MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

(Responder só aos exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1 = 3 puntos, exercicio 2 = 3 puntos, exercicio 3 = 2 puntos, exercicio 4 = 2 puntos)

OPCIÓN A

1) Decidimos investir unha cantidade de 15000 euros en bolsa, comprando accións de tres entidades *A*, *B* e *C*. Investimos en *A* o dobre que en *B* e en *C* xuntas. Transcorrido un ano, as accións da entidade *A* revalorizáronse un 3%, as de *B* un 4% e as de *C* perderon un 2% e, como consecuencia, obtivemos un beneficio de 380 euros. Determina canto investimos en cada unha das entidades.

2) A ganancia producida por unha máquina que durou 6 anos estímase pola función $f(x) = ax^3 + bx^2,\ 0 \le x \le 6$.
($f(x)$ representa a ganancia (en miles de euros) aos x anos de funcionamento, a e b son constantes)

(a) Determina o valor de a e b , se se sabe que a función $f(x)$ ten un punto de inflexión no punto (2, 32).

(b) Se $a = -2$ e $b = 12$, calcula o ano no que a máquina produciu a maior ganancia, ¿cal foi o valor da devandita ganancia? Para estes valores, representa a gráfica da función $f(x)$ en [0, 6].

3) Trátase contra unha determinada enfermidade ao 40% das árbores dunha parcela. Sábese que enferman o 5% das árbores tratadas e o 30% das non tratadas contra a enfermidade.

(a) Calcula a probabilidade de que non enferme unha árbore calquera da parcela.

(b) Supoñamos que un 80% das árbores non están enfermas e que na parcela hai 625 árbores, ¿cal é a probabilidade de que máis de 475 árbores desta parcela non estean enfermas?

4) Suponse que o número de telespectadores (en millóns) dun programa semanal de televisión, aproxímase a unha distribución normal, con desviación típica de 0´5 (millóns). A dirección do programa afirma que a media semanal de telespectadores que ven o citado programa é de, polo menos, 7 millóns. Para contrastar tal afirmación, obsérvase unha mostra de 10 semanas, obténdose unha media semanal de 6´54 millóns de telespectadores.

(a) Utilizando a mostra dada, calcula un intervalo do 95% de confianza para a media semanal de telespectadores dese programa.

(b) Formula un test para contrastar que a media semanal de telespectadores que ven o programa é a que afirma a dirección, fronte á alternativa de que é menor, ¿cal é a conclusión á que se chega, cun nivel de significación do 5%?

OPCIÓN B

1) Consideremos o seguinte sistema de inecuacións $x \ge 1,\quad y \ge x,\quad x + y \le 10,\quad 3y - 2x \le 10$.

(a) Representa graficamente a rexión factible e calcula os seus vértices.

(b) ¿En que punto ou puntos desa rexión alcanza os valores máximo e mínimo a función $f(x, y) = 2x - 2y + 7$?

2) Nun ámbito controlado, o tamaño dunha poboación de aves, $P(t)$ (en centos), axústase á función

$$P(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50, & 0 \le t \le 10 \\ 95 - \dfrac{250}{t}, & t > 10 \end{cases}$$, onde t é o tempo transcorrido en anos.

(a) ¿A partir de que ano crecerá a poboación $P(t)$? ¿Nalgún ano a poboación é mínima?

(b) Determina o valor ao que tende a poboación de aves co paso do tempo.

(c) Calcula o intervalo de tempo no que a poboación se mantén entre 5000 e 7500 aves.

3) O 40% dos aspirantes a un posto de traballo superou unha determinada proba de selección. Terminan sendo contratados o 80% dos aspirantes que superan esa proba e o 5% dos que non a superan.

(a) Calcula a porcentaxe de aspirantes ao posto de traballo que terminan sendo contratados.

(b) Se un aspirante non é contratado, ¿cal é a probabilidade de que superase a proba de selección?

4) Realízase unha enquisa para determinar a intención de voto ao partido político MLM. Dos 2000 entrevistados, 600 din que votarán ao MLM.

(a) Calcula un intervalo do 95% de confianza para a proporción de futuros votantes a favor dese partido.

(b) Unha información publicada por certa prensa afirma que "a intención de voto para ese partido é de, polo menos, o 33%". Formula un test para contrastar a devandita afirmación fronte a que a proporción de futuros votantes é inferior, tal como parece prognosticar a enquisa. ¿A que conclusión se chega, cun nivel de significación do 1%

CiUG
COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA

PAU **Código: 36**

SETEMBRO 2012

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

(Responder só aos exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1 = 3 puntos, exercicio 2 = 3 puntos, exercicio 3 = 2 puntos, exercicio 4 = 2 puntos)

OPCIÓN A

1) (a) Determina a matriz X sabendo que $X^{-1} \cdot B^t = A + B$, sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, B^t a matriz trasposta de B e X^{-1} a matriz inversa de X.

(b) Dada $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$, calcula, se o hai, algún valor de "a" para o que se verifique que A^2 sexa a matriz identidade.

2) A cantidade de auga (en centos de litros) que chega a unha depuradora para o seu procesado ao longo de certo día, vén estimada pola función $C(t) = -2t^3 + 75t^2 - 600t + 2000,\ \ 0 \le t \le 24$, onde t é o tempo en horas transcorrido a partir das 0:00 horas.

(a) Determina en que períodos se produce un aumento e unha diminución da cantidade de auga.
(b) Calcula a cantidade máxima e mínima de auga.
(c) Calcula o punto de inflexión e representa a gráfica da función $C(t)$, $0 \le t \le 24$.

3) Sábese que en certa poboación de persoas de 18 ou máis anos, o 60% está en contra da eutanasia.

(a) Realízase unha enquisa a unha mostra aleatoria de 150 persoas desa poboación, ¿cal é a probabilidade de que máis da mitade se manifeste en contra da eutanasia?

(b) Se nesa poboación o 68% son maiores de 65 anos e o 75% deles está en contra da eutanasia, ¿que porcentaxe dos que teñen entre 18 e 65 anos está en contra da eutanasia?

4) O tempo de espera para a realización de certa proba médica nun hospital segue unha distribución normal con desviación típica de 5 días. A xerencia afirma que "o tempo medio de espera para a realización da devandita proba é como máximo de 20 días". Para contrastar esa afirmación tomouse unha mostra aleatoria de 100 pacientes que precisaban facerse a proba, resultando que o tempo medio de espera foi de 21 días.

(a) Formula un test para contrastar a hipótese que afirma a xerencia fronte a que o tempo medio foi superior. ¿A que conclusión se chega cun nivel de significación do 5%? ¿Chegaríase á mesma conclusión cun nivel de significación do 1%?

(b) Explica, no contexto do problema, en que consisten os erros de tipo **I** e de tipo **II**.

OPCIÓN B

1) Considérase a función $f(x, y) = x + 2y$ suxeita ás restricións: $x + y \le 9$; $y - x \le 5$; $2y \ge 4 - x$; $0 \le x \le 6$; $y \ge 0$

(a) Representa a rexión R do plano determinada polo conxunto de restricións e calcula os seus vértices.
(b) Calcula os puntos de R onde a función alcanza os seus valores máximo e mínimo. Calcula eses valores.
(c) Responde ao apartado anterior se se elimina a restrición $y \ge 0$ do anterior conxunto de restricións.

2) Nunha empresa a relación entre a produción x (expresada en miles de toneladas) e o custo medio de fabricación $C(x)$ (expresado en miles de euros) é do tipo $C(x) = 2 + x + \dfrac{9}{x},\ \ 1 \le x \le 10$.

(a) Calcula a cantidade de produción que minimiza o custo medio de fabricación e o custo medio mínimo.
(b) Calcula a cantidade de produción que maximiza o custo medio de fabricación e o custo medio máximo.
(c) Se non desexan superar os 12 mil euros de custo medio de fabricación ¿entre que valores deberá estar comprendida a produción?

3) A probabilidade de obter rendibilidade positiva no prazo dun ano cun fondo de investimento recentemente constituído é 0´4. Se no primeiro ano se obtivo rendibilidade positiva, a probabilidade de obtela no segundo ano é 0´6. A probabilidade de non obter rendibilidade positiva nin no primeiro nin no segundo ano é 0´48.

(a) ¿Que probabilidade hai de obter rendibilidade positiva no segundo ano?
(b) Calcula a probabilidade de obter rendibilidade positiva nalgún dos dous anos.

4) (a) Quérese estimar a porcentaxe de españois que, tendo dereito a voto, non votarán nas próximas eleccións ao Parlamento Europeo. ¿Cal debe ser o tamaño da mostra para garantir unha marxe de erro non superior ao 2´5% cun nivel do 95% de confianza?

(b) Selecciónase unha mostra aleatoria de 1540 españois con dereito a voto e deles 693 aseguran que non votarán nas próximas eleccións ao Parlamento Europeo. Calcula un intervalo do 95% de confianza para a porcentaxe de españois con dereito a voto que non votarán nas citadas eleccións. ¿Que erro máximo se está a cometer nesta estimación?

Criterios de Avaliación / Corrección

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

EXERCICIO 1 **(3 puntos)**

- Formular o sistema: **1´50 puntos**.
- Resolución: **1´50 puntos**.

EXERCICIO 2 **(3 puntos)**

(a) **1´25 puntos:**
- Chegar a formular o sistema de dúas ecuacións coas dúas incógnitas “a” e “b”: **0´75 puntos**.
- Resolver o sistema, obtendo “a” e “b”: **0´50 puntos**.

(b) **1´75 puntos:**
- Por calcular os puntos críticos: **0´25 puntos**.
- Por determinar o máximo: **0´25 puntos**.
- Comprobar que é máximo absoluto: **0´25 puntos**.
- Polo valor da ganancia máxima: **0´25 puntos**.
- Por reflexar na gráfica o punto de inflexión: **0´25 puntos**.
- Representación gráfica: **0´50 puntos**.

EXERCICIO 3 **(2 puntos)**

(a) **0´75 puntos:**
- Expresar o teorema das probabilidades totais e identificar cada unha das probabilidades da fórmula anterior: **0´50 puntos**.
- Resultado final: **0´25 puntos**.

(b) **1´25 puntos:**
- Formular a probabilidade pedida: **0´25 puntos**.
- Paso da binomial a normal: **0´50 puntos**.
- Corrección de medio punto: **0´25 puntos**.
- Tipificación e resultado: **0´25 puntos**.

EXERCICIO 4 **(2 puntos)**

(a) **1 punto:**
- Expresión do intervalo de confianza: **0´25 puntos.**
- Calcular numéricamente os extremos do intervalo: **0´50 puntos.**
- Responder á pregunta no contexto do problema: **0´25 puntos.**

(b) **1 punto:**
- Especificar as hipóteses nula e alternativa: **0´25 puntos**.
- Establecer a rexión crítica: **0´25 puntos**.
- Avaliar o estatístico de contraste para a mostra dada: **0´25 puntos**.
- Conclusión: **0´25 puntos**.

OPCIÓN B

EXERCICIO 1 **(3 puntos)**

(a) **2 puntos:**
- Vértices da rexión factible: **1 punto**.
- Representación gráfica da rexión factible: **1 punto** (por debuxar as rectas e a rexión do plano limitada por elas e os catro vértices).

(b) **1 punto:**
- Puntos da rexión nos que a función obxectivo alcanza o valor máximo: **0´75 puntos**.
- Punto da rexión no que alcanza o valor mínimo: **0´25 puntos**.

EXERCICIO 2 **(3 puntos)**

(a) **1´25 puntos:**
- Determinar a primeira derivada en cada un dos anacos da función: **0´75 puntos**.
- Responder á pregunta: ano a partir do que crece a poboación: **0´25 puntos.**
- Ano no que a poboación é mínima: **0´25 puntos.**

(b) **0´75 puntos:**
- Calcular o límite da función: **0´50 puntos**.
- Por determinar o valor ao que tende a poboación de aves co paso do tempo: **0´25 puntos**.

(c) **1 punto**:
- Solución no primeiro anaco: **0´50 puntos.**
- Solución no segundo anaco: **0´50 puntos**.

<u>EXERCICIO 3</u> **(2 puntos)**

(a) **1 punto:**
- Aplicar o teorema das probabilidades totais: **0´50 puntos**.
- Cálculos e resultado final: **0´50 puntos**.

(b) **1 punto:**
- Formulación da probabilidade pedida: **0´25 puntos**.
- Expresión da probabilidade condicionada anterior: **0´25 puntos**.
- Cálculos e resultado final: **0´50 puntos**.

<u>EXERCICIO 4</u> **(2 puntos)**

(a) **1 punto:**
- Expresión do intervalo de confianza: **0´25 puntos.**
- Calcular numéricamente os extremos do intervalo: **0´50 puntos.**
- Responder á pregunta no contexto do problema: **0´25 puntos.**

(b) **1 punto:**
- Especificar as hipóteses nula e alternativa: **0´25 puntos**.
- Establecer a rexión crítica: **0´25 puntos**.
- Avaliar o estatístico de contraste para a mostra dada: **0´25 puntos**.
- Conclusión: **0´25 puntos**.

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

<u>EXERCICIO 1</u> **(3 puntos)**

(a) **2 puntos**:
- Despexar a matriz X: **0´50 puntos**.
- Calcular a suma das matrices A e B: **0´25 puntos**.
- Calcular a matriz inversa de $A+B$: **0´75 puntos**.
- Obter a matriz X: **0´50 puntos.**

(b) **1 punto**:
- Calcular a matriz A^2: **0´25 puntos**.
- Formular a igualdade pedida: **0´25 puntos**.
- Resolver para calcular o valor de a: **0´50 puntos.**

<u>EXERCICIO 2</u> **(3 puntos)**

(a) **1´75 puntos**:
- Determinar a primeira derivada: **0´25 puntos**.
- Calcular os puntos críticos:**0´25 puntos**.
- Determinar os intervalos de crecemento e de decrecemento: **0´75 puntos**.
- Determinar os periodos de tempo pedidos: **0´50 puntos.**

(b) **0´50 puntos**:
- Cantidade máxima e mínima de auga: **0´25 puntos** por cada unha delas.

(c) **0´75 puntos**:
- Calcular o punto de inflexión: **0´25 puntos**.
- Representación gráfica da función: **0´50 puntos**.

<u>EXERCICIO 3</u> **(2 puntos)**

(a) **1´25 puntos:**
- Formular a probabilidade pedida: **0´25 puntos**.
- Paso da binomial á normal: **0´50 puntos**.
- Corrección de medio punto: **0´25 puntos.**
- Tipificación e resultado final: **0´25 puntos.**

(b) **0´75 puntos:**
- Resolver, ben coa definición da probabilidade condicionada ou co cadro de continxencia ou coa árbore: **0´75 puntos**.

EXERCICIO 4 **(2 puntos)**

(a) **1’50 puntos:**
- Especificar as hipóteses nula e alternativa: **0´25 puntos**.
- Establecer a rexión crítica: **0´25 puntos**.
- Avaliar o estatístico de contraste para a mostra dada: **0´25 puntos**.
- Conclusión para o nivel de significación do 5%: **0´25 puntos.**
- Rexión crítica e conclusión para o nivel do 1%: **0´50 puntos**.

(b) **0´50 puntos:**
- Explicar, no contexto do problema, en que consisten os erros de tipo I e de tipo II: **0´25 puntos** por cada un deles.

OPCIÓN B

EXERCICIO 1 **(3 puntos)**

(a) **1´5 puntos:**
- Vértices da rexión factible: **1 punto** (**0´50 puntos** polos catro que intersecan aos eixes de coordenadas máis **0´50 puntos** polos outros dous).
- Representación gráfica da rexión factible: **0´50 puntos** (por debuxar as rectas e a rexión do plano limitada por elas e os correspondentes vértices).

(b) **0´75 puntos:**
- Punto da rexión no que a función obxectivo alcanza o valor máximo e valor máximo: **0´25 puntos**.
- Puntos da rexión nos que alcanza o valor mínimo e valor mínimo: **0´50 puntos.**

(c) **0´75 puntos:**
- Sinalar a nova rexión factible co novo vértice: **0´25 puntos**.
- Punto da nova rexión no que a función obxectivo alcanza o valor máximo: **0´25 puntos**.
- Puntos da nova rexión nos que alcanza o valor mínimo: **0´25 puntos.**

EXERCICIO 2 **(3 puntos)**

(a) **1´50 puntos:**
- Determinar a primeira derivada: **0´25 puntos**.
- Calcular os puntos críticos: **0´25 puntos**.
- Xustificar que é un punto mínimo: **0´25 puntos**.
- Cantidade de produción que minimiza o custo medio: **0´25 puntos**.
- Valor mínimo da función: **0´25 puntos**.
- Polo custo medio mínimo: **0´25 puntos**.

(b) **0´50 puntos:**
- Cantidade que maximiza o custo medio de fabricación: **0´25 puntos**.
- Custo medio máximo: **0´25 puntos**.

(c) **1 punto:**
- Resolver a inecuación: **0´75 puntos**.
- Responder entre que valores estará comprendida a produción: **0´25 puntos.**

EXERCICIO 3 **(2 puntos)**

(a) **1´25 puntos:**
- Calcular a probabilidade de obter rendibilidade positiva no primeiro e no segundo ano: **0´50 puntos.**
- Obter a probabilidade pedida, utilizando ou o cadro de continxecia, ou a árbore e o teorema das probabilidades totais: **0´75 puntos**.

(b) **0´75 puntos:**
- Formular a probabilidade pedida: **0´25 puntos.**
- Expresión da probabilidade da unión anterior: **0´25 puntos**.
- Cálculos e resultado final: **0´25 puntos**.

EXERCICIO 4 **(2 puntos)**

(a) **1 punto:**
- Formulación: **0´25 puntos**.
- Cálculo de *n*: **0´50 puntos**.
- Expresión do valor (e valores) enteiro de *n*: **0´25 puntos**

(b) **1 punto:**
- Expresión do intervalo de confianza: **0´25 puntos.**
- Calcular numéricamente os extremos do intervalo: **0´50 puntos.**
- Erro máximo que se está a cometer nesta estimación: **0´25 puntos.**

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

O/A alumno/a debe responder só aos exercicios dunha das dúas opcións (**A** ou **B**)

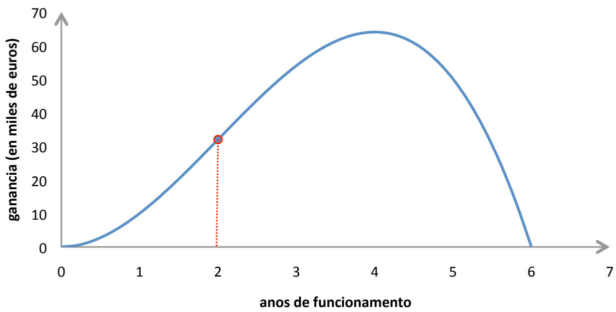
OPCIÓN A

Exercicio 1. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

– *Formular o sistema* $\begin{cases} x+y+z=15000 \\ x=2(y+z) \\ \frac{3}{100}x+\frac{4}{100}y-\frac{2}{100}z=380 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=15000 \\ x-2y-2z=0 \\ 3x+4y-2z=38000 \end{cases}$ **1´50 puntos**.

sendo *x* a cantidade investida na entidade *A*, *y* a cantidade investida na *B* e z na *C* (**0´50 puntos** por cada unha das tres ecuacións)
– *Resolución (por calquera método)* $x = 10000$, $y = 3000$, $z = 2000$.
"Investimos 10000 euros na entidade A **0´50 puntos**, *3000 na entidade B* **0´50 puntos** *e 2000 na entidade C"* **0´50 puntos**.

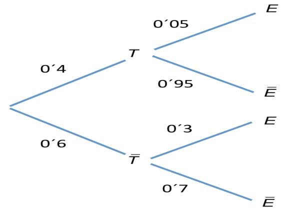
Exercicio 2. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)
A ganancia producida por unha máquina estímase pola función $f(x)=ax^3+bx^2$, 0≤x≤ 6 (*f*(*x*) representa a ganancia (en miles de euros) aos *x* anos de funcionamento, *a* e *b* son constantes)
(a) **1´25 puntos**: *Determina o valor de "a" e "b", se se sabe que a función ten un punto de inflexión no punto (2,32)*
– Determinar a primeira e segunda derivada: $f'(x)=3ax^2+2bx$; $f''(x)=6ax+2b$ **0´25 puntos**.
– Pola condición de punto de inflexión no punto x = 2: $f''(2)=0 \Leftrightarrow 12a+2b=0$ **0´25 puntos**.
– Pola condición de que *f*(*x*) pasa polo punto (2, 32) $f(2)=32 \Leftrightarrow 8a+4b=32$ **0´25 puntos**.
– Resolver o sistema $\begin{cases} 6a+b=0 \\ 2a+b=8 \end{cases}$ obtendo o valor $a = -2$ **0´25 puntos** e $b = 12$ **0´25 puntos**.
(b) **1´75 puntos**: *Calcula o ano no que a máquina produciu a maior ganancia*, *¿cal foi o valor da devandita ganancia? Representa a gráfica da función f(x) en [0, 6]*
– Polos puntos críticos: $f'(x)=-6x^2+24x$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow x(24-6x)=0 \Rightarrow x=0\ y\ x=4$ **0´25 puntos**.
– Determinar o máximo: $f''(x)=-12x+24$, $f''(0)=24>0$; $f''(4)=-24<0$ **0´25 puntos,** deducíndose que en x = 4 a función presenta un máximo e é absoluto xa que *f*(0) =0 e *f*(6) = 0 **0´25 puntos**, é dicir, "*no cuarto ano de funcionamento a máquina produce a ganancia máxima*".
– "*A ganancia máxima ascendeu a 64000 euros*" **0´25 puntos**.
– *Representación gráfica da función* **0´50 puntos**., *reflexando o punto de inflexión:* **0´25 puntos**.
Recuperando a información que tiñamos sobre *f*(x), os puntos de corte co eixe x son (0, 0) e (6, 0). No punto (4, 64) hai un máximo, no punto (0, 0) un mínimo e no enunciado din que o punto (2, 32) é un punto de inflexión, o que reflexaremos na gráfica, (neste exercicio restábanse 0´25 puntos se se representaba unha parábola)



Exercicio 3. (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)
Trátase contra unha determinada enfermidade ao 40% das árbores dunha parcela. Enferman o 5% das árbores tratadas e o 30% das non tratadas
(a) **0´75 puntos**: *Calcula a probabilidade de que non enferme unha árbora calquera da parcela*
– Definimos os sucesos, E: unha árbore enferma, T: unha árbore se trata contra a enfermidade. Os datos que nos dan son: $P(T)=0´40$, $P(E/T)=0´05$, $P(E/\overline{T})=0´30$

– Utilizar o teorema das probabilidades totais e sustituir os valores de cada probabilidade na fórmula anterior: $P(\bar{E}) = P(T)P(\bar{E}/T) + P(\bar{T})P(\bar{E}/\bar{T}) = 0'4 \cdot 0'95 + 0'6 \cdot 0'7 = 0'8$ (**0´50 puntos** por identificar cada unha das probabilidades na fórmula anterior+ **0´25 puntos** por chegar ao resultado final).
Se se fai o diagrama de árbore, puntúase **0´25 puntos** máis **0´50 puntos** se se aplica ben a fórmula das probabilidades totais e se chega ao resultado final. Se se fai por medio de táboas, puntúase esta con **0´50 puntos** máis **0´25 puntos** polo resultado final.

	T	$\bar{T}$	
E	2	18	20
$\bar{E}$	38	42	80
	40	60	100



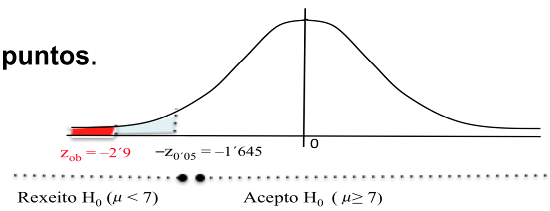
(b) **1´25 puntos**: *Supoñamos que un 80% das árbores non están enfermas e que na parcela hai 625 árbores, ¿cal é a probabilidade de que máis de 475 árbores desta parcela non estean enfermas?*
– Sexa a variable aleatoria binomial X = número de árbores enfermas, en mostras de 625 árbores. $X \sim B(n = 625, p = 0'8)$.
– Formular a probabilidade pedida: $P(X > 475)$ **0´25 puntos.**
– Paso da binomial á normal: $X \sim B(n = 625, p = 0'8) \Rightarrow X' \sim N\left(\mu = np = 500, \sigma = \sqrt{np(1-p)} = 10\right)$ (Pasamos da variable X discreta á variable X' continua) **0´50 puntos**.
– Corrección de medio punto: $P(X > 475) = P(X' \geq 475'5)$ **0´25 puntos**.
– Tipificación e resultado final: $P(X' \geq 475'5) = P(Z \geq -2'45) = 0'9929$ **0´25 puntos**.

Exercicio 4. (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)
Sexa *"X = número de telespectadores (en millóns) dun programa semanal de televisión"* $X \sim N(\mu, \sigma = 0'5)$. A dirección do programa afirma que a media semanal de telespectadores dese programa é de polo menos 7 millóns, é dicir, $\mu \geq 7$. Para constrastar tal afirmación, obsérvase unha mostra de 10 semanas, obténdose unha media semanal de 6´54 millóns de telespectadores.
$\bar{X}$: *estatístico media mostral* $\xrightarrow[\text{evaluámolo para a mostra dada}]{}$ $\bar{x} = 6'54$ (*millóns de espectadores*)

Estatístico de proba: $\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

(a) **1 punto**. *Utilizando a mostra dada, calcula un intervalo do 95% de confianza para a media semanal de telespectadores dese programa.*
– Expresión do intervalo de confianza: $P\left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$ **0´25 puntos.**
– Calcular numéricamente os extremos do intervalo 6´23 e 6´85 **0´50 puntos**
–Responder á pregunta no contexto do problema: *"en base a mostra dada, estímase cun 95% de confianza, que a media semanal de telespectadores dese programa está entre 6.230.000 e 6.850.000 espectadores"* **0´25 puntos.**
(b) **1 punto**. *Formula un test para contrastar que a media semanal de telespectadores que ven o programa é a que afirma a dirección, fronte á alternativa de que é menor, ¿cal é a conclusión á que se chega, cun nivel de significación do 5%*

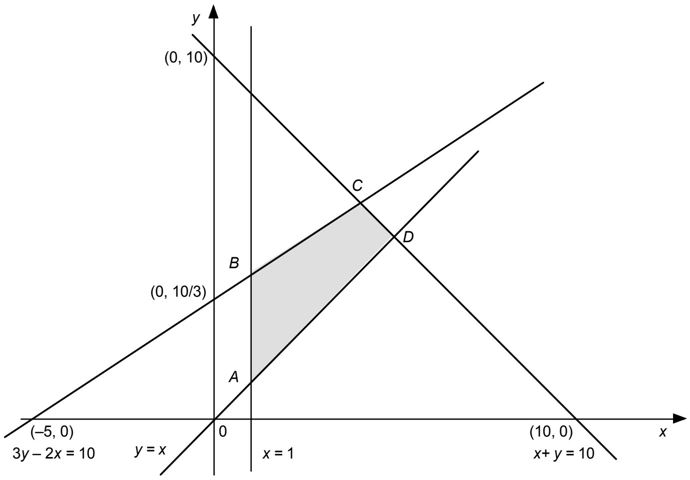
– Especificar as hipótesis nula e alternativa: $\begin{cases} H_0 : \mu \geq 7 \\ H_1 : \mu < 7 \end{cases}$ **0´25 puntos.**



– Estatístico de proba: $\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$
– Establecer a rexión crítica: (-∞,-1´645) **0´25 puntos.**
– Avaliar o estatístico de proba, *"baixo a hipótese H_0 certa"*, para a mostra dada: $z_{ob} = \dfrac{6'54 - 7}{0'5/\sqrt{10}} = -2'9$ **0´25 puntos.**
– Decisión: $z_{ob} = -2'9 \in (-\infty, -1'645) \Rightarrow$ *Rexeito H_0. Cos datos desta mostra e con risco de equivocarnos dun 5%, concluiríamos que a media semanal de telespectadores é menor de 7 millóns, é dicir, non é a que afirma a dirección do programa* **0´25 puntos**. (o último risco de equivocarnos, ante esta afirmación, é o valor-P = P(Z<-2´9) = 0´0019, é dicir, aproximadamente dun 0´19%, sendo polo tanto o test significativo, xa que o risco de equivocarnos non é do 5% de partida, senon moito máis baixo: dun 0´19%).

OPCIÓN B

Exercicio 1. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)
Sexa o seguinte sistema de inecuacións: $x \geq 1$, $y \geq x$, $x + y \leq 10$, $3y - 2x \leq 10$
(a) **2 puntos**: *Representa graficamente a rexión factible e calcula os seus vértices.*
– *Vértices da rexión factible* **1 punto**, polos vértices: *A* (1, 1); *B* (1, 4); *C* (4, 6); *D* (5, 5) **0´25 puntos** por cada un deles.
– *Representación gráfica da rexión factible* **1 punto**:



(b) **1 punto**: *Punto ou puntos desa rexión onde alcanza os valores máximo e mínimo a función* $f(x,y)=2x-2y+7$

– A función alcanza o mínimo no punto *B* (1, 4) **0´25 puntos**.

– A función alcanza o máximo nos puntos *A* (1, 1) **0´25 puntos**, *D* (5, 5) **0´25 puntos** e nos infinitos puntos do segmento *AD* **0´25 puntos**.

Exercicio 2. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

Sexa *P*(*t*) o tamaño dunha poboación de aves (en centos) nun entorno controlado

$$P(t)=\begin{cases} t^2-8t+50, & 0\le t\le 10 \\ 95-\dfrac{250}{t}, & t>10 \end{cases}$$

(a) **1´25 puntos**: *¿A partir de que ano crecerá a poboación P(t)? ¿Nalgún ano a poboación é mínima?*

– No intervalo (0, 10), $P'(t)=2t-8$ **0´25 puntos**. No (10, +∞), $P'(t)=\dfrac{250}{t^2}$ **0´50 puntos**.

– En (0, 10), $P'(t)=2t-8>0 \Leftrightarrow t>4$; en (10, +∞) $P'(t)>0$ para todo t, é dicir, a poboación P(t) crece sempre no intervalo (10, +∞) "*A partir do cuarto ano crece a poboación de aves* **0´25 puntos**.

– No (0, 10), $P''(t)=2>0$. Polo tanto, "*a poboación é mínima no cuarto ano*" (*t* = 4) **0´25 puntos**.

(b) **0´75 puntos:** *Determina o valor ao que tende a poboación de aves co paso do tempo*

– Teremos que calcular o límite da función *P*(*t*): $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(95-\dfrac{250}{t}\right)=95$ **0´50 puntos**.

– "*A poboación tende a 9500 aves co paso do tempo*" **0´25 puntos**.

(c) **1 punto**: *Calcula o intervalo de tempo no que a poboación se mantén entre 5000 e 7500 aves*

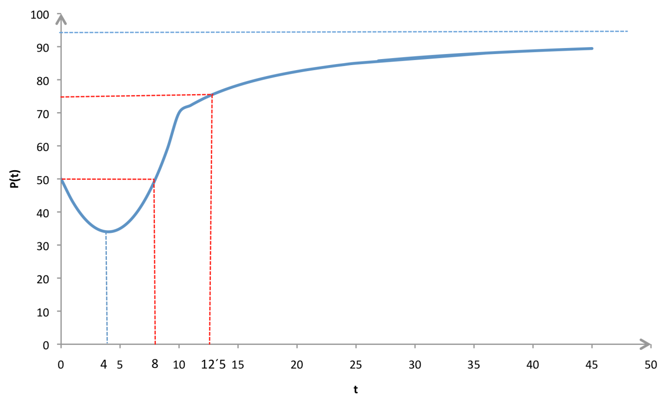
– Haberá que buscar o tempo *t* para o que se verifica 50 ≤ *P*(*t*) ≤ 75

– Primeiro buscamos o anaco que corresponde a cada desigualdade, e como para *t* = 0 *P*(0) = 50 e para *t* = 10 *P*(10) = 70, temos que no primeiro anaco:

$$[0,10]:\ P(t)\ge 50 \Leftrightarrow t^2-8t+50\ge 50 \Rightarrow t(t-8)\ge 0 \left\langle \begin{array}{l} \text{como } t\ge 0 \\ t-8\ge 0 \Rightarrow \underline{t\ge 8}\ \ \textbf{0´50 puntos} \end{array}\right.$$

e no segundo (10, +∞): $P(t)\le 75 \Leftrightarrow 95-\dfrac{250}{t}\le 75 \Rightarrow \dfrac{250}{t}\ge 20 \Rightarrow \underline{t\le 12'5}$ **0´50 puntos**

Entón, "*dende o oitavo ano ata o doce e medio, mantense a poboación entre 5000 e 7500 aves*"



Ainda que non se pide a gráfica da función, poderíase trazar, xa que axuda a escoller as desigualdades nos anacos correspondentes da función.

Exercicio 3. (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)

O 40% dos aspirantes a un posto de traballo superou unha determinada proba de selección. Terminan sendo contratados o 80% dos aspirantes que superan esa proba e o 5% dos que non a superan.

(a) **1 punto**: *Calcula a porcentaxe de aspirantes ao posto de traballo que terminan sendo contratados.*

Denominamos aos sucesos *C: un aspirante é contratado, S: un aspirante supera a proba de selección.* Os datos que recollemos do enunciado son: $P(S)=0'4;\ \ P\left(C/S\right)=0'8;\ \ P\left(C/\overline{S}\right)=0'05$

– Formular a probabilidade pedida: $P(C)$ **0´25 puntos.**

– Utilizar o teorema das probabilidades totais e sustituír os valores de cada probabilidade na fórmula anterior: $P(C)=P(S)\cdot P\left(C/S\right)+P(\bar{S})\cdot P\left(C/\bar{S}\right)=0'4\cdot 0'8+0'6\cdot 0'05=0'35$ **0´50 puntos.**

– "*O 35% dos aspirantes terminan sendo contratados*" **0´25 puntos.**

(b) **1 punto**: *Se un aspirante non é contratado, ¿cal é a probabilidade de que superase a proba de selección?*

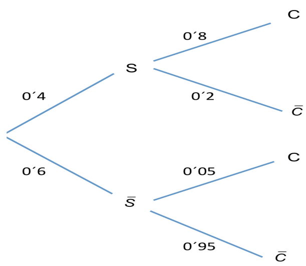
– Formular a probabilidade pedida $P\left(S/\bar{C}\right)$ **0´25 puntos.**

– Expresión da probabilidade condicionada anterior $P\left(S/\bar{C}\right)=\dfrac{P(S\cap\bar{C})}{P(\bar{C})}=\dfrac{P(S)\cdot P\left(\bar{C}/S\right)}{1-P(C)}$ **0´25 puntos.**

– Sustituír os valores de cada probabilidade e resultado final $P\left(S/\bar{C}\right)=\dfrac{0'4\cdot 0'2}{0'65}=0'123$ **0´50 puntos.**

Tamén podemos facer o exercicio construíndo o diagrama de árbore, nese caso, a árbore ben feito puntúase con **0´50 puntos** e os apartados (a) e (b) con **0´75 puntos** cada un deles. No caso de facer cadro valórase con **1 punto**, e os apartados (a) e (b) con **0´50 puntos** cada un deles.

	C	$\bar{C}$	
S	32	8	40
$\bar{S}$	3	57	60
	35	65	100



Exercicio 4. (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)

Realízase unha enquisa para determinar a intención de voto ao partido MLM, de 2000 entrevistados, 600 din que votarán ao MLM

Sexan *"p : proporción de votantes a favor do MLM (parámetro poboacional a estimar)*

$\hat{P}$: *proporción mostral de votantes a favor do MLM, en mostras de* 2000 *entrevistados* (*estatístico mostral*)

$\downarrow \xrightarrow[\text{avaliación de } \hat{P} \text{ para a mostra dada}]{} \hat{p}=600/2000=0'3$ (*estimación puntual de p*)

(a) **1 punto**. C*alcula un intervalo do 95% de confianza para a proporción de futuros votantes a favor dese partido.*

– Expresión do intervalo de confianza: $P\left(\underbrace{\hat{P}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}_{L_1}\le p\le \underbrace{\hat{P}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}_{L_2}\right)=1-\alpha$ **0´25 puntos.**

– Calcular numéricamente os extremos do intervalo, avaliando para a mostra dada os estatísticos L_1 e L_2, de forma que, o parámetro "*p*" decoñecido estimámolo polo seu estimador puntual coñecido: $\hat{p}$, resultando:

$L_1 \xrightarrow[\text{avaliamos para a mostra dada}]{} 0'3-1'96\sqrt{\dfrac{0'3\cdot 0'7}{2000}}=0'3-0'02=0'28$ **0´25 puntos**

$L_2 \xrightarrow[\text{avaliamos para a mostra dada}]{} 0'3+1'96\sqrt{\dfrac{0'3\cdot 0'7}{2000}}=0'3+0'02=0'32$ **0´25 puntos**

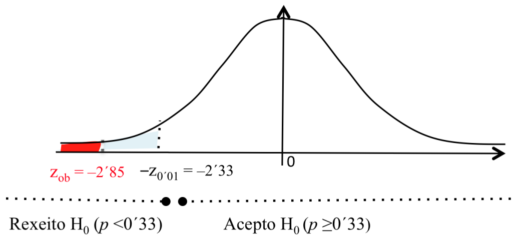
– Responder á pregunta no contexto do problema, concluíndo que: *"en base a mostra dada, estímase cun 95% de confianza, que a proporción de futuros votantes do partido MLM, está entre un 28% e un 32%* (erro máximo cometido na estimación dun 2%) **0´25 puntos.**

(b) **1 punto.** *Unha información publicada por certa prensa afirma que "a intención de voto para ese partido é de, polo menos, o 33%". Formula un test para contrastar a devandita información fronte a que a proporción de futuros votantes é inferior, tal como parece prognosticar a enquisa. ¿A que conclusión se chega cun nivel de significación do 1%?*

– Especificar as hipóteses nula e alternativa:

$\begin{cases} H_0: p\ge 0'33 \\ H_1: p<0'33 \end{cases}$ **0´25 puntos.**

– Estatístico de proba: $\dfrac{\hat{P}-p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}\sim N(0,1)$



–Establecer a rexión crítica: $z_{0'01}=2'33,\ (-\infty,-2'33)$ **0´25 puntos.**

– Avaliar o estatístico de proba, *"baixo H_0 certa"*, para a mostra dada: $z_{ob}=\dfrac{0'3-0'33}{\sqrt{\dfrac{0'33\cdot 0'67}{2000}}}=-2'85$ **0´25 puntos.**

– Decisión: $z_{ob}=-2'85\in(-\infty,-2'33)\Rightarrow$ *Rexeito H_0. Cun risco de equivocarnos do 1%, concluiríamos que a proporción de futuros votantes ao MLM é menor do 33% que afirma a información publicada pola prensa* **0´25 puntos.** (o último risco de equivocarnos, ante esta afirmación, é o valor-*P* = *P*(*Z* < –2´85) = 0´0022, é dicir, dun 0´22%, sendo polo tanto o test significativo).

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

O/A alumno/a debe responder só aos exercicios dunha das dúas opcións (**A** ou **B**)

OPCIÓN A

Exercicio 1. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

(a) **2 puntos**: *Determina a matriz X, sabendo que* $X^{-1}\cdot B^t = A+B$ *, sendo* $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

– Despexar a matriz *X*: $X = B^t\left(A+B\right)^{-1}$ **0´50 puntos**.

– Calcular a suma das matrices $A+B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **0´25 puntos**.

– Calcular a matriz inversa $\left(A+B\right)^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ **0´75 puntos**.

– Determinar $B^t=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **0´25 puntos**, e $X=\begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ **0´25 puntos**.

(b) **1 punto**: *Dada* $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$, *calcula se o hai, algún valor de "a" para o que se verifique que* A^2 *sexa a matriz identidade*.

– Calcular a matriz $A^2=\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ a^2+a & 1 \end{pmatrix}$ **0´25 puntos**.

– Formular a igualdade pedida $\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ a^2+a & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **0´25 puntos**.

– Formular as ecuacións $\begin{cases} a^2=1 \\ a^2+a=0 \end{cases}$ **0´25 puntos**.

– Resolver para calcular o valor de "*a*", sendo a única solución posible "*a* = –1" **0´25 puntos**.

Exercicio 2. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

Sexa $C(t) = -2t^3 + 75t^2 - 600t + 2000,\ 0 \le t \le 24$ a cantidade de auga (en centos de litros) que chega a unha depuradora para o seu procesado ao longo de certo día e *t* o tempo en horas transcurrido a partir das 0:00 horas.

(a) **1´75 puntos**: *Determina en que períodos se produce un aumento e unha diminución da cantidade de auga.*

– Determinar a primeira derivada $C'(t) = -6t^2 + 150t - 600$ **0´25 puntos**.

– Calcular os puntos críticos $C'(t)=0 \Leftrightarrow t^2 - 25t + 100 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=5 \\ t=20 \end{cases}$ **0´25 puntos**.

– Determinar os intervalos de crecemento e de decrecemento

	(0, 5)	(5, 20)	(20, 24)
t	*t* = 1	*t* = 10	*t* = 22
signo de C´(t)	*C´*(1)< 0	*C´*(10)> 0	*C´*(22)< 0

No intervalo (0, 5) e no (20, 24) a función *C*(t) é decrecente **0´50 puntos**. No (5, 20) a función C(t) é crecente **0´25 puntos**.

– Contestamos á pregunta do exercicio. "*Prodúcese un aumento da cantidade de auga dende as 5:00 horas ata as 20:00 horas"* **0´25 puntos.** *Prodúcese unha diminución dende as 0:00 horas ata as 5:00 e dende as 20:00 ata as 24:00 horas"* **0´25 puntos**.

(b) **0´50 puntos**: *Calcula a cantidade máxima e mínima de auga.*

– No punto *t* = 5 a función *C*(t) presenta un mínimo. $C_{mín}$ = *C*(5) = 625.

– No punto t = 20 a función *C*(t) presenta un máximo. $C_{máx}$ = *C*(20) = 4000.

"Cantidade mínima de auga 62.500 litros" **0´25 puntos**. *"Cantidade máxima de auga 400.000 litros"* **0´25 puntos.**

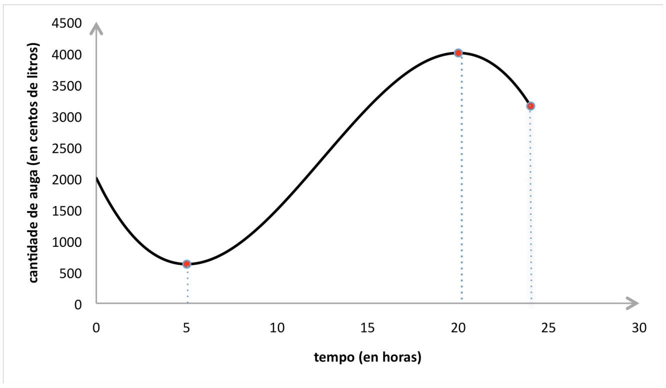
(En *t* = 0 *C*(0) = 2000 e en *t* = 24 *C*(24) = 3152. Logo os puntos 5 e 20 son mínimo e máximo absoluto, respectivamente)

(c) **0´75 puntos**: Calcula o punto de inflexión e representa a gráfica da función *C*(*t*), 0 ≤ *t* ≤ 24.

– *O punto de inflexión preséntase no (12´5, 2312´5)* **0´25 puntos.**

– *Representación gráfica da función* **0´50 puntos.**

Recuperamos toda a información que tiñamos sobre *C*(*t*) e representamos a súa gráfica



Exercicio 3. (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)
Sábese que en certa poboación de persoas de 18 ou máis anos, o 60% está en contra da eutanasia.
(a) **1´25 puntos**: *Realízase unha enquisa a unha mostra aleatoria de 150 persoas desa poboación, ¿cal é a probabilidade de que máis da metade se manifeste en contra da eutanasia?*
– Definimos a variable aleatoria *X* = número de persoas de 18 ou máis anos, que están en contra da eutanasia nunha mostra aleatoria de 150 persoas desa poboación. X segue unha distribución binomial, *B*(*n* = 150, *p* = 0,6).
– Formulamos a probabilidade pedida $P(X>75)=P(X\geq 76)$ **0´25 puntos.**

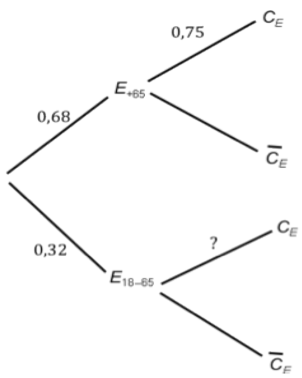
– Paso da binomial á normal $X\sim B(150,0{,}6)\Rightarrow X'\sim N\left(\mu=np=90,\sigma=\sqrt{np(1-p)}=6\right)$ **0,50 puntos** (**0,25 puntos** por determinar a media e **0,25 puntos** pola desviación típica. Cambiamos a variable X pola X´ por ter que pasar dunha variable aleatoria discreta a unha continua, e no paso seguinte facemos a corrección de medio punto pola mesma razón).
– Corrección de medio punto $P(X>75)=P(X'>75{,}5)$ **0´25 puntos**.

– Tipificación e resultado final $P(X'>75{,}5)=P(Z>-2{,}42)=0{,}9922$ **0´25 puntos**.
(b) **0´75 puntos**: *Se nesa poboación o 68% son maiores de 65 anos e o 75% deles está en contra da eutanasia, ¿que porcentaxe dos que teñen entre 18 e 65 anos está en contra da eutanasia?*
– Denominamos os sucesos e formulamos as probabilidades do enunciado do exercicio:
E_{+65}: unha persoa desa poboación é maior de 65 anos,
E_{18-65}: unha persoa desa poboación tén entre 18 e 65 anos,
C_E: unha persoa desa poboación está en contra da eutanasia,
$P(E_{+65})=0{,}68,\ P(C_E/E_{+65})=0{,}75,\ P(C_E)=0{,}60$
– Calculamos o dato que nos falta e que é imprescindible para poder determinar a probabilidade pedida por calquera dos seguintes métodos:
– $P(C_E\cap E_{+65})=P(E_{+65})\cdot P(C_E/E_{+65})=0{,}68\cdot 0{,}75=0{,}51$ **0´25 puntos**,

poñemos o resultado no cadro e completámolo **0´25 puntos**, e a probabildade pedida é $P(C_E/E_{18-65})=\dfrac{9}{32}=0{,}2812$ **0´25 puntos**.
Outro método, se utilizamos a definición de probabilidade condicionada,

	C_E	$\overline{C}_E$	
E_{+65}	51	17	68
E_{18-65}	9	23	32
	60	40	100

$P(C_E/E_{18-65})=\dfrac{P(C_E)-P(C_E\cap E_{+65})}{1-P(E_{+65})}=\dfrac{0{,}6-0{,}51}{1-0{,}68}=0{,}2812$ **0´75 puntos.**



Por último, se usamos a árbore (pola árbore **0,25 puntos**):

– Facemos uso do teorema das probabilidades totais:
$0{,}6=0{,}68\cdot 0{,}75+0{,}32\cdot P(C_E/E_{18-65})$ **0,25 puntos**.

– Despexamos $P(C_E/E_{18-65})=\dfrac{0{,}09}{0{,}32}=0{,}2812$ **0,25 puntos**.

"*Podemos polo tanto concluír que o 28,12% dos que teñen entre 18 e 65 anos está en contra da eutanasia*"

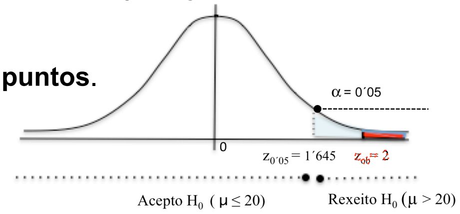
Exercicio 4. (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)
Sexa *"X = días de espera para a realización de certa proba médica nun hospital"*, $X\sim N(\mu,\sigma=5)$.
A xerencia afirma que "o tempo medio de espera para a realización da devandita proba é como máximo de 20 días, é dicir, $\mu\leq 20$. Para constrastar esa afirmación, tomouse unha mostra aleatoria de 100 pacientes que precisaban facer a proba, resultando que o tempo medio de espera foi de 21 días.

$\left| n = 100 \text{ pacientes} \right.$

$\bar{X}$: *estatístico media mostral* $\equiv$ *tempo medio de espera en mostras de* 100 *pacientes*

$\downarrow \xrightarrow[\text{evaluación do estatístico para a mostra dada}]{} \bar{x} = 21$ *días* : *estimación puntual de* μ

(a) **1´50 puntos**: *Formula un test para contrastar a hipótese que afirma a xerencia fronte a que o tempo medio foi superior. ¿A que conclusión se chega cun nivel de significación do 5%? ¿Chegaríase á mesma conclusión cun nivel de significación do 1%?*



– Especificar as hipótesis nula e alternativa: $\begin{cases} H_0 : \mu \le 20 \\ H_1 : \mu > 20 \end{cases}$ **0´25 puntos**.

– Estatístico de proba: $\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

– Establecer a rexión crítica: (1´645, +∞) **0´25 puntos**.

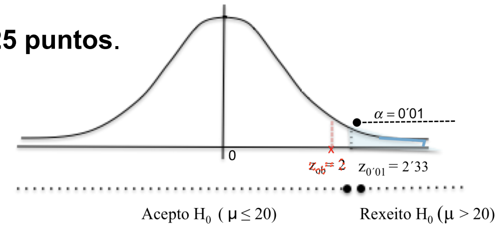
– Avaliar o estatístico de proba, *"baixo a hipótese H_0 certa"*: $z_{ob} = \dfrac{21-20}{5/\sqrt{100}} = 2$ **0´25 puntos**.

– Decisión: $z_{ob} = 2 > z_{crít} = 1'645 \Rightarrow$ *Rexeito H_0. Cos datos desta mostra e con risco de equivocarnos dun 5%, concluiríamos que o tempo medio de espera para a realización da devandita proba foi superior a 20 días, é dicir, rexeitaríamos o que afirma a xerencia.* **0´25 puntos**. (O último risco de equivocarnos, ante esta afirmación, é o valor-P = P(Z > 2) = 0´0228, é dicir, aproximadamente dun 2´3%).

– Para o nivel do 1%, establecer a rexión crítica: (2´33, +∞) **0´25 puntos**.

– Decisión: $z_{ob} = 2 < z_{crít} = 2'33 \Rightarrow$ *Acepto H_0*.

Non se chegaría á mesma conclusión, xa que con risco de equivocarme dun 1% non podería rexeitar H_0.
Non se pode concluír que o tempo medio é superior a 20 días.
Aceptaría a afirmación da xerencia **0´25 puntos**.



(b) **0´50 puntos**: *Explica, no contexto do problema, en que consisten os erros de tipo I e de tipo II.*

– $\alpha = P\left(Rechazar\ H_0/H_0\ certa\right) \equiv P\left(Aceptar\ H_1/H_1\ falsa\right)$. O erro de tipo I consiste en rexeitar a hipótese que afirma a xerencia, cando realmente é certa. Decidiriamos que o tempo medio de espera é superior a 20 días cando realmente non o é **0´25 puntos**.

– $\beta = P\left(Aceptar\ H_0/H_0\ falsa\right) \equiv P\left(Rechazar\ H_1/H_1\ certa\right)$. O erro de tipo II consiste en aceptar a hipótese que afirma a xerencia, cando realmente é falsa. Decidiriamos que o tempo medio de espera é como máximo de 20 días, cando realmente non o é **0´25 puntos**.

OPCIÓN B

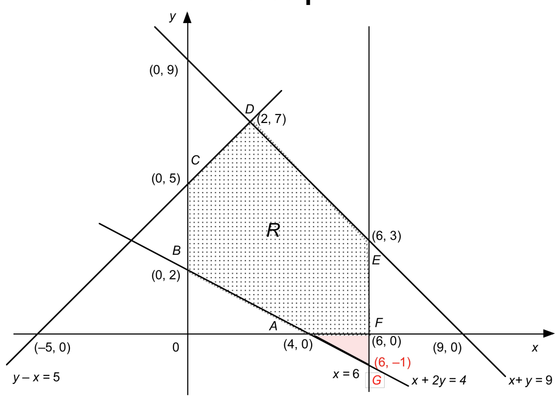
Exercicio 1. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

Sexa a función $f(x, y) = x + 2y$ suxeita ás restricións: $x + y \le 9$, $y - x \le 5$, $2y \ge 4 - x$, $0 \le x \le 6$, $y \ge 0$.

(a) **1´50 puntos**: *Representa a rexión R do plano determinada polo conxunto de restricións e calcula os seus vértices.*

– *Vértices da rexión factible* **1 punto** repartido en: *A* (4, 0) e *B* (0, 2) **0´25 puntos** ;*C* (0, 5) e *F* (6, 0) **0´25 puntos**; *D* (2, 7) **0´25 puntos** e por *E* (6, 3) **0´25 puntos**.

– *Representación gráfica da rexión factible* **0´50 puntos**:



(b) **0´75 puntos**: *Calcula os puntos de R onde a función alcanza os seus valores máximo e mínimo. Calcula eses valores.*

– A función alcanza o máximo no vértice *D* (2, 7). Valor máximo = 16 **0´25 puntos**.

– A función alcanza o mínimo nos vértices *A* (4, 0), *B* (0, 2) **0´25 puntos**, e nos infinitos puntos do segmento *AB.* Valor mínimo = 4 **0´25 puntos**.

(c) **0´75 puntos**: *Responde ao apartado anterior se se elimina a restrición $y \ge 0$ do anterior conxunto de restricións.*

– Sinalar a nova rexión factible calculando o novo vértice G (6, –1) (rexión do plano limitada polos vértices *GBCDE*) **0´25 puntos**.

– A función alcanza o máximo no vértice *D* (2, 7). Valor máximo = 16 **0´25 puntos**.

– A función alcanza o mínimo nos vértices *G* (6, –1), *B* (0, 2), e nos infinitos puntos do segmento *GB.* Valor mínimo = 4 **0´25 puntos**.

Exercicio 2. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)
Nunha empresa a relación entre a produción x (expresada en miles de toneladas) e o custo medio de fabricación $C(x)$ (expresado en miles de euros) é do tipo $C(x) = 2 + x + \dfrac{9}{x}$, $1 \le x \le 10$

(a) **1´50 puntos**: *Calcula a cantidade de produción que minimiza o custo medio de fabricación e o custo medio mínimo.*

– Determinar a primeira derivada $C'(x) = 1 - \dfrac{9}{x^2}$ **0´25 puntos.**

– Calcular os puntos críticos $C'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ $x = -3$ *non válido*) **0´25 puntos.**

– Xustificar que en x = 3 hai un *mínimo*, calculando $C''(x) = \dfrac{18}{x^3}$; $C''(3) > 0$ **0´25 puntos.**

– Cantidade de produción que minimiza o custo medio: "*para 3000 toneladas de produción o custo medio é mínimo*" **0´25 puntos.**
– Valor mínimo da función: $C_{mín} = C(3) = 8$ **0´25 puntos.**
Polo custo medio mínimo: "*O custo mínimo é 8000 euros*" **0´25 puntos.**
(Observar que hai que responder ás preguntas do exercicio, expresándoas nas correspondentes unidades, xa que noutro caso se acabaría restando 0´50 puntos neste apartado).
(b) **0´50 puntos:** *Calcula a cantidade de produción que maximiza o custo medio de fabricación e o custo medio máximo.*
– Cantidade que maximiza o custo medio de fabricación: $C(1)$=12, $C(10)$ = 12´9 e a función é continua, logo "*para 10.000 toneladas de produción o custo medio é máximo*" **0´25 puntos.**
– Custo medio máximo: "*é de 12.900 euros*" **0´25 puntos.**
(c) **1 punto**: *Se non desexan superar os 12 mil euros de custo medio de fabricación ¿entre que valores deberá estar comprendida a produción?*
– Formulamos a desigualdade, é dicir, buscamos o valor (ou valores) de x para o que se verifica:

$C(x) \le 12 \Leftrightarrow 2 + x + \dfrac{9}{x} \le 12$ **0´25 puntos.**

– Operamos na desigualdade anterior: $x^2 - 10x + 9 \le 0$ **0´25 puntos.**
– Resolvemos a inecuación: $1 \le x \le 9$ **0´25 puntos.**
– Respondemos á pregunta do exercicio: "*Para non superar os 12.000 euros de custo medio de fabricación, a produción ten que estar comprendida entre 1.000 e 9.000 toneladas*" **0´25 puntos.**

Exercicio 3. (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)
A probabilidade de obter rendibilidade positiva no prazo dun ano cun fondo de investimento recentemente constituído é 0´4. Se no primeiro ano se obtivo rendibilidade positiva, a probabilidade de obtela no segundo ano é 0´6. A probabilidade de non obter rendibilidade positiva nin no primeiro nin no segundo ano é 0´48.
(a) **1´25 puntos**: *¿Que probabilidade hai de obter rendibilidade positiva no segundo ano?*
Denominamos aos sucesos R_1^+: *obter rendibilidade positiva no primeiro ano,* R_2^+: *obter rendibilidade positiva no segundo ano.*

Os datos que recollemos do enunciado son: $P\left(R_1^+\right) = 0´4$, $P\left(R_2^+ / R_1^+\right) = 0´6$, $P\left(\bar{R}_1^+ \cap \bar{R}_2^+\right) = 0´48$

– Se o facemos usando a táboa de continxencia, calculamos, en primeiro lugar, a probabilidade de obter rendibilidade positiva no primeiro e no segundo ano:

$P\left(R_1^+ \cap R_2^+\right) = P\left(R_1^+\right) \cdot P\left(R_2^+ / R_1^+\right) = 0´4 \cdot 0´6 = 0´24$ **0´50 puntos.**

Completamos a táboa: **0´50 puntos**

– A probabilidade pedida é $P\left(R_2^+\right) = 0´36$ **0´25 puntos.**

	R_2^+	$\bar{R}_2^+$	
R_1^+	24	16	40
$\bar{R}_1^+$	12	48	60
	36	64	100

– Se o facemos utilizando o teorema das probabilidades totais, primeiro temos que calcular:

$P\left(\bar{R}_2^+ / \bar{R}_1^+\right) = \dfrac{P\left(\bar{R}_1^+ \cap \bar{R}_2^+\right)}{P\left(\bar{R}_1^+\right)} = \dfrac{0,48}{0,6} = 0,8$ **0´50 puntos.** Logo, $P\left(R_2^+ / \bar{R}_1^+\right) = 1 - 0,8 = 0,2$ **0´25 puntos.**

$P\left(R_2^+\right) = P\left(R_1^+\right) \cdot P\left(R_2^+ / R_1^+\right) + P\left(\bar{R}_1^+\right) \cdot P\left(R_2^+ / \bar{R}_1^+\right)$ **0´25 puntos.**

$P\left(R_2^+\right) = 0,4 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,2 = 0,36$ **0´25 puntos.**

– Se o facemos construíndo o diagrama de árbore: **0´75 puntos** e chegar ao resultado pedido **0´50 puntos**
(b) **0,75 puntos**: *Calcula a probabilidade de obter rendibilidade positiva nalgún dos dous anos.*

– Formular a probabilidade pedida $P\left(R_1^+ \cup R_2^+\right)$ **0´25 puntos.**

– Expresión da probabilidade da unión: $P\left(R_1^+ \cup R_2^+\right) = P\left(R_1^+\right) + P\left(R_2^+\right) - P\left(R_1^+ \cap R_2^+\right)$ **0´25 puntos.**

– Cálculos e resultado final $P\left(R_1^+ \cup R_2^+\right) = 0,4 + 0,36 - 0,24 = 0,52$ **0´25 puntos.**

Este exercicio pódese facer tamén utilizando as leis de Morgan.

Exercicio 4. (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)

(a) **1 punto**. *Quérese estimar a porcentaxe de españois que, tendo dereito a voto, non votarán nas próximas eleccións ao Parlamento Europeo. ¿Cal debe ser o tamaño da mostra para garantir unha marxe de erro non superior ao 2,5% cun nivel do 95% de confianza?*

Sexan *"p : proporción de españois con dereito a voto que "non votarán" nas próximas eleccións ao Parlamento Europeo (parámetro poboacional a estimar)*

$\hat{P}$: *proporción mostral de españois con dereito a voto que "non votarán" nas próximas eleccións ao Parlamento Europeo, en mostras de tamaño "n" (estatístico mostral, estimador puntual de p)*

O estatístico a utilizar é $\dfrac{\hat{P}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim N(0,1)$. Como non coñecemos unha estimación puntual previa de *"p"*, tomamos o caso máis desfavorable para *"p"*, *p* = 1/2, (xa que a función f(*p*) = *p*(1–*p*) se maximiza para *p* = 1/2).

– Formulamos a marxe de erro non superior ao 2,5%: $z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}} \le 0{,}025$ **0´25 puntos.**

– Substituímos na fórmula: $1{,}96\cdot\sqrt{\dfrac{1/4}{n}} \le 0{,}025$ **0´25 puntos.**

– Despexamos *"n"*: *n* ≥ 1536,64 **0´25 puntos.**

– Concluímos, coa expresión do valor (e valores) enteiro de *n*: "*Para garantir ese erro, con ese nivel de confianza, necesitamos mostras de 1537 ou máis españois con dereito a voto*" **0´25 puntos.**

(b) **1 punto**. *Selecciónase unha mostra aleatoria de 1540 españois con dereito a voto e deles 693 aseguran que non votarán nas próximas eleccións ao Parlamento Europeo. Calcula un intervalo do 95% de confianza para a porcentaxe de españois con dereito a voto que non votarán nas citadas eleccións. ¿Que erro máximo se está a cometer nesta estimación?*

– Expresión do intervalo de confianza: $P\left(\underbrace{\hat{P}-z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}_{L_1} \le p \le \underbrace{\hat{P}+z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}_{L_2}\right)=1-\alpha$ **0´25 puntos.**– Calcular numéricamente os extremos do intervalo, avaliando para a mostra dada os estatísticos L_1 e L_2, de forma que, o parámetro "*p*" decoñecido estimámolo polo valor da súa estimación puntual $\hat{p}$ = 693/1540 = 0,45

resultando: $L_1 \xrightarrow[\text{avaliamos para a mostra dada}]{} 0{,}45-1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}45\cdot 0{,}55}{1540}}=0{,}45-0{,}0248=0{,}4252$ **0´25 puntos.**

$L_2 \xrightarrow[\text{avaliamos para a mostra dada}]{} 0{,}45+1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}45\cdot 0{,}55}{1540}}=0{,}45+0{,}0248=0{,}4748$ **0´25 puntos.**

"*Estímase, cun 95% de confianza, que entre un 42,52% e un 47,48%, aproximadamente, de españois con dereito a voto, non votarán nas próximas eleccións ao Parlamento Europeo*"

– O erro máximo que se está a cometer nesta estimación é dun 2,48% **0´25 puntos.**