1) Desigualdades e inecuaciones polinómicas

Se trata de expresiones en las que tenemos un signo de desigualdad. Los símbolos de desigualdad son (<,>, ≥, ≤)

$$\begin{cases} \text{menor que } (<) \\ \text{mayor que } (>) \\ \text{menor o igual que } (\leq) \\ \text{mayor o igual que } (\geq) \end{cases}$$

Propiedades :

- Si a los dos miembros de una desigualdad sumamos o restamos un mismo número obtenemos otra desigualdad del mismo sentido.
- Si a los dos miembros de una desigualdad lo multiplicamos o lo dividimos por un número:
  - Si el número es mayor que cero obtendremos una desigualdad del mismo sentido.
  - Si el número es menor que cero obtendremos una desigualdad de sentido contrario.

Inecuaciones

Una inecuación se trata de una desigualdad en la que aparece alguna incógnita en uno o en los dos miembros de la desigualdad. La solución será el conjunto de números reales que cumplen dicha desigualdad.

Dos inecuaciones serán equivalentes si poseen la misma solución.

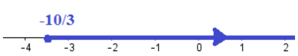
Ejemplo : Dada la inecuación : $x - 1 \leq 0 \rightarrow x \leq 1$ La solución a la inecuación será los valores que pertenezcan a la semirrecta $[1,\infty)$

Inecuaciones Lineales

Llamaremos inecuación lineal aquella en la que los miembros de la desigualdad son polinomios de primer grado.

Ejemplo: $2(x-3) - 4(x-5) + 2x \geq 4 - 3x$

$2x - 6 - 4x + 20 + 2x \geq 4 - 3x \rightarrow 2x - 4x + 2x + 3x \geq 4 - 20 + 6 \rightarrow 3x \geq -10 \rightarrow x \geq -\frac{10}{3}$



$\mathbf{x} \in [-\frac{10}{3}, \infty)$

Inecuaciones de Segundo grado

Llamaremos inecuación lineal aquella en la que los miembros de la desigualdad son polinomios de segundo grado.

Ejemplo: Resuelve la siguiente inecuación $3x^2 + (x-3)^2 - 4(x-2) \leq 2x^2 + 5$

1) Obtenemos una inecuación equivalente en el que nos encontramos un polinomio de segundo grado en el primer miembro y un cero en el segundo miembro.

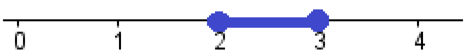
$$3x^2 + x^2 + 9 - 6x - 4x + 8 \leq 2x^2 + 5 \rightarrow \; 2x^2 - 10x + 12 \leq 0$$

2) Factorizamos el polinomio: $2(x-2)(x-3) \leq 0$ → las raíces son x=2 y x=3

3) Marcamos en la recta los valores de las raíces y calculamos el signo del polinomio en los intervalos que determinan dichas raíces.

	$(-\infty,2)$	$(2,3)$	$(3,\infty)$
(x-2)	-	+	+
(x-3)	-	-	+
2(x-2)(x-3)	+	-	+

4) Miramos el intervalo que cumpla la desigualdad. En este caso $2(x-2)(x-3) \leq 0$ nos dice que tiene que ser menor que 0, por lo tanto tomaremos el intervalo que sea negativo. Como tenemos " $\leq$ " es decir el signo igual nos indica que las raíces están incluidas, por lo tanto el intervalo será cerrado.



Solución: $x \in [2,3]$

Inecuaciones polinómicas de grado superior a dos.

El proceso es similar al visto para las inecuaciones de segundo grado.

Ejemplo: Resuelve la siguiente inecuación $x^3 - 3x^2 \leq 13x - 15$

1) Obtenemos una inecuación equivalente en el que nos encontramos un polinomio en el primer miembro y un cero en el segundo miembro.

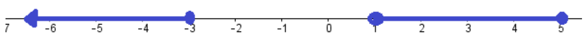
   $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 \leq 0$

2) Factorizamos el polinomio: $(x+3)(x-1)(x-5) \leq 0$ → Las raíces son x = -3, x=1 y x=5

3) Marcamos en la recta los valores de las raíces y calculamos el signo del polinomio en los intervalos que determinan dichas raíces.

	$(\infty, -3)$	(-3,1)	(1,5)	(5,∞)
(x+3)	-	+	+	+
(x-1)	-	-	+	+
(x-5)	-	-	-	+
(x+3)(x-1)(x-5)	-	+	-	+

4) Miramos el intervalo que cumpla la desigualdad. En este caso $(x+3)(x-1)(x-5) \leq 0$ nos dice que tiene que ser menor que 0, por lo tanto tomaremos el intervalo que sea negativo. El signo igual de " $\leq$ " nos indica que las raíces están incluidas, por lo tanto el intervalo será cerrado.



Solución: $x \in (-\infty, -3] \cup [1,5]$

2) Inecuaciones Racionales

Su resolución es similar a las de segundo grado, teniendo en cuenta que el denominador debe ser distinto de cero.

Ejemplo: Resuelve la siguiente inecuación $x^2-4x \geq \frac{-3x+1}{x+1} - 1$

1) Obtenemos una inecuación equivalente en el que nos encontramos una fracción algebraica en el primer miembro y un cero en el segundo miembro.

$$x^2-4x \geq \frac{-3x+1}{x+1} - 1 \rightarrow x^2 -4x +1 - \frac{-3x+1}{x+1} \geq 0 \rightarrow \frac{(x+1)(x^2-4x+1)+3x-1}{x+1} \geq 0 \rightarrow \frac{x^3-4x^2+x+x^2-4x+1+3x-1}{x+1} \geq 0$$

$$\rightarrow \frac{x^3-3x^2}{x+1} \geq 0$$

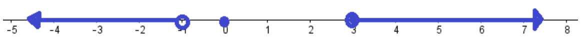
2) Factorizamos tanto el numerador como el denominador

$\frac{x^3-3x^2}{x+1} \geq 0 \rightarrow \frac{x^2(x-3)}{x+1} \geq 0$ $\rightarrow$ Las raíces son x= -1 , x=0 y x=3

3) Marcamos en la recta los valores de las raíces y calculamos el signo de la fracción algebraica en los intervalos que determinan dichas raíces.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,3)$	$(3,\infty)$
x^2	+	+	+	+
$(x-3)$	-	-	-	+
$(x+1)$	-	+	+	+
$\frac{x^2(x-3)}{(x+1)}$	+	-	-	+

4) Miramos el intervalo que cumpla la desigualdad. En este caso $\frac{x^2(x-3)}{x+1} \geq 0$ nos dice que tiene que ser mayor que 0, por lo tanto tomaremos los intervalos que sean positivos. El signo igual de " $\geq$ " nos indica que las raíces están incluidas, por lo tanto el intervalo será cerrado, aunque tenemos que tener en cuenta que los denominadores nunca están incluidos. Por lo que x= -1 tiene que estar abierto.



solución: $x \in (-\infty,-1) \cup [3,\infty) \cup \{0\}$

3) **<u>Sistemas de inecuaciones con una incógnita</u>**

Un sistema de inecuaciones está formado por varias inecuaciones en el que tenemos una o varias incógnitas. La solución de un sistema será el conjunto de números reales que satisfacen todas las inecuaciones. Para calcular la solución a dicha sistema tendremos que realizar la intersección de las soluciones de cada una de las inecuaciones.

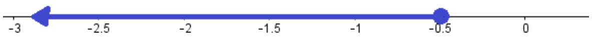
Ejemplo: Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones $\begin{cases} \frac{x-1}{3} - \frac{x+3}{2} \leq x \\ \frac{4x-2}{4} - \frac{x-1}{3} \geq x \end{cases}$

I. Resolvemos cada una de las inecuaciones que forman el sistema.

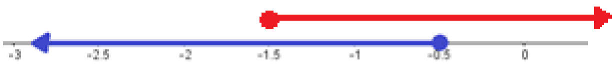
II. Hallamos la intersección de las soluciones calculadas anteriormente.

- $\frac{x-1}{3}-\frac{x+3}{2} \leq x \rightarrow \frac{2x-2}{6}-\frac{3x+9}{6} \leq \frac{6x}{6} \rightarrow 2x-2-3x-9-6x \leq 0 \rightarrow -7x \leq 11 \rightarrow \mathbf{x} \geq \frac{\mathbf{-11}}{\mathbf{7}}$

- $\frac{4x-2}{4}-\frac{x-1}{3} \geq x \rightarrow \frac{12x-6}{12}-\frac{4x-4}{12} \geq \frac{12x}{12} \rightarrow 12x-6-4x+4-12x \geq 0 \rightarrow -4x \geq 2 \rightarrow \boldsymbol{x} \leq \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2}}$



La solución es la intersección de ambas soluciones:



Solución: $x\epsilon \quad (\frac{-11}{7},\infty) \cap \left(-\infty,\frac{-1}{2}\right) = \left[\frac{\mathbf{-11}}{\mathbf{7}},\frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2}}\right]$

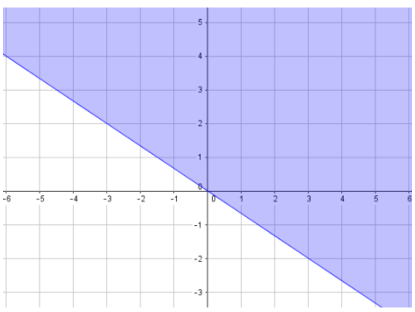
4) Inecuaciones lineales con dos incógnitas

Las inecuaciones lineales con dos incógnitas las resolveremos gráficamente debido a que las soluciones son los puntos del semiplano en el que queda dividido el plano por la recta que corresponde a la inecuación considerada como igualdad.

Para obtener dichos semiplanos, dibujamos la recta, tomamos un punto exterior a la misma y comprobamos si dicho punto satisface dicha inecuación.

- Si la desigualdad es "≤ " (es decir posee el signo igual) la recta será considerada como solución.
- Si la desigualdad es "<" (es decir no posee el signo igual) la recta no será considerada como solución.

Ejemplo: la Inecuación 2x +3y ≥ 0 representa un semiplano con borde, debido a que poseemos el signo igual.

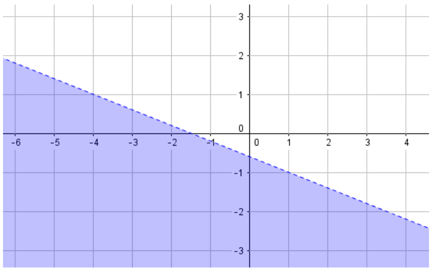


x	0	3
$y = \frac{-2x}{3}$	0	-2

Tomamos un punto que no pertenezca a la recta.

(1,0) $\rightarrow 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \geq 0$ por lo tanto el punto (1,0) pertenece al semiplano.

Ejemplo: la inecuación 2x + 5y < -3 representa un semiplano sin borde, debido a que no poseemos el signo igual. Por lo tanto la recta la dibujaremos discontinua.

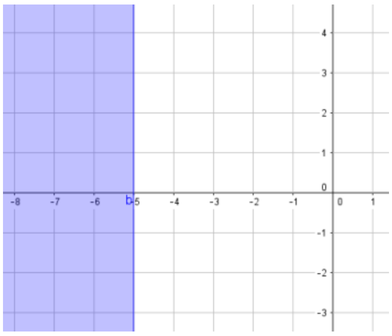


x	1	-4
$y = \frac{-3-2x}{5}$	-1	1

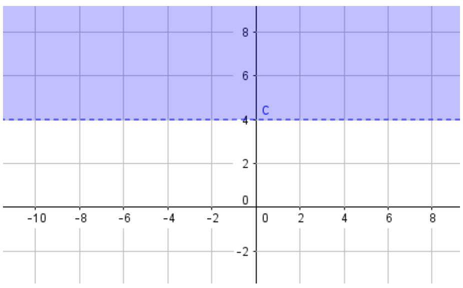
Tomamos un punto que no pertenezca a la recta.

(0,0) → 2·0 + 5·0 < -3 → 0<-3
No se cumple por lo que el punto (0,0) no pertenece al semiplano.

Ejemplo: la inecuación $x \leq -5$ representa el semiplano con borde "ya que posee signo igual" . El semiplano se encuentra a la izquierda de x= -5.



Ejemplo: la inecuación $y > 4$ representa el semiplano sin borde "ya que no posee signo igual". El semiplano se encuentra por encima de la recta y=4. Observamos que la recta se representa de manera discontinua.



5) Sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas

Las inecuaciones que manejaremos en un sistema de inecuaciones lineales serán de primer grado y las dos incógnitas no estarán multiplicadas entre sí.

La solución será la región del plano que se obtiene con la intersección de los diferentes semiplanos de cada una de las inecuaciones. Todos los puntos que se encuentran dentro de esta solución cumplen con cada una de las inecuaciones.

Para calcular la región factible procederemos de la siguiente manera:

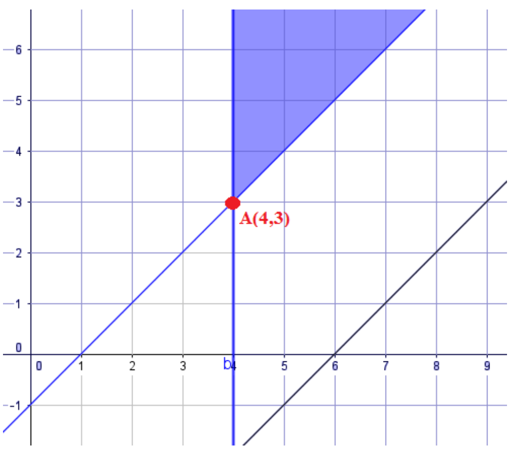
I. Calculamos los semiplanos de las diferentes inecuaciones.

II. Calculamos las intersecciones de los diferentes semiplanos. Puede ocurrir que algún semiplano sea **redundante,** esto ocurre cuando la intersección de los demás semiplanos se encuentran dentro de dicho semiplano.

III. Calculamos los diferentes vértices formados en las diferentes intersecciones.

Si el recinto está limitado en todas sus direcciones diremos que el recinto es **acotado** y si no está limitado el recinto será **no acotado**.

Ejemplo: resuelve el siguiente sistema de inecuaciones $\begin{cases} x \geq 4 \\ y \geq x - 1 \\ y \geq x - 6 \end{cases}$



La solución es decir la región factible será la zona coloreada de azul. Su vértice será el punto A(4,3).

El recinto es no acotado ya que no está limitado en todas las direcciones.

La inecuación $y \geq x-6$ es redundante ya que la intersección de los demás semiplanos se encuentra dentro de este semiplano.

Todas las rectas son continuas ya que las inecuaciones tienen el signo igual.

6) Programación Lineal

Un problema de programación lineal es un problema en el que debemos calcular el valor máximo o mínimo de una función objetivo, donde nos encontramos con un conjunto de variables sometidas a un conjunto de restricciones. Cuando estas restricciones y la función objetivo son lineales diremos que se trata de un problema de programación lineal.

En este tipo de problemas entran en juego una serie de elementos:

- **Variables de decisión:** es el conjunto de variables cuya magnitud deseamos determinar resolviendo el modelo de programación lineal.
- **Función objetivo:** es la función matemática que relaciona las variables de decisión.
- **Restricciones:** Está formados por un conjunto de igualdades o desigualdades que limitan los valores que pueden tomar las variables de decisión en la solución.

Ejemplo: Una compañía aérea tiene dos aviones, A y B, para cubrir un determinado trayecto. El avión A debe hacer más veces el trayecto que el avión B, pero no puede sobrepasar 120 viajes. Entre los dos aviones deben hacer más de 60 vuelos, pero menos de 200. En cada vuelo, A consume 900 litros de combustible y B 700 litros. ¿Cuántos vuelos debe hacer cada avión para que el consumo sea mínimo?

- **Variables:** x será el número de vuelos del avión A e y al número de vuelos del avión B.
- **Las restricciones son**: Teniendo en cuenta que las variables de decisión no pueden ser negativas

$$\begin{cases} x \geq y \\ x \leq 120 \\ x + y \geq 60 \\ x + y \leq 200 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

- Función Objetivo: Se quiere minimizar el consumo z(x,y)= 900x+700y.

7) Resolución analítica de un problema de programación lineal

1) Representamos cada una de las inecuaciones y calculamos la región factible. Esta región puede estar acotada o no acotada.
2) Calculamos cada uno de los vértices de esta región factible. Si existe solución se encontrará en unos de estos vértices de la región factible.
3) Calculamos el valor de la función objetivo utilizando cada uno de los vértices calculados en el apartado anterior.

4) Ahora observamos si el problema debemos maximizar o minimizar. Si tuviésemos que maximizar cogeremos los valores que hagan máxima la función y si tuviéramos que minimizar tomaremos aquel vértice que me haga mínima la función objetivo.

Una vez realizados estos pasos tendremos:

I. **La región factible está acotada**:
   - Si el valor óptimo le encontramos en un vértice su solución será única.
   - Si el valor óptimo lo encontramos en dos vértices, tendremos infinitas soluciones correspondientes a los puntos del segmento que une ambos vértices.

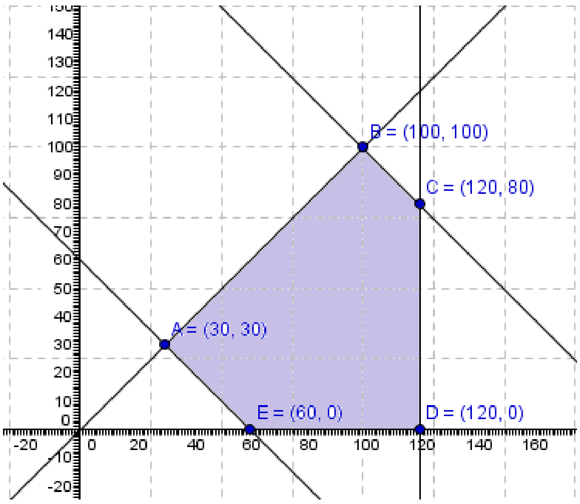
II. **La región factible no está acotada.**
   - Seguimos el criterio utilizado en el apartado I, aunque puede ocurrir que no exista valor óptimo, es decir que la función crezca o decrezca indefinidamente. Para resolver esta clase de problemas utilizaremos mejor el método gráfico.

Ejemplo de región acotada: Una compañía aérea tiene dos aviones, A y B, para cubrir un determinado trayecto. El avión A debe hacer más veces el trayecto que el avión B, pero no puede sobrepasar 120 viajes. Entre los dos aviones deben hacer más de 60 vuelos, pero menos de 200. En cada vuelo, A consume 900 litros de combustible y B 700 litros. ¿Cuántos vuelos debe hacer cada avión para que el consumo sea mínimo?

Llamamos x al número de vuelos del avión A e y al número de vuelos del avión B.

Las restricciones son: $\begin{cases} x \geq y \\ x \leq 120 \\ x + y \geq 60 \\ x + y \leq 200 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

La función objetivo es z= 900x+700y. Debemos minimizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores. Calculamos la región factible:



La región factible está acotada, por tanto existirá máximo y mínimo, aunque el enunciado nos pide el mínimo.

A(30,30) → Z_A= 900·30+700·30=48.000
B(100,100)→ Z_B=900·100+700·100=160.000
C(120,80) → Z_C=900·120+700·80=164.000 → El mínimo se alcanza en el vértice A
D(120,0) → Z_D=900·120+700·0=108.000
E(60,0) → Z_E= 900·60+700·0= 54.000

El mínimo se alcanza en el punto A(30,30) y vale z= 48.000

Por tanto A debe hacer 30 vuelos y B otros 30 para minimizar el consumo de combustible. El consumo será de 48.000 litros

Ejemplo de región no acotada: Se desea realizar una mezcla con dos sustancias, A y B, que ha de contener como mínimo 10 unidades de cada una de ellas.

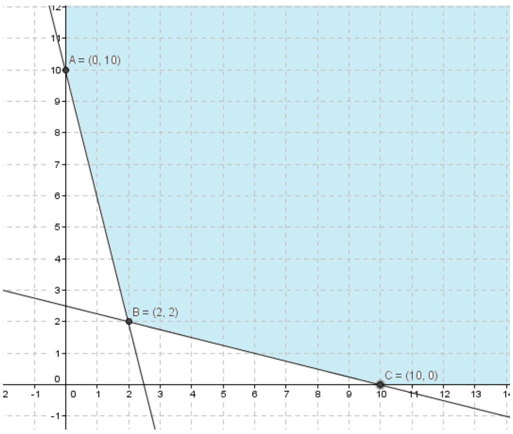
Estas sustancias nos las venden dos proveedores en forma de lotes.
El lote del primer proveedor es tal que los contenidos de B y de A están en relación de 4 a 1 y hay una unidad de A.
El lote del segundo proveedor es tal que los contenidos de A y B están en relación de 4 a 1 y hay una unidad de B.
El primer proveedor vende cada lote a 10€ y el segundo al doble. Ambos proveedores nos venden lotes enteros o fracciones de ellos.
¿Qué número de lotes hemos de comprar para que el coste sea mínimo?

Llamamos x a los lotes del primer proveedor e y a los lotes del segundo proveedor.

	Cantidad	A	B	Coste
Lote I	x	x	4x	10x
Lote II	y	4y	y	20y
Total		x+4y	4x+y	10x+20y

Las restricciones son: $\begin{cases} x + 4y \geq 10 \\ 4x + y \geq 10 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$

La función objetivo será: z=10x+20y. Tenemos que minimizar esta función sujeta a las restricciones anteriores.



Como es una región factible no acotada, habrá o máximo o mínimo y se alcanzará en uno de los vértices.

A(0,10)→ Z_A = 10·0+20·10 = 200

B(2,2)→ Z_B = 10·2+20·2 = 80

C(10,0) → Z_C = 10·10+20·0 = 100

El mínimo se encuentra en el vértice B.

Tomamos un punto de la región factible no acotada P(10,10) → Zp=10·10+20·10= 300

Por tanto hay un mínimo y no un máximo y lo tendremos en el vértice B(2,2)

Para que el coste sea mínimo debemos comprar 2 unidades del lote I y 2 lotes del lote II. El coste ascenderá a 80€.

Resolución gráfica de un problema de programación lineal

Para resolver un problema de programación lineal de manera gráfica seguiremos una serie de pasos.

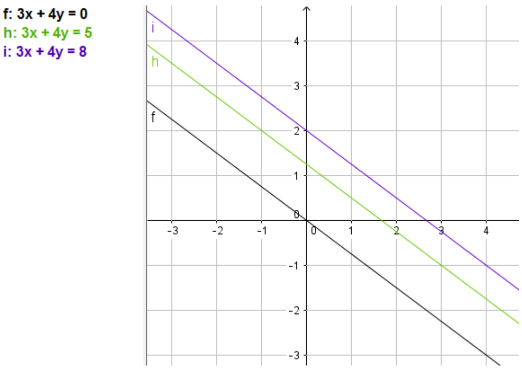
I. Representamos cada una de las inecuaciones y calculamos la región factible.

II. Dada la función objetivo z = ax + by , representamos gráficamente dicha recta igualándola a cero. ax + by = 0 . Dicha recta podremos moverla paralelamente a lo largo del eje Y para ir encontrando el punto que maximiza o minimiza la función objetivo.

III. Si los valores de a y b de la función objetivo son positivos, tendremos una recta con pendiente negativa, es decir decreciente.

- En el caso de que el problema sea de maximización , la solución óptima será el último vértice que toca la recta movible si nos acercamos a +∞ en el eje Y.
- En el caso de que el problema sea de minimización , la solución óptima será el último vértice que toca la recta movible si nos acercamos a - ∞ en el eje Y.

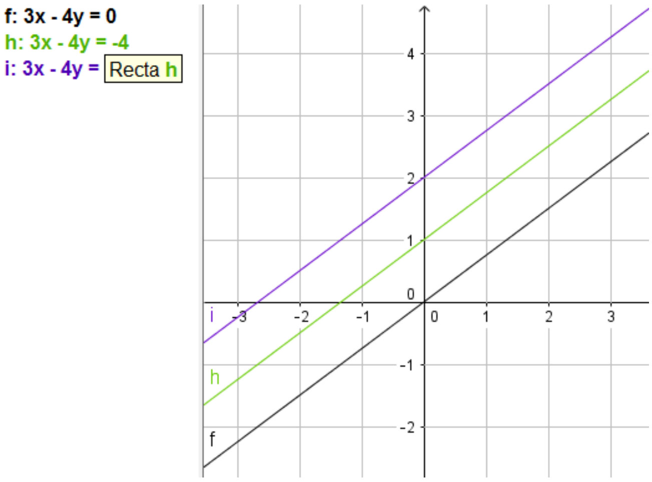
Ejemplo: dada la función objetivo z = 3x + 4y



IV. Dada la función objetivo z= ax+by ,si el valor de a es positivo y el valor de b es negativo tendremos una recta con pendiente positiva, es decir creciente.

- En el caso de que el problema sea de maximización , la solución óptima será el último vértice que toca la recta movible si nos acercamos a - ∞ en el eje Y.

- En el caso de que el problema sea de minimización , la solución óptima será el último vértice que toca la recta movible si nos acercamos a + ∞ en el eje Y.



V. Dada la función objetivo z = ax +by , si el valor de a es negativo podremos resolver el problema considerando que hallar el máximo de z, equivale a calcular el mínimo de –z y que hallar el mínimo de z equivale a calcular el máximo de –z.

Tenemos que tener en cuenta que:

- Si la última recta toca a dos vértices a la vez, tendremos infinitas soluciones correspondientes al segmento que une ambos vértices.

- Si la región es no acotada, podremos observar si la función objetivo decrece o crece indefinidamente ya que podremos tener la posibilidad o no de ver cómo nos alejamos sin dejar de tocar la región factible.

Ejemplo: Una fábrica produce chaquetas. Tres máquinas, de cortar, coser y teñir se emplean en la producción.

Fabricar una chaqueta representa usar la máquina de cortar una hora, la de coser tres horas y la de teñir, una hora. Fabricar unos pantalones representa usar la máquina de cortar una hora, la de coser una hora y la de teñir ninguna hora. La máquina de teñir se puede usar durante tres horas, la de coser doce y la de cortar siete.

Todo lo que se fabrica es vendido y se obtiene un beneficio de ocho euros por cada chaqueta y cinco por cada pantalón.

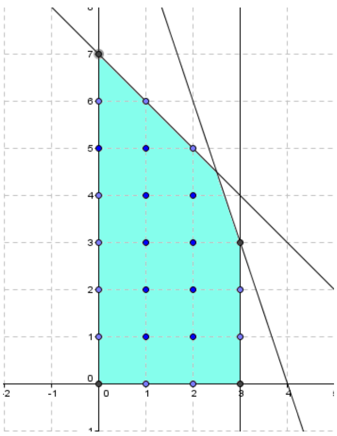
¿Cómo emplearemos las máquinas para conseguir el beneficio máximo?

Llamamos x al número de chaquetas e y al número de pantalones.

	Cantidad	Cortar	Coser	Teñir	beneficio
Chaquetas	x	x	3x	x	8x
Pantalones	y	y	y	0	5y
Total		x+y	3x+y	x	8x+5y

Las restricciones son: $\begin{cases} x + y \leq 7 \\ 3x + y \leq 12 \\ x \leq 3 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$ siendo x,y enteros

La función objetivo será z= 8x+5y



Calculamos los vértices:

A(0,7)→ Z_A = 8·0+5·7 = 35

B(2,5;4,5)→ Z_B = 8·2,5+5·4,5 = 42,5 → No valdría porque no sería una solución entera.

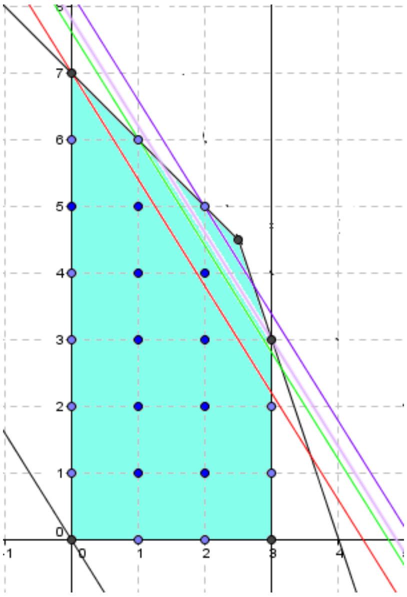
C(3,3) → Z_C = 8·3+5·3=24+15 = 39

D(3,0) → Z_D = 8·3+5·0 = 24

E(0,0) → Z_E = 8·0+5·0 = 0

Nos damos cuenta que el máximo se encuentra en el vértice B, pero esta solución no nos sirve porque x e y no son enteros.

Resolución gráfica



Trazamos la recta 8x + 5y=0 y vamos dibujando rectas paralelas por las diferentes soluciones.

Aquel punto por el que pase la recta más alejada será el máximo buscado.

En este caso como solución entera será el punto (2,5)

Por lo tanto debemos fabricar 2 chaquetas y 5 pantalones para conseguir el máximo beneficio, el cual asciende a:

Z=8x+5y=8·2+5·5=16+25 = 41 euros