4}{0}\to$ Indeterminación

f) $\lim\limits_{x\to 5}(n(x)\cdot p(x))=0\cdot(+\infty)\to$ Indeterminación

g) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{p(x)}{m(x)}=+\infty$

h) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{n(x)}{p(x)}=0$

i) $\lim\limits_{x\to 5}(m(x))^{n(x)}=1$

j) $\lim\limits_{x\to 5}(m(x))^{p(x)}=+\infty$

k) $\lim\limits_{x\to 5}(n(x))^{p(x)}=0$

l) $\lim\limits_{x\to 5}(p(x))^{n(x)}=(+\infty)^0\to$ Indeterminación

68. Página 133

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=1$ $\quad\lim\limits_{x\to -2^-}f(x)=-\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to -2^+}f(x)=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=1$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}g(x)=0$ $\quad\lim\limits_{x\to -2^-}g(x)=-\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to 1^-}g(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty}g(x)=0$ $\quad\lim\limits_{x\to -2^+}g(x)=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to 1^+}g(x)=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty}h(x)=-\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to -2^-}h(x)=-\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to -2^+}h(x)=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to +\infty}h(x)=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty}m(x)=-\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to 1^-}m(x)=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to 1^+}m(x)=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to +\infty}m(x)=+\infty$

69. Página 134

a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -1$ b) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = 3$ c) $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = 5$

70. Página 134

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-2x+1}{x-3} = -1$

b) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2-2x+1}{x-3} = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-9} = -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2+x-6}{x^3-x^2-8x+12} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-2)^2(x+3)} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$

e) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-2x+1}{x-3} = -1$

f) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-2x+1}{x-3} = +\infty$

g) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-9} = +\infty$

h) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2+x-6}{x^3-x^2-8x+12} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-2)^2(x+3)} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$

71. Página 134

a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{x^2+2x+1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+1)^2} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+2}{x+1} = \dfrac{1}{0} = \infty \rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x+2}{x+1} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x+2}{x+1} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{x^2+2x+1}.$

b) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{2x-1}{4x^2-4x+1} = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{1}{2x-1} = \dfrac{1}{0} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^-} \dfrac{1}{2x-1} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^+} \dfrac{1}{2x-1} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{2x-1}{4x^2-4x+1}.$

c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{(x-3)^2} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x+3)(x-3)}{(x-3)^2} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+3}{x-3} = \dfrac{6}{0} = \infty \rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x+3}{x-3} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x+3}{x-3} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{(x-3)^2}.$

d) $\lim\limits_{x\to \frac{5}{3}} \dfrac{3x^2+x-10}{9x^2-30x+25} = \lim\limits_{x\to \frac{5}{3}} \dfrac{(3x-5)(x+2)}{(3x-5)^2} = \lim\limits_{x\to \frac{5}{3}} \dfrac{x+2}{3x-5} = \dfrac{\frac{11}{3}}{0} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to \frac{5}{3}^-} \dfrac{x+2}{3x-5} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to \frac{5}{3}^+} \dfrac{x+2}{3x-5} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x\to \frac{5}{3}} \dfrac{3x^2+x-10}{9x^2-30x+25}.$

72. Página 134

a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+3)} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+2}{x+3} = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{2x-1}{x-2x^2} = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{2x-1}{-x(2x-1)} = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{1}{-x} = -2$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2+x}{2x^3-x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-1)^2}{(x-1)^2(2x+3)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{(2x+3)}=\dfrac{1}{5}$

d) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{x^2-x-6}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-(x+3)(x-3)}{(x-3)(x+2)}=-\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+3}{x+2}=-\dfrac{6}{5}$

e) $\lim\limits_{x\to \frac{5}{3}}\dfrac{3x^2+x-10}{9x-15}=\lim\limits_{x\to \frac{5}{3}}\dfrac{(3x-5)(x+2)}{3(3x-5)}=\lim\limits_{x\to \frac{5}{3}}\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{11}{9}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^3}{x^3-2x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^3}{x^3(1-2x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5}{1-2x}=5$

73. Página 134

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x(x-2)}{(x-2)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{x-3}=-2$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-1)^2-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x-2)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-2}{x}=\dfrac{-2}{0}=\infty\to\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x-2}{x}=+\infty,\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-2}{x}=-\infty\end{array}\right\}\to$ No existe $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-1)^2-1}{x^2}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x-3x^2}{3x+x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(4-3x)}{x(3+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4-3x}{3+x}=\dfrac{4}{3}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2+x}-\dfrac{1}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{-x}{4+2x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{4+2x}=-\dfrac{1}{4}$

e) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}\cdot\dfrac{x^2-4}{x^3-3}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(x^3-3)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x^3-3}=\dfrac{4}{5}$

f) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x-1}{x-3}-\dfrac{x+5}{x^2-4x+3}\right)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-1)^2-x-5}{(x-3)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x-4}{(x-3)(x-1)}=\dfrac{-4}{0}=\infty\to$

$\to\left.\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2-3x-4}{(x-3)(x-1)}=+\infty,\ \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-3x-4}{(x-3)(x-1)}=-\infty\right\}\to$ No existe $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x-1}{x-3}-\dfrac{x+5}{x^2-4x+3}\right)$.

74. Página 134

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{3x-3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{3(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{3\left(\sqrt{x}+1\right)}=\dfrac{1}{6}$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{x+2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{x+2}+2\right)=4$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}=0$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{4-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x\left(2+\sqrt{4-x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2+\sqrt{4-x}}=\dfrac{1}{4}$

e) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-6}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2(x-3)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\left(2\sqrt{x}+2\sqrt{3}\right)=4\sqrt{3}$

f) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1-\sqrt{x-2}}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-(x-3)}{(x+3)(x-3)\left(1+\sqrt{x-2}\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-1}{(x+3)\left(1+\sqrt{x-2}\right)}=-\dfrac{1}{12}$

75. Página 134

a) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{\sqrt{2x+1}-3}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x+4)(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{2(x-4)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x+4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{2}=24$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+5}{8x-\sqrt{9x^2+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5(x+1)\left(8x+\sqrt{9x^2+1}\right)}{55x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{55x^2}{55x^2}=1$

c) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1-\sqrt{x-3}}{x^2-16}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{-(x-4)}{(x+4)(x-4)\left(1+\sqrt{x-3}\right)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{-1}{(x+4)\left(1+\sqrt{x-3}\right)}=-\dfrac{1}{16}$

d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1-x^2}{\sqrt{x+1}}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-(x+1)(x-1)\sqrt{x+1}}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\left[(1-x)\sqrt{x+1}\right]=0$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2x}{x\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2}{\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}=-1$

f) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{2(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{2(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x+5}+3}{2\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\dfrac{3}{4}$

g) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{13-4x}-\sqrt{28+x}}{\sqrt{x+3}}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{-5(x+3)}{\sqrt{x+3}\left(\sqrt{13-4x}+\sqrt{28+x}\right)}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{-5(x+3)\sqrt{x+3}}{(x+3)\left(\sqrt{13-4x}+\sqrt{28+x}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{-5\sqrt{x+3}}{\sqrt{13-4x}+\sqrt{28+x}}=0$

h) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}\sqrt{x-2}}{x\sqrt{x-2}}=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sqrt{x+2}}{x}\right)=1$

76. Página 134

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-3x^2-11x+6}{x^3+x^2-8x-12}=\dfrac{-6}{-18}=\dfrac{1}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^3-3x^2-11x+6}{x^3+x^2-8x-12}=\dfrac{12}{-4}=-3$

c) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^3-3x^2-11x+6}{x^3+x^2-8x-12}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)\left(2x^2-7x-3\right)}{(x+2)^2(x-3)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2-7x-3}{(x+2)(x-3)}=\dfrac{19}{0}=\infty\to$

$\to\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{2x^2-7x-3}{(x+2)(x-3)}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{2x^2-7x-3}{(x+2)(x-3)}=-\infty\end{array}\right\}\to \text{No existe } \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^3-3x^2-11x+6}{x^3+x^2-8x-12}$

d) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^3-3x^2-11x+6}{x^3+x^2-8x-12}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x+2)(x-3)(2x-1)}{(x+2)^2(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-1}{x+2}=1$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^3-3x^2-11x+6}{x^3+x^2-8x-12}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^3}{x^3}=2$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^3-3x^2-11x+6}{x^3+x^2-8x-12}=2$

77. Página 134

a) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-x}{\sqrt{x^2+3}-2x^2}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x(x+1)(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2x^2\right)}{x^2+3-4x^4}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x(x+1)(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2x^2\right)}{(x-1)(x+1)\left(-4x^2-3\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x\left(\sqrt{x^2+3}+2x^2\right)}{-4x^2-3}=\frac{4}{7}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x}{\sqrt{x^2+3}-2x^2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x(x+1)(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2x^2\right)}{x^2+3-4x^4}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x(x+1)(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2x^2\right)}{(x-1)(x+1)\left(-4x^2-3\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x\left(\sqrt{x^2+3}+2x^2\right)}{-4x^2-3}=-\frac{4}{7}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3-x}{\sqrt{x^2+3}-2x^2}=\frac{0}{\sqrt{3}}=0$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-x}{\sqrt{x^2+3}-2x^2}=\frac{6}{\sqrt{7}-8}=\frac{6\left(\sqrt{7}+8\right)}{-57}=-\frac{2\sqrt{7}+16}{19}$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^3-x}{\sqrt{x^2+3}-2x^2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^3}{-2x^2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x}{-2}=-\infty$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^3-x}{\sqrt{x^2+3}-2x^2}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^3}{-2x^2}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x}{-2}=+\infty$

78. Página 134

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[6]{x}=0$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[6]{x}}=\frac{1}{0}=\infty\to\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt[6]{x}}\to \text{No existe}\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt[6]{x}}=+\infty\end{array}\right\}\to \text{No existe } \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[6]{x}}.$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{(x-2)(x-1)}}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[6]{x-2}}{\sqrt[3]{x-1}}=0$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=-\frac{\sqrt{2}-2}{2}$

e) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}$

f) $\lim\limits_{x\to 9}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}=\lim\limits_{x\to 9}\frac{(x-9)\left(\sqrt{x}+3\right)}{x-9}=\lim\limits_{x\to 9}\left(\sqrt{x}+3\right)=6$

79. Página 134

a) $$\lim_{x\to 0}\left(2+\frac{1}{x^4}\right)=\infty \to \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}\left(2+\dfrac{1}{x^4}\right)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\left(2+\dfrac{1}{x^4}\right)=+\infty\end{array}\right\} \to \lim_{x\to 0}\left(2+\frac{1}{x^4}\right)=+\infty$$

b) $$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{x-3}=(4)^{-1}=\frac{1}{4}$$

c) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{x^2}=1^0=1$$

d) $$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{4x-2}{4x-3}\right)^{4x^2-1}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{4x-3}\right)(4x^2-1)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2-1}{4x-3}\right)}=e^{+\infty}=+\infty$$

e) $$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{4x+3}{3x}\right)^{3x}=\left(\frac{4}{3}\right)^{+\infty}=+\infty$$

f) $$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x}{x+5}\right)^{x}=e^{\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{-5}{x+5}\right)(x)}=e^{\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{-5x}{x+5}}=e^{-5}=\frac{1}{e^5}$$

80. Página 134

a) $$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3x-2}{x+2}\right)^{-x^2+3}=3^{-\infty}=0$$

b) $$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2-2}{x^2+3x}\right)^{x^2+4}=e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{-2-3x}{x^2+3x}\right)(x^2+4)}=e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{-3x^3}{x^2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to +\infty}(-3x)}=e^{-\infty}=0$$

c) $$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3x^2+1}{3x^2-1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{2}{3x^2-1}\right)\left(\frac{x^2+1}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{2x^2}{3x^3}\right)}=e^0=1$$

d) $$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2x-3}{3+2x}\right)^{\frac{2x^2-1}{1+3x}}=e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{-6}{3+2x}\right)\left(\frac{2x^2-1}{1+3x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{-12x^2}{6x^2}\right)}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$$

e) $$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2x+x^2}{x^2-6x-2}\right)^{\frac{1-x^3}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{8x+2}{x^2-6x-2}\right)\left(\frac{1-x^3}{x^2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{-8x^4}{x^4}\right)}=e^{-8}=\frac{1}{e^8}$$

f) $$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt[x]{\frac{7x^2+1}{2+7x^2}}\right)^{x^2+3}=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{7x^2+1}{2+7x^2}\right)^{\frac{x^2+3}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{-1}{2+7x^2}\right)\left(\frac{x^2+3}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{-x^2}{7x^3}\right)}=e^0=1$$

81. Página 134

a) $$\lim_{x\to 0}(cos^2x)^{\frac{1}{senx}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left[(cos^2x)-1\right]\left(\frac{1}{senx}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(cos^2x)-1}{senx}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-sen^2x}{senx}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(-senx)}=e^0=1$$

b) $$\lim_{x\to 0}(2x+1)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(2x)\left(\frac{1}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2x}{x}\right)}=e^2$$

82. Página 134

Si $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-ax+3}{x-3}\neq\infty\rightarrow$ (x–3) divide a $x^2-ax+3\rightarrow 3^2-3a+3=0\rightarrow a=\dfrac{12}{3}=4$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-1)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x-1)=2$$

83. Página 135

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-ax+3}{x^2+1}=\frac{7+2a}{5}=5\rightarrow 2a=25-7\rightarrow a=9$$

84. Página 135

a) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1+2x}{x+4}\right)^{\frac{m}{3-x}}=e^{\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{x-3}{x+4}\right)\left(\frac{m}{3-x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{-m}{x+4}\right)}=e^{\frac{-m}{7}}=e\rightarrow m=-7$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2-2}{3x-4}\right)^{\frac{m}{x-2}}=e^{\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x^2-3x+2}{3x-4}\right)\left(\frac{m}{x-2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{m(x-2)(x-1)}{(3x-4)(x-2)}}=e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{m(x-1)}{(3x-4)}}=e^{\frac{m}{2}}=e^2\rightarrow m=4$

85. Página 135

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-ax}-\sqrt{x^2+2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-ax-2}{\left(\sqrt{x^2-ax}+\sqrt{x^2+2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-ax}{2\sqrt{x^2}}=\frac{-a}{2}=3\Rightarrow a=-6$$

86. Página 135

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{mx+6}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(1-m)x-4}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{mx+6}\right)}\neq\infty\rightarrow 2\text{ es raíz de }(1-m)x-4\rightarrow(1-m)2-4=0\rightarrow m=-1$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{-x+6}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{-x+6}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{2}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{-x+6}\right)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

87. Página 135

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen\,x}{x\,(cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen\,x}{x}\dfrac{1}{cos x}=1$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cos^2 x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{sen\,x}{x}\right)^2=1$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-cos x)(1+cos x)}{x^2\,(1+cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cos^2 x}{x^2\,(1+cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cos^2 x}{x^2}\dfrac{1}{1+cos x}=\dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,(1-cos x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cos x}{x^2}x=0$

88. Página 135

a) $\lim\limits_{x\to -2}\left(-x^2+1\right)=-3$

b) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^-}\left(-x^2+1\right)=0\\ \lim\limits_{x\to -1^+}\left(\sqrt{x+1}\right)=0\end{cases}\rightarrow \lim\limits_{x\to -1} f(x)=0$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x+1}=1$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x+1}=\sqrt{2}$

e) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x+1}=\sqrt{3}$

f) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^+}(3x-7)=2\\ \lim\limits_{x\to 3^-}\sqrt{x+1}=2\end{cases}\rightarrow \lim\limits_{x\to 3} f(x)=2$

89. Página 135

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(2^x+1\right)=1$

b) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-}\left(2^x+1\right)=2\\ \lim\limits_{x\to 0^+}(-3x+2)=2\end{cases}\rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$

c) $\lim\limits_{x\to -1}\left(2^x+1\right)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}(-3x+2)=-1$

e) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{-2x}{x-1}=-4\\ \lim\limits_{x\to 2^-}(-3x+2)=-4\end{cases}\rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=-4$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{-2x}{x-1}=-2$

90. Página 135

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^2-4}{-x^2+x+2}=-1$

b) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-4}{-x^2+x+2}=\frac{-3}{0}=\infty\rightarrow \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{x^2-4}{(x+1)(-x+2)}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x^2-4}{(x+1)(-x+2)}=-\infty\end{array}\right\}\rightarrow$ No existe $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-4}{-x^2+x+2}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-4}{-x^2+x+2}=\frac{-4}{2}=-2$

d) $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{-x^2+x+2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{(x+2)(x-2)}{-(x-2)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x+2}{-(x+1)}=-\frac{4}{3};$

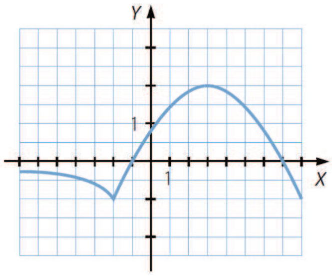
$\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{-x^2+x+2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{(x+2)(x-2)}{-(x-2)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x+2}{-(x+1)}=-\frac{4}{3}$ → Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-\frac{4}{3}$.

e) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-4}{-x^2+x+2}=-\frac{5}{4}$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2-4}{-x^2+x+2}=-1$

91. Página 135

Respuesta abierta, por ejemplo:



92. Página 135

a) $f(0) = 0 = \lim_{x \to 0} f(x) \to$ La función es continua en $x = 0$.

$f(2) = 4 = \lim_{x \to 2} f(x) \to$ La función es continua en $x = 2$.

b) No existe $f(0)$.

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0{,}5 \to$ Existe $\lim_{x \to 0} f(x) = 0{,}5$.

La función no es continua en $x = 0$ tiene una discontinuidad evitable.

$f(2) = 2{,}5 = \lim_{x \to 2} f(x)$

La función es continua en $x = 2$.

c) No existe f(1).

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x \to 1^-} f(x) = -1 \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = 3\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x \to 1} f(x).$$

La función no es continua en $x = 1$ tiene una discontinuidad de salto finito.

d) $f(-1) = 1 = \lim_{x \to -1} f(x) \to$ La función es continua en $x = -1$.

$f(2) = 1{,}5$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 2{,}5 \to$ Existe $\lim_{x \to 2} f(x) = 2{,}5$.

$f(2) \neq \lim_{x \to 2} f(x) = 2{,}5$

La función no es continua en $x = 2$ tiene una discontinuidad evitable.

e) No existe $f(-2)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x \to -2} f(x).$$

La función no es continua en $x = -2$ tiene una discontinuidad de salto infinito.

$f(2) = 3$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x \to 2^-} f(x) = -1 \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = 3\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x \to 2} f(x)$$

La función no es continua en $x = -2$, tiene una discontinuidad de salto finito.

f) $f(1) = -1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = 5\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x \to 1} f(x).$$

La función no es continua en $x = 1$, tiene una discontinuidad de salto finito.

93. Página 135

a) La función es polinómica; por tanto, es continua en $\mathbb{R}$.

b) La función es continua en $\mathbb{R}$–{2, 3}. Estudiamos la discontinuidad en los ceros del denominador, $x = 2$ y $x = 3$.

No existe $f(2)$. Además, $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \to$ No existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

La función no es continua en $x = 2$, tiene una discontinuidad de salto infinito.

No existe $f(3)$. Además, $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \to$ No existe $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

La función no es continua en $x = 3$, tiene una discontinuidad de salto infinito.

c) $x^2 - 4 \geq 0 \to (x+2)(x-2) \geq 0 \to \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -2 \end{cases}$

La función es continua en su dominio, el intervalo $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

d) $4 - x^2 \geq 0 \to (2+x)(2-x) \geq 0 \to -2 \leq x \leq 2$

La función es continua en su dominio, el intervalo [–2, 2].

e) No existe $f(0)$. Además, $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

La función es continua en $\mathbb{R}$–{0}, tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 0$.

f) $2 - x > 0 \to x < 2$

La función es continua en su dominio, el intervalo $(-\infty, 2)$.

g) $y = 2|x-1| = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x \geq 1 \\ 2 - 2x & \text{si } x < 1 \end{cases}$ → Es continua en todos los puntos salvo, quizás, en $x = 1$:

$\lim\limits_{x\to 1^-} 2|x-1| = \lim\limits_{x\to 1^-} (2-2x) = 0$; $\lim\limits_{x\to 1^+} 2|x-1| = \lim\limits_{x\to 1^+} (2x-2) = 0$

$\lim\limits_{x\to 1} 2|x-1| = 0 = y(0)$

La función es continua en $\mathbb{R}$.

g) $y = |x-3| + |x+3| = \begin{cases} -2x & \text{si } x < -3 \\ 6 & \text{si } -3 \leq x < 3 \\ 2x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ Es continua en todos los puntos salvo quizás en $x = -3$ o $x = 3$.

En $x = -3$:

$\lim\limits_{x\to -3^-} (|x-3| + |x+3|) = \lim\limits_{x\to -3^-} (-2x) = 6$; $\lim\limits_{x\to -3^+} (|x-3| + |x+3|) = \lim\limits_{x\to -3^+} 6 = 6$

$\lim\limits_{x\to -3} (|x-3| + |x+3|) = 6 = y(-3)$ → La función es continua en $x = -3$.

En $x = 3$:

$\lim\limits_{x\to 3^-} (|x-3| + |x+3|) = \lim\limits_{x\to 3^-} (6) = 6$; $\lim\limits_{x\to 3^+} (|x-3| + |x+3|) = \lim\limits_{x\to 3^+} (2x) = 6$

$\lim\limits_{x\to 3} (|x-3| + |x+3|) = 6 = y(3)$

La función es continua en $x = 3$ y, por tanto, en todo $\mathbb{R}$.

94. Página 135

a) Estudiamos la continuidad en $x = 2$, ya que la función es continua en el resto de puntos.

No existe $f(2)$. Además, $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \to$ No existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

La función tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 2$.

b) $x^2 - 2x + 3 \neq 0$ para cualquier x real $\to$ La función es continua en $\mathbb{R}$.

c) Estudiamos la continuidad en $x = 1$, que es el único cero del denominador.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$$

La función tiene en $x = 1$ una discontinuidad de salto infinito.

d) Estudiamos la continuidad en $x = -1$ y $x = 3$, que anulan el denominador.

No existe $f(-1)$.

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{2(x+1)}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x\to -1} \frac{2}{x-3} = -\frac{1}{2}.$$

La función tiene una discontinuidad evitable en $x = -1$.

No existe $f(3)$. Además, $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \to$ No existe $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

La función tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 3$.

e) Estudiamos la continuidad en $x = -3$ y $x = 1$, que anulan el denominador.

No existe $f(-3)$. Además, $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \to$ No existe $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

La función tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = -3$.

No existe $f(1)$.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{2(x-1)(x+3)} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{2(x+3)} = \frac{1}{8}$$

La función tiene una discontinuidad evitable en $x = 3$.

f) Estudiamos la continuidad en $x = 0$ y $x = 1$, que anulan el denominador.

No existe $f(0)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x\to 0} f(x).$$

La función tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 0$.

No existe $f(1)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x\to 1} f(x).$$

La función tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 1$.

95. Página 135

a) $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{2 - x} = \frac{(x+1)(x-2)}{-(x-2)}$

El único punto donde *f*(*x*) puede ser discontinua es en $x = 2$:

No existe *f*(2).

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{2 - x} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)(x-2)}{-(x-2)} = \lim_{x\to 2}(-x-1) = -3$$

f(*x*) tiene una discontinuidad evitable en $x = 2$.

b) Si definimos $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{2 - x} & \text{si } x \neq 2 \\ -3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$, *g*(*x*) contiene a *f*(*x*) y además es continua en $\mathbb{R}$.

96. Página 136

a) El dominio de la función es $[-5, 4) \cup (4, +\infty)$, *f*(*x*) presenta una discontinuidad evitable en $x = 4$.

$$\lim_{x\to 4} \frac{18 - 6\sqrt{x+5}}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{6\left(3 - \sqrt{x+5}\right)}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{-6(x-4)}{(x-4)\left(3+\sqrt{x+5}\right)} = \lim_{x\to 4} \frac{-6}{3+\sqrt{x+5}} = -1$$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo: $g(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -5 \\ f(x) & \text{si } -5 \leq x < 4 \\ -1 & \text{si } x = 4 \\ f(x) & \text{si } x > 4 \end{cases}$

97. Página 136

a) *f*(*x*) presenta una discontinuidad evitable en $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x(3x^2 - 2x + 1)}{4x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2 - 2x + 1}{4} = \frac{1}{4}$$

b) $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

98. Página 136

$f(x) = \frac{4 - x^2}{x^2 + 3x + 2} = \frac{-(x+2)(x-2)}{(x+2)(x+1)} \to$ La función es continua en $\mathbb{R} - \{-2, -1\}$.

En $x = -2$: $\lim_{x\to -2} \frac{4 - x^2}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x\to -2} \frac{-(x+2)(x-2)}{(x+2)(x+1)} = \lim_{x\to -2} \frac{-(x-2)}{x+1} = -4$

f(*x*) es discontinua evitable en $x = -2$.

En $x = -1$: $\lim_{x\to -1} \frac{4 - x^2}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x\to -1} \frac{4 - x^2}{(x+2)(x+1)} = \frac{3}{0} = \infty \to \left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -1^-} \frac{4 - x^2}{(x+2)(x+1)} = -\infty \\ \lim_{x\to -1^+} \frac{4 - x^2}{(x+2)(x+1)} = +\infty \end{array}\right\} \to$ No existe $\lim_{x\to -1} f(x)$.

f(*x*) es discontinua de salto infinito en $x = -1$.

99. Página 136

Las funciones tienen la misma gráfica salvo en el punto $x=-2$. La primera es una recta y es continua, la segunda está formada por dos semirrectas y no es continua en $x=-2$.

$$\lim_{x\to -2}\frac{(2x-1)(x+2)}{x+2}=\lim_{x\to -2}(2x-1)=-5$$

La discontinuidad de la segunda función en $x=-2$ es evitable.

Así, la segunda función es: $g(x)=\begin{cases}2x-1 & \text{si } x<-2\\ 2x-1 & \text{si } x>-2\end{cases}$

100. Página 136

a) En $x=-1$, la función $f(x)=-x$; por tanto, es continua.

En $x=0$: Existe $f(0)=2$.

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-x)=0;\quad \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+2)=2$$

$f(x)$ tiene una discontinuidad de salto finito en $x=0$.

En $x=3$: No existe $f(3)$.

$$\lim_{x\to 3^-}f(x)=\lim_{x\to 3^-}(x+2)=5;\quad \lim_{x\to 3^+}f(x)=\lim_{x\to 3^+}5=5$$

$f(x)$ tiene una discontinuidad de salto finito en $x=3$.

b) En $x=-1$: Existe $f(-1)=-3$.

$$\lim_{x\to -1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^-}(5x+2)=-3;\quad \lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}\left(\frac{x+6}{x^2}\right)=5$$

$f(x)$ tiene una discontinuidad de salto finito en $x=-1$.

En $x=0$: No existe $f(0)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+6}{x^2}=\frac{6}{0}=\infty\to\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{x+6}{x^2}=+\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{x+6}{x^2}=+\infty\end{array}\right\}$$

$f(x)$ tiene una discontinuidad de salto infinito en $x=0$.

En $x=3$: Existe $f(3)=1$.

$$\lim_{x\to 3^-}f(x)=\lim_{x\to 3^-}\frac{x+6}{x^2}=1;\quad \lim_{x\to 3^+}f(x)=\lim_{x\to 3^+}\left(x^2-2x-2\right)=1$$

$f(x)$ es continua en $x=3$.

101. Página 136

Existe $f(2)$: $f(2)=-\frac{2}{3}$

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{2-x}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(2-x)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{-(x+2)}{\sqrt{x^2+5}+3}=\frac{-2}{3}$$

$\lim_{x\to 2}f(x)=-\frac{2}{3}=f(2)\to$ $f(x)$ es continua en $x=2$.

102. Página 136

Las tres funciones son polinómicas, y por tanto, continuas en su dominio.

Estudiamos la continuidad en $x = 0$ y $x = 2$:

En $x = 0$: Existe $f(0) = 0$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^2 = 0; \quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0) \to$ $f(x)$ es continua en $x = 0$.

En $x = 2$: Existe $f(2) = 3$.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} x = 2; \quad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (x+1) = 3;$

$f(x)$ presenta una discontinuidad de salto finito en $x = 2$.

103. Página 136

No existe $f(0)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -1\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$$

La función tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$.

$f(3) = 2$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 2\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to 3} f(x).$$

La función tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 3$.

104. Página 136

Estudiamos la continuidad de la función en $x = 0$, $x = 2$ y $x = 3$:

En $x = 0$: Existe $f(0) = e^0 = 1$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x-1) = -1; \quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^x = 1;$

$f(x)$ es continua en $x = 0$.

En $x = 2$: Existe $f(2) = 2$.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} e^x = e^2; \quad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{2}{3-x} = 2;$

$f(x)$ presenta una discontinuidad de salto finito en $x = 2$.

En $x = 3$: No existe $f(3)$.

$$\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} \frac{2}{3-x} = \frac{2}{0} \to \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{2}{3-x} = +\infty\\ \lim\limits_{x\to 3^+} \frac{2}{3-x} = -\infty\end{array}\right\}$$

$f(x)$ presenta una discontinuidad de salto infinito en $x = 3$.

105. Página 136

a) $f(x)=\begin{cases}-x & si\ x<0\\ x & si\ x\geq 0\end{cases}$

Las funciones de ambos trozos son continuas en $\mathbb{R}$, por lo que solo puede ser discontinua en $x=0$.

$f(0)=0$ $\qquad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0\end{array}\right\}\to \lim\limits_{x\to 0} f(x)=0 \to \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0) \to$ Es continua en $x=0$.

b) $f(x)=\begin{cases}-x-5 & si\ x<-5\\ x+5 & si\ x\geq -5\end{cases}$

Las funciones de ambos trozos son continuas en $\mathbb{R}$, por lo que solo puede ser discontinua en $x=-5$.

$f(-5)=0$ $\qquad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -5^-} f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to -5^+} f(x)=0\end{array}\right\}\to \lim\limits_{x\to -5} f(x)=0 \to \lim\limits_{x\to -5} f(x)=f(-5) \to$ Es continua en $x=-5$.

c) $f(x)=\begin{cases}3-2x & si\ x\leq \dfrac{3}{2}\\ 2x-3 & si\ x>\dfrac{3}{2}\end{cases}$

Las funciones de ambos trozos son continuas en $\mathbb{R}$, por lo que solo puede ser discontinua en $x=\dfrac{3}{2}$.

$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=0$ $\qquad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}^-} f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to \frac{3}{2}^+} f(x)=0\end{array}\right\}\to \lim\limits_{x\to \frac{3}{2}} f(x)=0 \to \lim\limits_{x\to \frac{3}{2}} f(x)=f\left(\dfrac{3}{2}\right) \to$ Es continua en $x=\dfrac{3}{2}$.

d) $x^2-x-6=0 \to x=-2;\ x=3 \to f(x)=\begin{cases}x^2-x-6 & si\ x\leq -2\\ -x^2+x+6 & si\ -2<x\leq 3\\ x^2-x-6 & si\ x>3\end{cases}$

Las funciones de cada trozo son continuas en $\mathbb{R}$. Solo puede ser discontinua en $x=-2$ o en $x=3$.

$f(-2)=0$ $\qquad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=0\end{array}\right\}\to \lim\limits_{x\to -2} f(x)=0 \to \lim\limits_{x\to -2} f(x)=f(-2) \to$ Es continua en $x=-2$.

$f(3)=0$ $\qquad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=0\end{array}\right\}\to \lim\limits_{x\to 3} f(x)=0 \to \lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3) \to$ Es continua en $x=3$.

e) $6-x^2=0\to\begin{cases}x=\sqrt{6}\\ x=-\sqrt{6}\end{cases} \to f(x)=\begin{cases}x^2-6 & \text{si } x\leq -\sqrt{6}\\ 6-x^2 & \text{si } -\sqrt{6}<x\leq \sqrt{6}\\ x^2-6 & \text{si } x>\sqrt{6}\end{cases}$

Las funciones de cada trozo son continuas en $\mathbb{R}$. Solo puede ser discontinua en $x=-\sqrt{6}$ o en $x=\sqrt{6}$.

$f\left(-\sqrt{6}\right)=0$ $\qquad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -\sqrt{6}^-} f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to -\sqrt{6}^+} f(x)=0\end{array}\right\}\to \lim\limits_{x\to -\sqrt{6}} f(x)=0 \to \lim\limits_{x\to -\sqrt{6}} f(x)=f\left(-\sqrt{6}\right) \to$ La función es continua en $x=-\sqrt{6}$.

$f\left(\sqrt{6}\right)=0$ $\qquad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to \sqrt{6}^-} f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to \sqrt{6}^+} f(x)=0\end{array}\right\}\to \lim\limits_{x\to \sqrt{6}} f(x)=0 \to \lim\limits_{x\to \sqrt{6}} f(x)=f\left(\sqrt{6}\right) \to$ La función es continua en $x=\sqrt{6}$.

106. Página 136

La función será continua en $x = 2$ si $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 2^-} f(x) = -1\\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = -1\end{array}\right\} \to \lim_{x\to 2} f(x) = -1$$

Entonces la función es continua en $x = 2$ si:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 1 & \text{si } x < 2\\ -1 & \text{si } x = 2\\ \dfrac{1}{x-3} & \text{si } x > 2\end{cases}$$

107. Página 136

a) $f(x)$ es continua salvo, quizás, en $x = 4$:

Existe $f(4) = 12$. $\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} \left(x^2 - 4\right) = 12$; $\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} (x + a) = 4 + a$;

$f(x)$ es continua $\to \lim_{x\to 4^-} f(x) = 12 = 4 + a = \lim_{x\to 4^+} f(x) \to a = 8$

b) $f(x)$ es continua salvo, quizás, en $x = 1$:

Existe $f(1) = 3 - a$. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (3 - ax) = 3 - a$; $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (2 + a\ln x) = 2$;

$f(x)$ es continua $\to \lim_{x\to 1^-} f(x) = 3 - a = 2 = \lim_{x\to 1^+} f(x) \to a = 1$

c) $f(x)$ es continua salvo, quizás, en $x = -2$.

Existe $f(-2) = 2$. $\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \sqrt{2 - x} = 2$; $\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \left(x^2 - 3x + a\right) = 10 + a$;

$f(x)$ es continua $\to \lim_{x\to -2^-} f(x) = 2 = 10 + a = \lim_{x\to -2^+} f(x) \to a = -8$

d) $f(x)$ es continua salvo, quizás, en $x = -1$.

Existe $f(-1) = -a$. $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \dfrac{a}{x} = -a$; $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \left(x^2 + 1\right) = 2$

$f(x)$ es continua $\to \lim_{x\to -1^-} f(x) = -a = 2 = \lim_{x\to -1^+} f(x) \to a = -2$

e) $f(x)$ es continua salvo, quizás, en $x = 2$.

Existe $f(2) = 3a^2$. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 3a^x = 3a^2$; $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \dfrac{12}{x-1} = 12$

$f(x)$ es continua $\to \lim_{x\to 2^-} f(x) = 3a^2 = 12 = \lim_{x\to 2^+} f(x) \to a = 2$

f) $f(x)$ es continua salvo, quizás, en $x = 0$ o $x = 2$.

Existe $f(0)=1$. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(x^2 + 1\right) = 1$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(x + a^2\right) = a^2$

$f(x)$ es continua $\to \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 = a^2 = \lim_{x\to 0^+} f(x) \to a = \pm 1$

Existe $f(2) = 2a + 1$. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \left(x + a^2\right) = 2 + a^2$; $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (ax + 1) = 2a + 1$

$f(x)$ es continua $\to \lim_{x\to 2^-} f(x) = 2 + a^2 = 2a + 1 = \lim_{x\to 2^+} f(x) \to a = 1$

Por tanto, $f(x)$ será continua si $a = 1$.

g) $f(x)$ es continua salvo, quizás, en $x = a$.

Existe $f(a) = 2^a + 1$. $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^-} (2^x + 1) = 2^a + 1$; $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} 5 = 5$

$f(x)$ es continua $\rightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = 2^a + 1 = 5 = \lim_{x \to a^+} f(x) \rightarrow a = 2$

h) $f(x)$ es continua salvo, quizás, en $x = 0$.

Existe $f(0) = 2 + a$. $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (2 + a \cdot cosx) = 2 + a$; $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (2^{-x} + 6x - 3) = -2$

$f(x)$ es continua $\rightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) = 2 + a = -2 = \lim_{x \to 0^+} f(x) \rightarrow a = -4$

i) $f(x)$ es continua salvo, quizás, en $x = 4$.

Existe $f(4) = 1$. $\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} (cos(x - 4)) = 1$; $\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} 2^{x-2a} = 2^{4-2a}$

$f(x)$ es continua $\rightarrow \lim_{x \to 4^-} f(x) = 1 = 2^{4-2a} = \lim_{x \to 4^+} f(x) \rightarrow a = 2$

108. Página 136

a) Como las funciones por separado son continuas en los intervalos en los que están definidas, la función será continua si lo es en $x = 0$ y $x = 3$.

En $x = 0$, la función será continua si: $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$

Existe $f(0) = b$.

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^2 + 2x - 1) = -1$; $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (ax + b) = b$

Por tanto, $b = -1$.

En $x = 3$, la función será continua si: $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$

Existe $f(3) = 1$.

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (ax + b) = 3a - 1$; $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (1) = 1$

Por tanto, $a = \frac{2}{3}$.

b) Como las funciones por separado son continuas en los intervalos en los que están definidas, la función será continua si lo es en $x = -1$ y $x = 2$.

En $x = -1$, la función será continua si: $\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1)$

Existe $f(-1) = a - 3$.

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (ax^2 + 3x) = a - 3$; $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (x^3 - a) = -1 - a$

Por tanto, $a = 1$.

En $x = 2$, la función será continua si: $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$

Existe $f(2) = 8 - a = 7$.

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^3 - a) = 8 - a = 7$; $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (bx - 3) = 2b - 3$

Por tanto, $b = 5$.

109. Página 137

a) La función $\frac{2}{2-x}$ no es continua en $x = 2$, sean cuales sean los valores de a y b.

b) Como las funciones por separado son continuas en los intervalos en los que están definidas, la función será continua si lo es en $x = -1$ y $x = 1$.

En $x = -1$, la función será continua si: $\lim_{x\to -1} f(x) = f(-1)$

Existe $f(-1) = -a + 3$.

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (ax+3) = -a+3;$ $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (bx^2+5) = b+5$

Por tanto, $b = -a - 2$.

En $x = 1$, la función será continua si: $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

Existe $f(1) = b + 5$.

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (bx^2+5) = b+5;$ $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (2\sqrt{x+3}+a) = 4+a$

Por tanto, $a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}$.

c) Como las funciones por separado son continuas en los intervalos en los que están definidas, la función será continua si lo es en $x = 0$ y $x = \pi$.

En $x = 0$, la función será continua si: $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

Existe $f(0) = 3$.

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^3+2x+3) = 3;$ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (a\cdot \mathrm{sen} x + b) = b$

Por tanto, $b = 3$.

En $x = \pi$, la función será continua si: $\lim_{x\to \pi} f(x) = f(\pi)$

Existe $f(\pi) = b = 3$.

$\lim_{x\to \pi^-} f(x) = \lim_{x\to \pi^-} (a\cdot \mathrm{sen} x + b) = b = 3;$ $\lim_{x\to \pi^+} f(x) = \lim_{x\to \pi^+} ((x-\pi)^2 + a) = a$

Por tanto, $a = 3$.

d) Como las funciones por separado son continuas en los intervalos en los que están definidas, la función será continua si lo es en $x = -2$ y $x = 2$.

En $x = -2$, la función será continua si: $\lim_{x\to -2} f(x) = f(-2)$

Existe $f(-2) = -7$.

$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} (3x-1) = -7;$ $\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} (ax^2+bx) = 4a-2b$

En $x = 2$, la función será continua si: $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$

Existe $f(2) = 4a + 2b$.

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (ax^2+bx) = 4a+2b;$ $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (2^x-5) = -1$

Entonces: $\left.\begin{array}{l} 4a-2b=-7 \\ 4a+2b=-1 \end{array}\right\} \to a = -1; b = \frac{3}{2}$

110. Página 137

a) $f(x)=\begin{cases} 1-2x & \text{si } x<\frac{1}{2} \\ -1+2x & \text{si } \frac{1}{2}\leq x<3 \\ a^x-3 & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$

Cada una de las funciones son continuas en su dominio; por tanto, $f(x)$ será continua si lo es en $x=\frac{1}{2}$ y $x=3$.

En $x=\frac{1}{2}$, la función será continua si: $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)$

Existe $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}(1\text{-}2x)=0;$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+}(-1+2x)=0$

$f(x)$ es continua en $x=\frac{1}{2}$.

En $x=3$, la función será continua si: $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$

Existe $f(3)=a^3-3$.

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(-1+2x)=5;$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\left(a^x-3\right)=a^3-3$

Entonces, $a=2$.

b) $f(x)=\begin{cases} 4-3x & \text{si } x<\frac{4}{3} \\ 3x-4 & \text{si } \frac{4}{3}\leq x<2 \\ a^x-x & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$

Cada una de las funciones son continuas en su dominio; por lo tanto, $f(x)$ será continua si lo es en $x=\frac{4}{3}$ y $x=2$.

En $x=\frac{4}{3}$, la función será continua si: $\lim\limits_{x\to\frac{4}{3}} f(x)=f\left(\frac{4}{3}\right)$

Existe $f\left(\frac{4}{3}\right)=0$.

$\lim\limits_{x\to\frac{4}{3}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{4}{3}^-}(4-3x)=0;$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to\frac{4}{3}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{4}{3}^+}(3x-4)=0$

$f(x)$ es continua en $x=\frac{4}{3}$.

En $x=2$, la función será continua si: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$

Existe $f(2)=a^2-2$.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(3x-4)=2;$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(a^x-x\right)=a^2-2$

Entonces, $a=2$.

c) $f(x)=\begin{cases} 4-5x & \text{si } x<\frac{4}{5} \\ 5x-4 & \text{si } \frac{4}{5}\le x<1 \\ |a-2| & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

Cada una de las funciones es continua en su dominio; por lo tanto, $f(x)$ será continua si lo es en $x=\frac{4}{5}$ y $x=1$.

En $x=\frac{4}{5}$, la función será continua si: $\lim\limits_{x\to\frac{4}{5}} f(x)=f\left(\frac{4}{5}\right)$

Existe $f\left(\frac{4}{5}\right)=0$. $\lim\limits_{x\to\frac{4}{5}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{4}{5}^-}(4-5x)=0$; $\lim\limits_{x\to\frac{4}{5}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{4}{5}^+}(5x-4)=0$

$f(x)$ es continua en $x=\frac{4}{5}$.

En $x=1$, la función será continua si: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$

Existe $f(1)=|a-2|$. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(5x-4)=1$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}|a-2|=|a-2|$

Entonces, $a=1$ o $a=3$.

d) Supongamos que $a\le 4$, entonces: $f(x)=\begin{cases} -x+4 & \text{si } x<a \\ x^2-6x+8 & \text{si } x\ge a \end{cases}$

Cada una de las funciones son continuas en su dominio; por lo tanto, $f(x)$ será continua si lo es en $x=a$.

En $x=a$, la función será continua si: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

Existe $f(a)=a^2-6a+8$.

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-}(-x+4)=-a+4$; $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}\left(x^2-6x+8\right)=a^2-6a+8$

$-a+4=a^2-6a+8\to a^2-5a+4=0\to a=4 \text{ o } a=1$

Supongamos que $a>4$, entonces: $f(x)=\begin{cases} -x+4 & \text{si } x<4 \\ x-4 & \text{si } 4\le x<a \\ x^2-6x+8 & \text{si } x\ge a \end{cases}$

Cada una de las funciones son continuas en su dominio.

$f(x)$ es continua en $x=4$ porque proviene del valor absoluto; $f(x)$ será continua si lo es en $x=a$.

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-}(x-4)=a-4$; $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}\left(x^2-6x+8\right)=a^2-6a+8$

$a-4=a^2-6a+8\to a^2-7a+12=0\to a=3 \text{ o } a=4$, pero hemos supuesto que a es mayor que 4.

Se deduce que la función es continua para $a=1$ y $a=4$.

e) Cada una de las funciones son continuas en su dominio; por lo tanto, $f(x)$ será continua si lo es en $x=a$.

En $x=a$, la función será continua si: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

Existe $f(a)=sen^2\, a$.

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} sen^2(x)=sen^2 a$; $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}\left(-cos^2(x)+x\right)=-cos^2(a)+a$

$sen^2 a=-cos^2(a)+a\to sen^2 a+cos^2 a=a\to a=1$

111. **Página 137**

La población inicial es $f(0)=\dfrac{18+0^2}{(0+3)^2}=2$ millones de individuos.

$\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{18+t^2}{(t+3)^2}=1\to$ A largo plazo, la población tiende a ser de un millón de individuos.

112. **Página 137**

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{36x+8}{x+2}=36$ flexiones.

113. **Página 137**

$R(x)=0 \longrightarrow$ Función constante $\longrightarrow$ $R(x)$ es continua en (0, 600).

$R(x)=40+\dfrac{400+56x}{1640+0{,}1x}\to$ Está definida en $\mathbb{R}-\{-16\,400\}$ $\longrightarrow$ $R(x)$ es continua en $(200,+\infty)$.

$R(600)=60$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to600^-}R(x)=60\\ \lim\limits_{x\to600^+}R(x)=0\end{array}\right\}\to$ No existe $\lim\limits_{x\to600}R(x)$.

Luego la función no es continua en $x = 600$, y tiene una discontinuaidad de salto finito.

114. **Página 137**

$$f(x)=\begin{cases}10{,}50x & \text{si} \quad 0\le x<10\\ 7{,}50x & \text{si} \quad 10\le x<20\\ 5{,}50x & \text{si} \quad 20\le x\end{cases}$$

La función está formada por funciones polinómicas, que son continuas en los intervalos donde están definidas.

Estudiamos los puntos donde cambia su expresión algebraica.

En $x = 10$: $\quad f(10)=75$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to10^-}f(x)=105\\ \lim\limits_{x\to10^+}f(x)=75\end{array}\right\}\to$ No existe $\lim\limits_{x\to10}f(x)\longrightarrow$ En $x = 10$ tiene una discontinuidad de salto finito.

En $x = 20$: $\quad f(20)=110$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to20^-}f(x)=150\\ \lim\limits_{x\to20^+}f(x)=110\end{array}\right\}\to$ No existe $\lim\limits_{x\to10}f(x)\longrightarrow$ En $x = 20$ tiene una discontinuidad de salto finito.

Al estar formada por funciones polinómicas, $\operatorname{Dom} f=[0,+\infty)$.

115. **Página 137**

$G(x)=6+2x-\dfrac{x^2}{6}\to$ Función polinómica $\longrightarrow$ $G(x)$ es continua en $(0,9)$.

$G(x)=3+\dfrac{75x+5400}{10x^2}\to$ Definida en $\mathbb{R}-\{0\}\longrightarrow$ $G(x)$ es continua en $(9,+\infty)$.

Estudiamos la función en el punto donde cambia su expresión algebraica: $x = 9$.

$G(9)=10{,}5$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to9^-}G(x)=10{,}5\\ \lim\limits_{x\to9^+}G(x)=10{,}5\end{array}\right\}\to\lim\limits_{x\to9}G(x)=10{,}5=G(9)\to$ La función es continua en $(0,+\infty)$.

116. Página 137

$P(t)=50-t^2 \rightarrow$ Función polinómica $\rightarrow P(t)$ es continua en $[0,9]$.

$P(t)=56-\dfrac{20t}{t+1} \rightarrow$ Definida en $\mathbb{R}-\{-1\} \rightarrow P(t)$ es continua en $(3,+\infty)$.

Estudiamos la función en el punto donde cambia su expresión algebraica: $x=3$.

$P(3)=41$ $\qquad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} P(t)=41\\ \lim\limits_{x\to 3^+} P(t)=41\end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x\to 9} P(t)=41=P(3) \rightarrow$ La función es continua en $(0,+\infty)$.

$$\lim_{t\to+\infty} P(t)=\lim_{t\to+\infty}\left(56-\frac{20t}{t+1}\right)=56-20=36$$

Por tanto, con el paso del tiempo, la plancha soportará un peso de 36 toneladas.

117. Página 137

a) Las funciones que componen $P(x)$ son continuas en los intervalos donde están definidas, en los que también $P(x)$ es continua. Solo tenemos que estudiar lo que ocurre en $x=20$, donde cambia su expresión algebraica.

Para que la función sea continua: $\lim\limits_{x\to 20^-} P(x)=\lim\limits_{x\to 20^+} P(x)=41=P(20)$

$P(20)=60$ $\qquad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 20^-} P(x)=60\\ \lim\limits_{x\to 20^+} P(x)=\sqrt{a\cdot 20^2+2000}\end{array}\right\} \rightarrow \sqrt{a\cdot 20^2+2000}=60 \rightarrow 400a+2000=3600 \rightarrow a=4$.

b) El precio de cada litro sería: $\dfrac{P(x)}{x} \rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{ax^2+2000}}{x}=\sqrt{a}$ €/litro costaría el aceite.

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. Página 138

No, el ejemplo anterior se trata de un caso concreto, son términos de una serie geométrica con razón $\dfrac{1}{2}$, por eso la suma de sus términos es un valor finito.

Por ejemplo, el conjunto de los números naturales pares, su suma no es un valor finito: $2+4+6+8+10+\ldots=+\infty$

2. Página 138

Sí, si trabajamos con un recorrido de cualquier distancia $d>0$ las distancias recorridas en cada zancada serían los términos de la siguiente sucesión:

$$\left\{a_1=\frac{d}{2}, a_2=\frac{d}{4}, a_3=\frac{d}{8}, a_4=\frac{d}{16}, \ldots, a_n=\frac{d}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \ldots\right\} \rightarrow \text{Serie geométrica con } r=\frac{1}{2}.$$

3. Página 138

Se trata de un límite cuando n tiende a infinito.

4. Página 138

El término general de la sucesión es $a_n=\dfrac{d}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$. Tal y como se ha estudiado en cursos anteriores, podemos sumar los infinitos términos de una serie geométrica usando la siguiente fórmula si $0<r<1$: $S_\infty=\dfrac{a_1}{1-r}=\dfrac{\frac{d}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{d}{2}}{\frac{1}{2}}=d$