Independientemente del número de incógnitas y ecuaciones, estos sistemas pueden clasificarse del mismo modo que los de (2×2):

$$\text{Sistemas}\begin{cases}\text{Compatible}\begin{cases}\text{Determinado (S.C.D.)}\\ \text{Indeterminado (S.C.I.)}\end{cases}\\ \text{Incompatible (S.I.)}\end{cases}$$

Para pasar de un sistema a otro equivalente, se pueden usar las siguientes **Transformaciones de Gauss**:

a) *Cambiar el orden de las ecuaciones del sistema.*

b) *Multiplicar los dos miembros de una ecuación por un mismo número distinto de cero.*

c) *Suprimir una ecuación del sistema que sea combinación lineal de las demás.*

d) *Sustituir una ecuación por la suma de ella más otra ecuación multiplicada por un número real cualquiera.*

e) *Sustituir una ecuación por una combinación lineal de ella y de las restantes, siempre que el coeficiente de la ecuación sustituida, en la combinación lineal, sea distinto de cero.*

Esta última transformación se conoce como **Teorema Fundamental de equivalencia de sistemas.**

- *Analicemos el sistema*

$$\begin{cases}x-y-2z=-1\\ 2x-3y+4z=4\xrightarrow{E_2-2E_1}\\ 5x-y+3z=16\xrightarrow{E_3-5E_1}\end{cases}\begin{cases}x-y-2z=-1\\ -y+8z=6\\ 4y+13z=21\xrightarrow{E_3+4E_2}\end{cases}\begin{cases}x-y-2z=-1\\ -y+8z=6\\ 45z=45\end{cases}$$

El último sistema, como se ve, es escalonado. De la última ecuación obtenemos que $z = 1$, y sustituyendo sucesivamente en la segunda y en la primera obtenemos $y = 2$, $x = 3$. Se trata de un sistema compatible determinado (SCD).

- *Analicemos el sistema*

$$\begin{cases}x-y+3z=4\\ 2x-y-z=6\xrightarrow{E_2-2E_1}\\ 3x-2y+2z=10\xrightarrow{E_3-3E_1}\end{cases}\begin{cases}x-y+3z=4\\ y-7z=-2\\ y-7z=-2\xrightarrow{E_3-E_2}\end{cases}\begin{cases}x-y+3z=4\\ y-7z=-2\\ 0=0\end{cases}$$

En este caso, después de realizar las transformaciones de Gauss, resulta un sistema con dos ecuaciones y tres incógnitas, un sistema compatible indeterminado (SCI).
Se trata de un sistema uniparamétrico, donde una de las incógnitas hace de parámetro y puede tomar cualquier valor. Las otras incógnitas tomarán valores dependiendo del valor que le demos al parámetro. Las soluciones se presentan de la forma:

$$\begin{cases}x=2+4z\\ y=-2+7z\end{cases}\rightarrow\begin{cases}z=k\\ x=2+4k\\ y=-2+7k\end{cases}$$

- *Analicemos el sistema*

$$\begin{cases}x-y+z=3\\ 2x-y+3z=6\xrightarrow{E_2-2E_1}\\ 4x-2y+6z=9\xrightarrow{E_3-4E_1}\end{cases}\begin{cases}x-y+z=3\\ y+z=0\\ 2y+2z=-3\xrightarrow{E_3-2E_2}\end{cases}\begin{cases}x-y+z=3\\ y+z=0\\ 0=-3\end{cases}$$

Como se ve la última ecuación es imposible, por tanto el sistema no tiene solución, es un sistema incompatible (SI).
(También podríamos haber observado que los coeficientes de la tercera ecuación son el doble de los de la segunda, pero el término independiente no está duplicado, lo que genera un absurdo).

Resuelve mediante la matriz inversa el sistema

$$\begin{cases} 6x + y = 15 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$$

Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A \cdot X = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Calculando el determinante de A vemos que vale $|A| = 10$, por tanto podemos hallar la inversa:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -1/10 \\ -1/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Y multiplicamos por A^{-1} por la izquierda:

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & -1/10 \\ -1/5 & 3/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/5 \\ 9/5 \end{pmatrix}$$