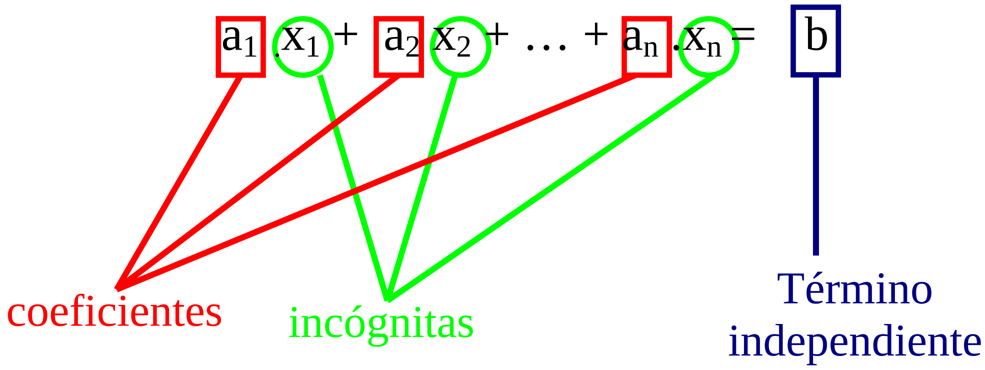
TEMA 1 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1.1 – ECUACIÓN LINEAL

1.1.1 – DEFINICIÓN: Una ecuación lineal es una ecuación polinómica de grado uno con una o varias incógnitas:



1.1.2 – ECUACIONES EQUIVALENTES

Dos ecuaciones son equivalentes cuando **tienen la misma solución o soluciones**.

“Si a los miembros de una ecuación los multiplicamos o dividimos por un mismo número, distinto de cero, la ecuación resultante es equivalente a la primera”.

$$2x + 4y = 6 \approx \begin{cases} 4x + 8y = 12 \\ x + 2y = 3 \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

1.1.3 – RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

Resolver una ecuación es **hallar el valor o valores de las incógnitas que la cumplen**.

Llamamos **grados de libertad** o de incertidumbre al número de incógnitas menos número de ecuaciones y es el número de parámetros que debemos utilizar para resolver la ecuación.

Solución general

$$2x = 5 \Rightarrow g.l = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \Rightarrow \exists! \text{solución}$$

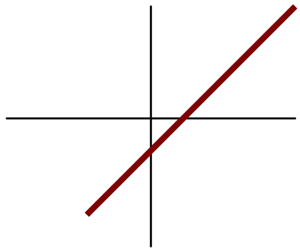
$$2x - y = 5 \Rightarrow g.l = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha - 5 \end{cases} \quad \forall \alpha \in R \Rightarrow \text{Existen infinitas soluciones}$$

$$2x + 5y + z = 5 \Rightarrow g.l = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = 5 - 2\alpha - 5\beta \end{cases} \quad \forall \alpha, \beta \in R \Rightarrow \exists \text{inf inita soluciones}$$

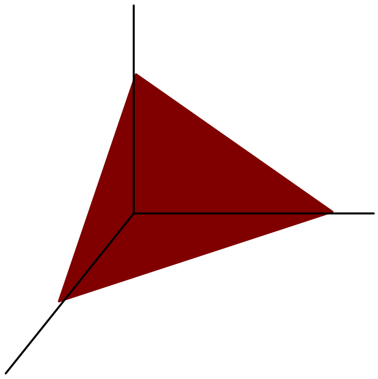
Soluciones particulares: Dándoles valores a los parámetros obtenemos las soluciones particulares.

1.1.4 – INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

- Dos incógnitas: $ax + by = c \Rightarrow$ Una recta en el plano $\Rightarrow$



- Tres incógnitas: $ax + by + cz = d \Rightarrow$ Un plano en el espacio $\Rightarrow$



- Más de tres incógnitas $\Rightarrow$ "Hiperplanos"

1.2 – SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1.2.1 – DEFINICIÓN: Un **sistema de m ecuaciones con n incógnitas** es un conjunto de ecuaciones como:

m ecuaciones

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + \boxed{a_{1n}}x_n = \boxed{b_1} \\
a_{21}x_1 + \boxed{a_{22}}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = \boxed{b_2} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = \boxed{b_m}
\end{array}
$$

términos independientes

n incógnitas

incógnitas

Coeficientes del sistema

1.2.2 – SISTEMAS EQUIVALENTES

- **Sistemas equivalentes:** Dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes si tienen las mismas soluciones. (Es necesario que tengan el mismo número de incógnitas).
- Para resolver un sistema es útil convertirlo en otro equivalentes que sea fácilmente resoluble (Sistemas escalonados)

Transformaciones que convierten un sistema en otro equivalente:

I. Intercambiar entre si dos ecuaciones (ordenarlas)

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 4y = 5 \end{cases} \approx \begin{cases} x + 4y = 5 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

II. Multiplicar ambos miembros de una ecuación por un número, distinto de cero.

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \approx \begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

III. Añadir (suprimir) una ecuación que sea combinación lineal de las demás .

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \approx \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 4 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$$

IV. Sustituir una ecuación por el resultado de sumarle una combinación lineal de las demás.

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \approx \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$$

1.2.3 – SOLUCIÓN DE UN SISTEMA

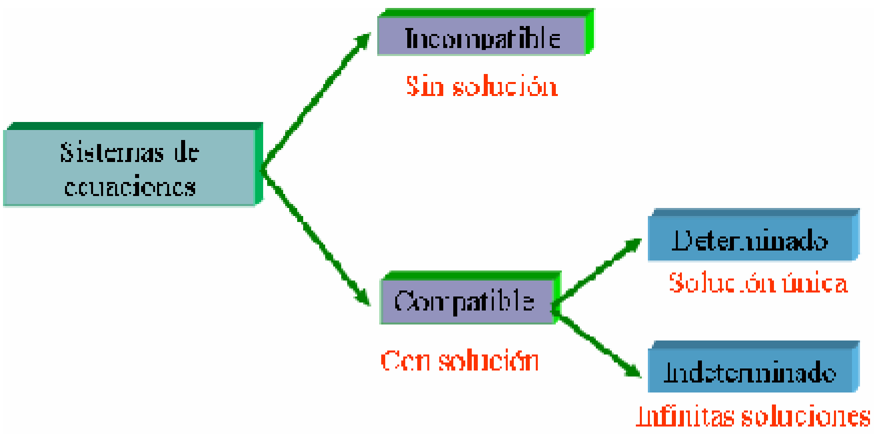
$$\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + ... + a_{1n}.x_n = b_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + ... + a_{2n}.x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}.x_1 + a_{m2}.x_2 + ... + a_{mn}.x_n = b_m \end{cases}$$

Una solución de un sistema es un conjunto ordenado de números reales (s_1, s_2, s_3, … , s_n) tales que:

$$\begin{cases} a_{11}.s_1 + a_{12}.s_2 + ... + a_{1n}.s_n = b_1 \\ a_{21}.s_1 + a_{22}.s_2 + ... + a_{2n}.s_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}.s_1 + a_{m2}.s_2 + ... + a_{mn}.s_n = b_m \end{cases}$$

Resolver un sistema es encontrar todas sus soluciones o decidir que no tiene ninguna.

1.2.4 – SOLUCIONES



- Discutir un sistema es decidir a cuál de estas tres categorías pertenece.
- Un sistema de ecuaciones lineales no puede tener exactamente dos soluciones, tres soluciones, cuatro soluciones,… (Tiene una solución, infinitas o ninguna)

1.2.5 – INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

- **Sistema de ecuaciones con 2 incógnitas** : Posición relativa de rectas en el plano.
  - **Sistema Compatible determinado:** Se cortan en un punto
  - **Sistema Compatible indeterminado:** Rectas coincidentes
  - **Sistema Incompatible:** Rectas paralelas

- **Sistema de ecuaciones con 3 incógnitas:** Posición relativa de planos en el espacio.
  - **Sistema Compatible determinado:** Se cortan en un punto.
  - **Sistema Compatible indeterminado:**
    - **1 grado de libertad:** Se cortan en una recta
    - **2 grados de libertad:** Se cortan en un plano (planos coincidentes)
  - **Sistema Incompatible:** No se cortan

1.3 – SISTEMAS HOMOGÉNEOS

- Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es **homogéneo** si todos los términos independientes son 0. (En caso contrario, algún término independiente no nulo, no es homogéneo)

$$\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + \ldots + a_{1n}.x_n = 0 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + \ldots + a_{2n}.x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}.x_1 + a_{m2}.x_2 + \ldots + a_{mn}.x_n = 0 \end{cases}$$

- Estos sistemas **son siempre compatibles** ya que $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, llamada *solución trivial*, es siempre solución del sistema.
- Será determinado si ésta es la única solución del sistema.

1.4 – SISTEMAS ESCALONADOS

Un sistema escalonado es aquel en el que los coeficientes de las incógnitas situados por debajo de la diagonal principal (elementos que repiten subíndice) son nulos:

$$\begin{cases} x+y-2z=9 \\ 0x-3y+8z=-14 \\ 0x+0y+2z=-5 \end{cases} \approx \begin{cases} x+y-2z=9 \\ \quad -3y+8z=-14 \\ \qquad\quad 2z=-5 \end{cases}$$

Los sistemas escalonados son fácilmente resolubles (De abajo a arriba)

- **Sistema escalonado compatible determinado**

$$\begin{cases} x+y-2z=9 \\ \quad -3y+8z=-14 \\ \qquad\qquad 2z=-5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=9-y+2z=9+2-5=6 \\ y=\dfrac{-14-8z}{-3}=\dfrac{-14+20}{-3}=-2 \\ z=-\dfrac{5}{2} \end{cases} \qquad \boxed{(x,y,z)=(6,-2,-5/2)}$$

- **Sistema escalonado compatible indeterminado**

$$\begin{cases} x+y-2z=9 \\ -3y+8z=-14 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=9-y+2z=9-\dfrac{8\alpha+14}{3}+2\alpha=\dfrac{13-2\alpha}{3} \\ y=\dfrac{8z+14}{3}=\dfrac{8\alpha+14}{3} \\ z=\alpha \end{cases} \qquad \boxed{(x,y,z)=\left(\dfrac{13-2\alpha}{3},\dfrac{8\alpha+14}{3},\alpha\right) \quad \forall\alpha\in R}$$

- **Sistemas incompatibles**

$$\begin{cases} x+y-2z=9 \\ 0x-3y+8z=-14 \\ 0x+0y+0z=-5 \end{cases} \approx \begin{cases} x+y-2z=9 \\ \quad -3y+8z=-14 \\ \qquad\quad 0=-5 \end{cases}$$

Este sistema es incompatible porque no hay ninguna solución (x,y,z) que pueda cumplir la tercera ecuación (la última ecuación no tiene sentido).

1.5 – MÉTODO DE GAUSS

Para convertir un sistema en un sistema escalonado:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+.....+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+.....+a_{2n}x_n=b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+.....+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \approx \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+.....+a_{1n}x_n=b_1 \\ \qquad a_{22}x_2+a_{23}x_3+.....+a_{2n}x_n=b_2 \\ .... \\ \qquad\qquad\qquad a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Haciendo ceros debajo de la diagonal (en la columna C_i con la fila F_i)

Tipos de sistemas

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & \_ & \_ & \_ & \_ \\ 0 & * & \_ & \_ & \_ \\ 0 & 0 & * & \_ & \_ \\ 0 & 0 & 0 & * & \_ \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \text{Nº ecuaciones} = \text{Nº incógnitas} \Rightarrow \text{g.l} = \text{Nº incog - Nº ecuac} = 4 - 4 = 0 \\ \text{Clasificación : Sistema compatible determinado} \Rightarrow \exists!\,\text{solución} \\ \text{Solución : Resolver de abajo arriba} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & \_ & \_ & \_ & \_ \\ 0 & * & \_ & \_ & \_ \\ 0 & 0 & * & \_ & \_ \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \text{Nº ecuaciones} = \text{Nº incógnitas} \Rightarrow \text{g.l} = \text{Nº incog - Nº ecuac} = 4 - 3 = 1 \\ \text{Clasificación : Sistema compatible indeterminado} \Rightarrow \exists\ \text{infinitas soluciones} \\ \text{Solución : Resolver de abajo arriba (dándole a una de las incógnitas el valor de } \alpha) \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & \_ & \_ & \_ & \_ \\ 0 & * & \_ & \_ & \_ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 0 = * \Rightarrow \text{No se puede resolver} \\ \text{Clasificación : Sistema Incompatible} \\ \text{Solución : No tiene solución} \end{cases}$$

Nota: Si al triangularizar hay un “rectángulo de ceros” hay que continuar haciendo ceros:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & \_ & \_ & \_ & \_ \\ 0 & 0 & \_ & \_ & \_ \\ 0 & 0 & \_ & \_ & \_ \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} * & \_ & \_ & \_ & \_ \\ 0 & 0 & \_ & \_ & \_ \\ 0 & 0 & 0 & \_ & \_ \end{array}\right)$$

Hacer un cero “aquí

1.5.1 – GAUSSS: COMPATIBLE DETERMINADO

- **RECTAS** (ax + by = c)
  - S.C.D $\Rightarrow$ Rectas que se cortan en un punto.
  - S.C.I $\Rightarrow$ Rectas coincidentes
  - S.I $\Rightarrow$ Rectas que no se cortan (Paralelas)
- **PLANOS** (ax + by + cz = d)
  - S.C.D $\Rightarrow$ Planos que se cortan en un punto.
  - S.C.I $\Rightarrow \begin{cases} \text{g.l} = 1 \Rightarrow \text{Planos que se cortan en una recta.} \\ \text{g.l} = 2 \Rightarrow \text{Planos que se cortan en un plano} \Rightarrow \text{Planos coincidentes.} \end{cases}$
  - S.I $\Rightarrow$ Planos que no se cortan.

1.5.2 – GAUSSS: COMPATIBLE DETERMINADO

Ejemplo:

$$\begin{cases} x+y-2z=9 \\ 2x-y+4z=4 \\ 2x-y+6z=-1 \end{cases} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 9 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & 6 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{F_2=F_2-2F_1 \\ F_3=F_3-2F_1}} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 9 \\ 0 & -3 & 8 & -14 \\ 0 & -3 & 10 & -19 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3=F_3-F_2}$$

Hacer ceros

Hacer ceros

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 9 \\ 0 & -3 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x+y-2z=9 \\ -3y+8z=-14 \\ 2z=-5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=9-y+2z=9+2-5=6 \\ y=\dfrac{-14-8z}{-3}=\dfrac{-14+20}{-3}=-2 \\ z=-\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Clasificación: Sistema compatible determinado $\Rightarrow \exists$! solución

Solución: (x,y,z) = (6,-2,-5/2)

Interpretación geométrica: Tres planos que se cortan en un punto.

1.5.3 – GAUSS: COMPATIBLE INDETERMINADO

Ejemplo:

$$\begin{cases} x+y-2z=9 \\ 2x-y+4z=4 \\ 4x+y=22 \end{cases} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 9 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 22 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{F_2=F_2-2F_1 \\ F_3=F_3-4F_1}} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 9 \\ 0 & -3 & 8 & -14 \\ 0 & -3 & 8 & -14 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3=F_3-F_2}$$

Hacer ceros

Hacer ceros

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 9 \\ 0 & -3 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x+y-2z=9 \\ -3y+8z=-14 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=9-y+2z=9-\dfrac{8\alpha+14}{3}+2\alpha=\dfrac{13-2\alpha}{3} \\ y=\dfrac{8z+14}{3}=\dfrac{8\alpha+14}{3} \\ z=\alpha \end{cases}$$

Clasificación: Sistema compatible indeterminado $\Rightarrow \exists$ infinitas soluciones

Solución: $(x,y,z)=\left(\dfrac{13-2\alpha}{3},\dfrac{8\alpha+14}{3},\alpha\right) \quad \forall\alpha\in R$

Interpretación geométrica: Tres planos que se cortan en una recta

1.5.4 – GAUSS: INCOMPATIBLE

Ejemplo

$$\begin{cases} x+y-2z=9 \\ 2x-y+4z=4 \\ 2x-y+4z=-1 \end{cases} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 9 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & -1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 = F_2 - 2F_1 \\ F_3 = F_3 - 2F_1}}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 9 \\ 0 & -3 & 8 & -14 \\ 0 & -3 & 8 & -19 \end{array}\right)$$

Hacer ceros

Hacer ceros

$F_3 = F_3 - F_2$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 9 \\ 0 & -3 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x + \ \ y - 2z = 9 \\ \quad -3y + 8z = -14 \\ \qquad\qquad 0 = -5 \end{cases}$$

Clasificación: Sistema Incompatible
Solución: No existe solución
Interpretación geométrica: Tres planos que no se cortan.

1.5.5 – CASO ESPECIAL

Ejemplo:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+2y+z=5 \\ 3x+3y-z=5 \end{cases} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & -1 & 5 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 = F_2 - 2F_1 \\ F_3 = F_3 - 3F_1}}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right)$$

Hacer ceros

Hacer ceros

$F_3 = F_3 - 4F_2$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x+y+z=3 \\ \quad -z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2-\alpha \\ y = \alpha \\ z = 1 \end{cases}$$

Clasificación: Sistema compatible indeterminado $\Rightarrow \exists$ infinitas soluciones

Solución: $(x,y,z) = (2 - \alpha, \alpha, 1) \quad \forall\, \alpha \in R$

Interpretación geométrica: Tres planos que se cortan en una recta

1.6 – RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE SISTEMAS DE ECUACIONES

1. Se identifican las incógnitas
2. Se expresa el enunciado del problema mediante sistemas de ecuaciones.
3. Se resuelve el sistema (Gauss)
4. Se comprueba que las soluciones del sistema tienen sentido con respecto al enunciado del problema.

1.7 – SISTEMAS CON PARÁMETROS

1. Se ordenan las ecuaciones e incógnitas. El parámetro lo más abajo y la derecha posible.
2. Se aplica el método de Gauss teniendo en cuenta que la fila que cambiamos no podemos multiplicarla por el parámetro.
3. Se igualan, por separado, los elementos de la diagonal a cero.
4. Un caso más que el número de valores del parámetro.