CiUG
COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA

PAU

XUÑO 2011

Código: 36

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

(O alumno/a debe responder só aos exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1 = 3 puntos, exercicio 2 = 3 puntos, exercicio 3 = 2 puntos, exercicio 4 = 2 puntos)

OPCIÓN A

1) Dada a matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula a inversa da matriz (A^2+I), sendo I a matriz identidade de orde 3.

2) Unha empresa merca diversos artigos de adorno e empaquétaos en caixas para a súa distribución.

O custo promedio por caixa (en euros) está dado por $C(x)=3x-18\ln x+\dfrac{120}{x}+50,\ x>0$, sendo x o número de caixas que empaqueta ($\ln$: logaritmo neperiano). Determina o número de caixas que deben empaquetar para minimizar o custo promedio por caixa C(x).

3) Quérese facer un estudo sobre a situación laboral dos traballadores en tres sectores da economía que denotaremos por B_1, B_2 e B_3. A metade dos traballadores pertencen ao primeiro sector B_1, e o resto repártense en partes iguais entre os outros dous sectores B_2 e B_3. O 8% dos do sector B_1, o 4% dos do sector B_2 e o 6% dos do sector B_3 están no paro.

(a) Calcula a porcentaxe de paro entre os traballadores de dito estudo.

(b) ¿Que porcentaxe dos que teñen traballo pertencen ao terceiro sector B_3?

4) Debido á futura fusión de dúas entidades de aforro, un estudo preliminar estima que, como máximo, un 5% dos clientes causará baixa na nova entidade resultante. Un analista de mercados sospeita que a proporción de baixas será maior e, para contrastalo, realiza unha enquisa a 400 clientes, elexidos ao chou, sobre a súa intención de seguir operando coa nova entidade resultante da fusión. Deles, 370 contestan que seguirían coa nova entidade.

(a) Formula un test para contrastar a hipótese de que a proporción é a que se formula no estudo preliminar fronte á que sospeita o analista. ¿A que conclusión se chega cun nivel de significación do 5%?

(b) Explica, no contexto do problema, en que consisten os erros de tipo I e de tipo II.

OPCIÓN B

1) Unha asesoría laboral ten na súa carteira de clientes tanto a empresas como a particulares. Para o próximo ano quere conseguir como clientes polo menos a 5 empresas e a un número de particulares que, como mínimo, debe de superar en 4 ao dobre do número de empresas. Ademáis, o número total de clientes anuais non debe superar os 40 clientes. Espera que cada empresa lle produza 800 euros de ingresos anuais e cada particular 600 euros anuais.

(a) Expresa as restriccións do problema. Representa graficamente a rexión factible e calcula os seus vértices.

(b) ¿Que solución lle proporcionaría os maiores ingresos anuais? ¿A canto ascenderían os ditos ingresos?

2) O prezo, en euros, que a acción dunha empresa acada no transcurso dunha sesión de Bolsa, vén dado pola función $p(t)=4t^3-42t^2+120t+200$, $0\le t\le 7$, t é o tempo en horas a contar dende o inicio da sesión. Supoñamos que a sesión comeza ás 10 da mañá (t =0) e finaliza 7 horas despois (ás 5 da tarde).

(a) ¿Entre que horas o prezo da acción sobe e entre que horas baixa? ¿A que hora o prezo da acción acada un valor máximo relativo?, ¿e un valor mínimo relativo? Calcula ditos valores.

(b) ¿Acádase nalgún momento un valor máximo absoluto?, ¿e un valor mínimo absoluto? En caso afirmativo, calcula ditos valores.

(c) Utilizando os resultados anteriores e calculando o punto de inflexión, traza a gráfica da función $p(t)$.

3) A probabilidade de que se entregue un cheque sen fondos nunha entidade bancaria é 0,14. Se en dita entidade se reciben 900 cheques, calcula:

(a) O número esperado de cheques sen fondo.

(b) A probabilidade de que se entreguen máis de 110 cheques sen fondo.

4) Coñécese que a renda por persoa declarada por tódolos cidadáns dun país segue aproximadamente unha distribución normal con media 10840 euros e desviación típica 2700 euros. Co obxecto de analizar a renda dos contribuíntes domiciliados nunha certa Administración de Facenda, tomouse unha mostra aleatoria de 400 declaracións, obténdose unha renda media de 10500 euros por persoa. Se se supón que se mantén a desviación típica,

(a) formula un test para contrastar a hipótese de que a renda media das declaracións presentadas na Administración é a mesma que a global para todo o país, fronte a que é menor tal como parece indicar a mostra e explica claramente a que conclusión se chega, cun nivel de significación do 1%

(b) calcula un intervalo do 98% de confianza para a renda media dos contribuíntes da citada Administración.

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

(O alumno/a debe responder só aos exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1 = 3 puntos, exercicio 2 = 3 puntos, exercicio 3 = 2 puntos, exercicio 4 = 2 puntos)

OPCIÓN A

1) Despexar a matriz X na ecuación $A^{-1}XB - 2CD = B^2$ e calculala,

sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$

2) Considérase a función $f(x) = \frac{1}{a}x^3 - ax^2 + 5x + 10,\ a \neq 0$.

(a) Obter os valores de "a" para os que a función $f(x)$ ten un máximo en $x = 1$.

(b) Supoñendo que a = 3, representar a gráfica da función $f(x)$ en $[0, +\infty)$, estudando intervalos de crecemento, de decrecemento, máximos, mínimos e punto de inflexión.

3) Un exame tipo test dunha oposición consta de 300 preguntas, cada unha delas con catro respostas posibles e das cales só unha é correcta. Un opositor que non preparou o exame, responde ao chou,

(a) calcula o número esperado de respostas que terá correctas

(b) ¿cal é a probabilidade de que responda correctamente 100 ou máis preguntas?

4) A información que ofrece o editor dunha escala de madurez na poboación de estudantes de ensino secundario, sinala que as puntuacións na escala seguen unha distribución normal con media 5 e desviación típica 2. A escala ten xa 10 anos, o que fai sospeitar a un educador que o promedio da escala poidera aumentar no momento actual. Para comprobalo, selecciona unha mostra aleatoria de 49 estudantes de ensino secundario e tras pasarlles a proba obtén unha media de 5,6. Supoñendo que se mantén a desviación típica,

(a) formula un test para contrastar que a puntuación media non aumentou, fronte a que si o fixo tal como sospeita o educador e explica a que conclusión se chega, cun nivel de significación do 5%

(b) utilizando a mostra dada, calcula o intervalo da puntuación media dos estudantes de secundaria no momento actual, cunha confianza do 95%.

OPCIÓN B

1) Unha tenda de informática vende, entre outros produtos, ordenadores portátiles e impresoras, podendo almacenar un máximo de 150 unidades en total. Para atender a demanda dos seus clientes debe ter en stock polo menos 20 portátiles e polo menos 50 impresoras. Ademais, para lograr un prezo competitivo, o provedor esíxelle que o número de impresoras que merque ten que ser igual ou superior en 20 unidades ao número de portátiles.

(a) Formula o sistema de inecuacións asociado ao problema. Representa a rexión factible e calcula os seus vértices.

(b) Se na venda de cada portátil obtén un beneficio de 80 € e na de cada impresora de 20 €, ¿cantas unidades de cada tipo debe vender para obter o máximo beneficio? ¿A canto ascende dito beneficio máximo?

2) O dono dun centro de xardinaría cultiva un certo tipo de plantas cun custo fixo de 4,50 euros e un custo variable de 1,20 euros por planta, vendendo cada unidade a 3 euros. Decide ofertalas en lotes de "x" plantas de maneira que por cada planta que conteña o lote reduce o seu prezo por unidade en 0,10 euros.

(a) Expresa as funcións ingreso, custo e beneficio.

(b) ¿Cantas plantas debe conter cada lote para que o beneficio sexa positivo?

(c) ¿Cantas plantas debe conter cada lote para obter o máximo beneficio? Nese caso, ¿canto custa cada planta do lote? ¿Canto custa o lote de plantas?

3) Unha empresa somete a un control de calidade a 7 de cada 10 artigos fabricados. Dos que son sometidos ao control resultan defectuosos un 2% e dos que non se someten ao control de calidade resultan defectuosos un 12%.

(a) ¿Cal é a probabilidade de que un artigo elexido ao chou resulte defectuoso?

(b) Se un artigo elexido ao chou resulta defectuoso, ¿cal é a probabilidade de que non fose sometido ao control de calidade?

4) Unha compañía telefónica *A* afirma que a proporción de fogares que contratan o seu servizo de ADSL é, polo menos, do 26%. Sen embargo, outra compañía da competencia *B* sostén que actualmente a proporción de usuarios da compañía *A* é menor do 26%. Para comprobalo fai unha enquisa a 400 clientes que teñen nos seus fogares o servizo ADSL e deles 85 manifestan que teñen contratado dito servizo á compañía *A*.

(a) Formula un test para contrastar que a proporción é a que afirma a compañía *A* fronte á alternativa sostida pola compañía *B*. ¿A que conclusión se chega cun nivel de significación do 5%?

(b) Utilizando a información obtida na enquisa, calcula un intervalo de confianza do 95% para a proporción de fogares que contratan actualmente o seu servizo de ADSL coa compañía telefónica *A*.

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

EXERCICIO 1 **(3 puntos)**

- Calcular a matriz A^2: **1 punto**.
- Calcular $A^2 + I$: **0´25 puntos**.
- Cálculo da matriz inversa de $A^2 + I$: **1´75 puntos**.

EXERCICIO 2 **(3 puntos)**

- Calcular a derivada da función custo promedio por caixa: **1´5 puntos**.
- Chegar á ecuación de segundo grao: **0´75 puntos**.
- Resolvela, obtendo o punto crítico: **0´25 puntos**.
- Comprobar que é un mínimo: **0´50 puntos**.

EXERCICIO 3 **(2 puntos)**

(a) **1 punto:**
- Aplicar o teorema das probabilidades totais: **0´50 puntos**.
- Cálculos e resultado final: **0´50 puntos**.

(b) **1 punto:**
- Formulación da probabilidade pedida: **0´25 puntos**.
- Expresión da probabilidade condicionada anterior: **0´25 puntos**.
- Cálculos e resultado final: **0´50 puntos**.

EXERCICIO 4 **(2 puntos)**

(a) **1 punto:**
- Especificar as hipóteses nula e alternativa: **0´25 puntos**.
- Establecer a rexión crítica: **0´25 puntos**.
- Avaliar o estatístico de contraste para a mostra dada: **0´25 puntos**.
- Conclusión: **0´25 puntos**.

(b) **1 punto:**
- Explicar en que consiste o erro de tipo I: **0´50 puntos**.
- Explicar en que consiste o erro de tipo II: **0´50 puntos**.

OPCIÓN B

EXERCICIO 1 **(3 puntos)**

(a) **2´25 puntos:**
- Formular o sistema de inecuacións: **0´75 puntos**.
- Vértices da rexión factible: **0´75 puntos**.
- Representación gráfica da rexión factible: **0´75 puntos** (por debuxar as rectas e a rexión do plano limitada por elas e os tres vértices**)**.

(b) **0´75 puntos:**
- Función a maximizar: **0´25 puntos**.
- Pola solución óptima: **0´25 puntos**.
- Cálculo dos ingresos anuais máximos: **0´25 puntos**.

EXERCICIO 2 **(3 puntos)**

(a) **1´75 puntos:**
- Determinar a primeira derivada: **0´25 puntos**.
- Calcular os puntos críticos: **0´25 puntos**.
- Determinar os intervalos de tempo pedidos: **0´75 puntos**.
- Máximo relativo e hora no que se acada: **0´25 puntos**.
- Mínimo relativo e hora no que se acada: **0´25 puntos**.

(b) **0´50 puntos:**
- Por determinar o máximo absoluto e hora no que se acada: **0´25 puntos**.
- Por determinar o mínimo absoluto e hora no que se acada: **0´25 puntos**.

(c) **0´75 puntos**:
- Punto de inflexión: **0´25 puntos.**
- Representación gráfica da función: **0´50 puntos**.

EXERCICIO 3 **(2 puntos)**

(a) **0´50 puntos:**
- Polo cálculo do número esperado de cheques sen fondo: **0´50 puntos.**

(b) **1´5 puntos:**
- Formular a probabilidade pedida: **0´25 puntos.**
- Paso da binomial a normal: **0´50 puntos.**
- Corrección de medio punto: **0´25 puntos.**
- Tipificación: **0´25 puntos.**
- Paso a táboas e resultado final: **0´25 puntos.**

EXERCICIO 4 **(2 puntos)**

(a) **1 punto:**
- Especificar as hipóteses nula e alternativa: **0´25 puntos.**
- Establecer a rexión crítica: **0´25 puntos.**
- Avaliar o estatístico de contraste para a mostra dada: **0´25 puntos.**
- Conclusión: **0´25 puntos.**

(b) **1 punto:**
- Expresión do intervalo de confianza: **0´25 puntos.**
- Cálculo de $z_{\alpha/2}$: **0´25 puntos.**
- Calcular numéricamente os extremos do intervalo: **0´50 puntos.**

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

EXERCICIO 1 **(3 puntos)**

- Despexar a matriz *X*: **0´50 puntos.**
- Calcular a matriz inversa B^{-1}: **0´75 puntos.**
- Calcular a matriz B^2: **0´50 puntos.**
- Calcular $C \cdot D$: **0´50 puntos.**
- Calcular $B^2 + 2C \cdot D$ **0´25 puntos.**
- Obter a matriz *X*: **0´50 puntos.**

EXERCICIO 2 **(3 puntos)**

(a) **1 punto:**
- Determinar a primeira derivada: **0´25 puntos.**
- Condicións de máximo: **0´50 puntos.**
- Obter os valores de "*a*": **0´25 puntos.**

(b) **2 puntos:**
- Determinar os intervalos de crecemento e de decrecemento: **0´75 puntos.**
- Máximos e mínimos: **0´50 puntos.**
- Punto de inflexión: **0´25 puntos**
- Representación gráfica: **0´50 puntos.**

EXERCICIO 3 **(2 puntos)**

(a) **0´50 puntos:**
- Polo cálculo do número esperado de respostas correctas: **0´50 puntos.**

(b) **1´50 puntos:**
- Formular a probabilidade pedida: **0´25 puntos.**
- Paso da binomial á normal: **0´50 puntos.**
- Corrección de medio punto: **0´25 puntos.**
- Tipificación: **0´25 puntos.**
- Paso a táboas e resultado final: **0´25 puntos.**

EXERCICIO 4 **(2 puntos)**

(a) **1 punto:**
- Especificar as hipóteses nula e alternativa: **0´25 puntos.**
- Establecer a rexión crítica: **0´25 puntos.**
- Avaliar o estatístico de contraste para a mostra dada: **0´25 puntos.**

– Conclusión: **0´25 puntos**.

(b) **1 punto:**

– Expresión do intervalo de confianza: **0´25 puntos.**

– Cálculo de $z_{\alpha/2}$: **0´25 puntos**.

– Calcular numéricamente os extremos do intervalo: **0´50 puntos.**

OPCIÓN B

EXERCICIO 1 **(3 puntos)**

(a) **2´25 puntos:**

– Formular o sistema de inecuacións: **1 punto**.

– Vértices da rexión factible: **0´75 puntos**.

– Representación gráfica da rexión factible: **0´50 puntos** (por debuxar as rectas e a rexión do plano limitada por elas e os catro vértices).

(b) **0´75 puntos:**

– Función a maximizar: **0´25 puntos**.

– Pola solución óptima: **0´25 puntos**.

– Cálculo do beneficio máximo: **0´25 puntos**.

EXERCICIO 2 **(3 puntos)**

(a) **0´75 puntos:**

– Determinar a función ingreso: **0´25 puntos**.

– Determinar a función custo: **0´25 puntos**.

– Determinar a función beneficio: **0´25 puntos**.

(b) **1 punto:**

– Formular a inecuación: **0´25 puntos**.

– Obter os valores de x: **0´50 puntos**.

– Especificar entre que valores o beneficio é positivo: **0´25 puntos**.

(c) **1´25 puntos**:

– Determinar a primeira derivada: **0´25 puntos**.

– Punto crítico: **0´25 puntos**.

– Comprobar que é máximo: **0´25 puntos**.

– Custo de cada planta do lote: **0´25 puntos**.

– Custo do lote de plantas: **0´25 puntos**.

EXERCICIO 3 **(2 puntos)**

(a) **1 punto:**

– Formular a probabilidade pedida: **0´25 puntos**.

– Utilizar o teorema das probabilidades totais e sustituir os valores de cada probabilidade na fórmula anterior: **0´50 puntos**.

– Resultado final: **0´25 puntos**.

(b) **1 punto:**

– Formulación da probabilidade pedida: **0´25 puntos**.

– Expresión da probabilidade condicionada e sustituir os valores de cada probabilidade na fórmula anterior: **0´50 puntos**.

– Resultado final: **0´25 puntos**.

EXERCICIO 4 **(2 puntos)**

(a) **1 punto:**

– Especificar as hipóteses nula e alternativa: **0´25 puntos**.

– Establecer a rexión crítica: **0´25 puntos**.

– Avaliar o estatístico de contraste para a mostra dada: **0´25 puntos**.

– Conclusión: **0´25 puntos**.

(b) **1 punto:**

– Expresión do intervalo de confianza: **0´25 puntos.**

– Cálculo de $z_{\alpha/2}$: **0´25 puntos**.

– Calcular numéricamente os extremos do intervalo: **0´50 puntos.**

CONVOCATORIA DE XUÑO

O/A alumno/a debe responder só aos exercicios dunha das dúas opcións (**A** ou **B**)

OPCIÓN A

Exercicio 1. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

– *Calcular a matriz A^2,* $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ **1 punto**.

– *Calcular* $A^2 + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ **0´25 puntos**.

– *Calcular a matriz inversa* $\left(A^2 + I\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **1´75 puntos**.

Exercicio 2. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

O custo promedio por caixa (en euros) está dado por: $C(x) = 3x - 18\ln x + \dfrac{120}{x} + 50,\ x > 0$, sendo "*x*" o número de caixas que empaqueta a empresa. Hai que determinar o número de caixas que deben empaquetar para minimizar o custo promedio por caixa.

– Determinar a *derivada da función custo promedio* $C'(x) = 3 - \dfrac{18}{x} - \dfrac{120}{x^2},\ x > 0$ **1´50 puntos**.

– Calcular os *puntos críticos* $C'(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - \dfrac{18}{x} - \dfrac{120}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 6x - 40 = 0$ **0´75 puntos**.

– Obter o punto crítico válido $x = 10$ **0´25 puntos**.

– *Xustificar* que en $x = 10$ hai un *mínimo*, calculando $C''(x) = \dfrac{18}{x^2} + \dfrac{240}{x^3},\ C''(10) > 0$ **0´50 puntos**.

Logo en $x = 10$ $C(x)$ alcanza un mínimo, *polo que é preciso que empaqueten 10 caixas para minimizar o custo promedio por caixa*.

Exercicio 3. (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)

Denominamos aos sucesos B_1, B_2, B_3*: un traballador é do sector* B_1*,* B_2*,* B_3*, respectivamente e o suceso D: un traballador dun desos sectores está no paro.* Os datos que recollemos do enunciado son:

$$P(B_1) = 0'5,\ \mathrm{P(B_2)} = 0'25,\ P(B_3) = 0'25,\ P\left(D/B_1\right) = 0'08,\ P\left(D/B_2\right) = 0'04,\ P\left(D/B_3\right) = 0'06 .$$

(a) **1 punto**: *Calcula a porcentaxe de paro entre os traballadores de dito estudo.*

– Teorema das probabilidades totais $P(D) = P(B_1)P\left(D/B_1\right) + P(B_2)P\left(D/B_2\right) + P(B_3)P\left(D/B_3\right)$ **0´50 puntos**.

– Cálculos e resultado final $0'5 \cdot 0'08 + 0'25 \cdot 0'04 + 0'25 \cdot 0'06 = 0'065$. Concluímos que o "*6´5% dos traballadores deste estudo están no paro*" **0´50 puntos**.

(b) **1 punto**: *¿Que porcentaxe dos que teñen traballo pertencen ao terceiro sector* B_3*?*

– Formular a probabilidade pedida $P\left(B_3/\bar{D}\right)$ **0´25 puntos**.

– Expresión da probabilidade anterior $\dfrac{P(B_3 \cap \bar{D})}{P(\bar{D})}$ **0´25 puntos**.

– Cálculos e resultado final $\dfrac{0'25 \cdot 0'94}{1 - 0'065} = 0'2513$, concluíndo que *"o 25´13% dos traballadores que teñen traballo pertencen ao terceiro sector"* **0´50 puntos**.

Tamén podemos facer o exercicio construíndo o diagrama de árbore correspondente.

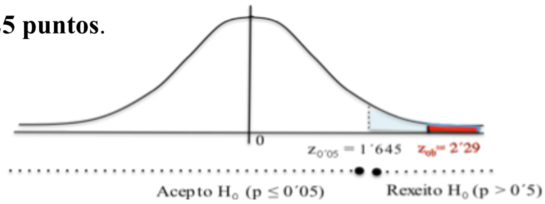
Exercicio 4. (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)

Sexa *"p = proporción (poboacional) de clientes que causará baixa na nova entidade". Un estudo preliminar estima que p ≤ 0´05 e un analista de mercados sospeita que p >0´05 e para contrastalo realiza unha enquisa a 400 clientes dos que 370 contestan que seguirían coa nova entidade.*

Temos por tanto, que se $\hat{P}$ é o estatístico proporción da mostra de clientes que causarán baixa, no estudo do analista, o valor particular que toma este estatístico para a mostra dada é $\hat{p} = 30/400 = 0'075$.

(a) **1 punto**. *Formula un test para contrastar a hipótese de que a proporción é a que se formula no estudo preliminar fronte á que sospeita o analista. ¿A que conclusión se chega cun nivel de significación do 5%?*

– Especificar as hipóteses nula e alternativa: $\begin{cases} H_0 : p \le 0'05 \\ H_1 : p > 0'05 \end{cases}$ **0´25 puntos**.



– Estatístico de proba: $\dfrac{\hat{P} - p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)$

– Esteblecer a rexión crítica: $(1'645, +\infty)$ **0´25 puntos**.

– Avaliar o estatístico de proba, *"baixo H_0 certa"*, para a mostra dada: $z_{ob} = \dfrac{0'075 - 0'05}{\sqrt{\dfrac{0'05 \cdot 0'95}{400}}} = 2'29$ **0´25 puntos**.

– Decisión: $z_{ob} = 2'29 \in (1'645, +\infty) \Rightarrow$ *Rexeito H_0. Cos datos desta mostra e con risco de equivocarnos do 5%, concluiriamos que é certa a hipótese que formula o analista* **0´25 puntos**. (A proporción de clientes que causará baixa é maior do 5%, sendo o último risco de equivocarnos, ante esta afirmación, do valor-P = P(Z >2´29) = 0´011, é dicir, dun 1´1%, sendo polo tanto o test significativo).

(b) **1 punto**. *Explica, no contexto do problema, en que consisten os erros de tipo I e tipo II.*

– *Erro tipo I* ≡ Erro que se comete ao rexeitar H_0, sendo H_0 certa ≡ *Afirmaríamos que a proporción de clientes que causará baixa será a que cre o analista, cando realmente non é certo.* **0´50 puntos**.

– *Erro tipo II* ≡ Erro que se comete ao aceptar H_0, sendo H_0 falsa ≡ *Afirmaríamos que o analista non ten razón, cando realmente si a ten.* **0´50 puntos**.

OPCIÓN B

Exercicio 1. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

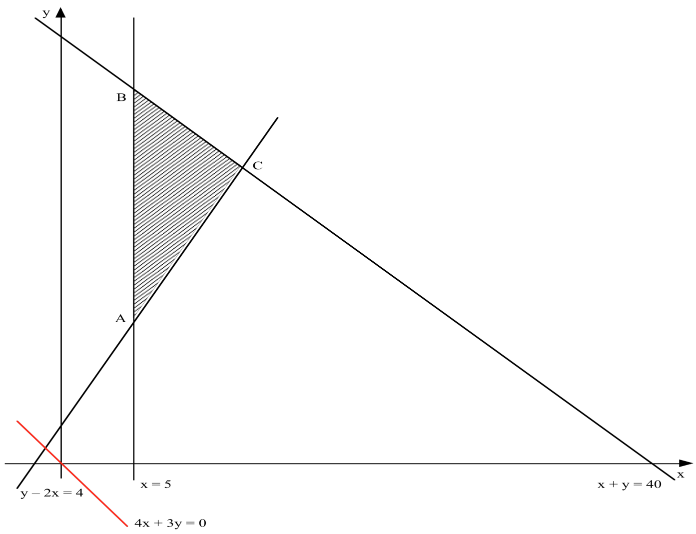
Sexan "x" o número de empresas que son clientes da asesoría e "y" o número de particulares que son clientes na asesoría.

(a) **2´25 puntos**:

– Formular o sistema *de inecuacións* **0´75 puntos** *:* $x \ge 5$; $y \ge 2x + 4$; $x + y \le 40$; (**0´25 puntos** por cada unha delas).

– *Vértices da rexión factible* **0´75 puntos**, obter os tres vértices: *A* (5, 14); *B* (5, 35); *C* (12, 28); (**0´25 puntos** por cada un deles)

– *Representación gráfica da rexión factible* **0´75 puntos**:



(b) **0´75 puntos**:

– Función obxectivo $f(x, y) = 800x + 600y$ **0´25 puntos**.

– Solución óptima: a función maximízase no punto *C* (12, 28) é dicir, *a solución que lle proporcionaría os maiores ingresos anuais sería con 12 empresas e 28 clientes particulares* **0´25 puntos**.

– Os ingresos anuais máximos son: 26400 euros **0´25 puntos**.

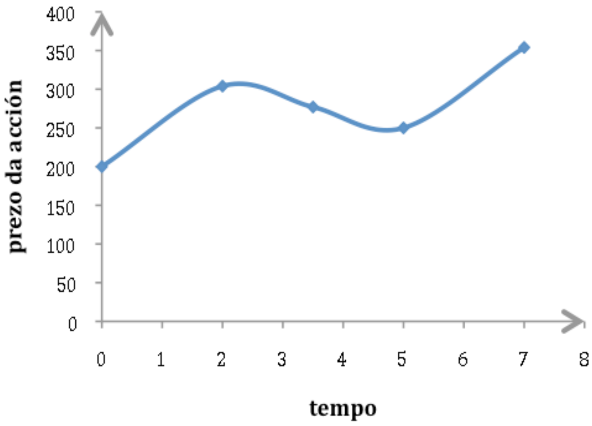
Exercicio 2. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

Sexa $P(t) = 4t^3 - 42t^2 + 120t + 200,\ 0 \le t \le 7$, o prezo, en euros, que a acción dunha empresa acada no trancurso dunha sesión de Bolsa e *t* o tempo, en horas, a contar dende o inicio da sesión. A sesión comeza ás 10 da mañá (t=0) e finaliza 7 horas despois (ás 5 da tarde)

(a) **1´75 puntos**:

– Determinar a primeira derivada: $P'(t) = 12t^2 - 84t + 120$ **0´25 puntos**.

– Calcular os puntos críticos: $t = 2$ e $t = 5$ **0´25 puntos**.
– Determinar entre que horas o prezo da acción sobe e entre que horas baixa: estudando o signo da derivada primeira nos intervalos (0, 2), (2, 5) e (5, 7), obtense que *o prezo da acción sobe dende as 10 da mañá ata as 12 do mediodía e dende as 3 da tarde ata o peche da sesión* **0´50 puntos**. *O prezo baixa dende as 12 do mediodía ata as 3 da tarde* **0´25 puntos**.
– Máximo relativo e hora no que se acada: En (2, 304) , é dicir, ás 12 h acádase un máximo relativo **0´25 puntos**.
– Mínimo relativo e hora no que se acada: En (5, 250), é dicir, ás 3 da tarde acádase un mínimo relativo **0´25 puntos**.
(b) **0´50 puntos**.
– Por determinar o máximo absoluto e hora no que se acada: En t = 7, $P(7)$ = 354, polo que ás 5 da tarde acádase un máximo absoluto **0´25 puntos**.
– Por determinar o mínimo absoluto e hora no que se acada: En t = 0, $P(0)$ = 200, polo que ás 10 da mañá acádase un mínimo absoluto **0´25 puntos**.
(c) **0´75 puntos**.
– Punto de inflexión: En (3´5, 277) a función presenta un punto de inflexión, sendo cóncava hacia arriba no intervalo (3´5, 7) e cóncava hacia abaixo no (0, 3´5) **0´25 puntos**.
– Representación gráfica da función: **0´50 puntos**.



Exercicio 3. (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)
A probabilidade de que se entregue un cheque sen fondos nunha entidade bancaria é p = 0´14 e se en dita entidade se reciben 900 cheques,
(a) **0´50 puntos**: *Cálculo do número esperado de cheques sen fondo*
– Definimos a variable aleatoria binomial X = número de cheques sen fondo, nunha mostra de n = 900 cheques. $X \sim B(n = 900, p = 0'14)$. Número esperado de cheques sen fondo $= E(X) = n \cdot p = 126$. Espéranse, en mostras de 900 cheques, 126 sen fondo.
(b) **1´50 puntos**: *Calcular a probabilidade de que se entreguen máis de 110 cheques sen fondo*
– Formular a probabilidade pedida: $P(X > 110)$ **0´25 puntos**.

– Paso da binomial á normal: $X \sim B(n = 900, p = 0'14) \Rightarrow X' \sim N\left(\mu = n \cdot p = 126, \sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = 10'4\right)$ **0´50 puntos**.

– Corrección de medio punto: $P(X > 110) = P(X' \geq 110'5)$ **0´25 puntos**.

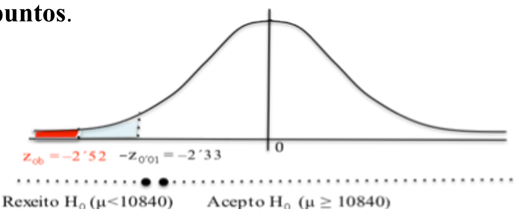
– Tipificación: $P(X > 110) = P\left(Z \geq \dfrac{110'5 - 126}{10'4}\right) = P(Z \geq -1'49)$ **0´25 puntos**.

– Paso a táboas e resultado final: $P(Z \geq -1'49) = P(Z \leq 1'49) = 0'9319$ **0´25 puntos**.

Exercicio 4. (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)
Sexa *"Y = renda, en euros, por persoa dun cidadán dun país"* $Y \sim N(\mu_Y = 10840,\ \sigma_Y = 2700)$. Quérese analizar a renda dos contribuíntes domiciliados nunha certa Administración de Facenda, logo a nova variable é *"X = renda, en euros, dun contribuínte desa Administración"* $X \sim N(\mu, \sigma = 2700)$. Para facer o estudo, tomouse unha mostra de 400 declaracións, e se $\overline{X}$ é o estatístico media da mostra, o valor particular que toma para a mostra dada é $\overline{x} = 10500$ euros por persoa.
(a) **1 punto**. *Formula un test para contrastar a hipótese de que a renda media das declaracións presentadas na Administración é a mesma que a global para todo o país, fronte a que é menor tal como parece indicar a mostra e explica claramente a que conclusión se chega, cun nivel de significación do 1%*

– Especificar as hipóteses nula e alternativa: $\begin{cases} H_0: \mu \geq 10840 \\ H_1: \mu < 10840 \end{cases}$ **0´25 puntos**.

– Estatístico de proba: $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$



– Esteblecer a rexión crítica: $(-\infty, -2'33)$ **0´25 puntos**.

– Avaliar o estatístico de proba, *"baixo H_0 certa"*, para a mostra dada: $z_{ob} = \dfrac{10500-10840}{2700/\sqrt{400}} = -2'52$ **0´25 puntos**.

– Decisión: $z_{ob} = -2'52 \in (-\infty, -2'33) \Rightarrow$ *Rexeito H_0. Cos datos desta mostra e con risco de equivocarnos do 1%, concluiriamos que a renda media das declaraciónns presentadas na Administración é menor que a global para todo o país* **0´25 puntos**. (o último risco de equivocarnos, ante esta afirmación, é o valor-P=P(Z < –2´52)= 0´00587, é dicir, dun 0´587%, sendo polo tanto o test moi significativo).

(b) **1 punto**. *Calcula un intervalo do 98% de confianza para a renda media dos contribuíntes da citada Administración*

– Expresión do intervalo de confianza: $P\left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$ **0´25 puntos**.

– Calcular $z_{\alpha/2} = z_{0'01} = 2'33$ **0´25 puntos**.

– Calcular numéricamente os extremos do intervalo 10185´45 e 10814´55 e concluir que: *"en base a mostra dada, estímase cun 98% de confianza, que a renda media por persoa da citada Administración está entre 10185´45 euros e 10814´55 euros"* **0´50 puntos**.

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

O/A alumno/a debe responder só aos exercicios dunha das dúas opcións (**A** ou **B**)

OPCIÓN A

Exercicio 1. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

– *Despexar a matriz X,* $X = A\left(B^2 + 2CD\right)B^{-1}$ **0´50 puntos**.

– *Calcular a matriz inversa,* $B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ **0´75 puntos**. – *Calcular a matriz B^2,* $B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$ **0´50 puntos**. – *Calcular* $C \cdot D = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ **0´50 puntos**. – *Calcular* $B^2 + 2C \cdot D = \begin{pmatrix} 7 & 20 \\ 6 & 17 \end{pmatrix}$ **0´25 puntos**. – *Obter a matriz pedida* $X = \begin{pmatrix} 4 & 22 \\ 3 & 15 \end{pmatrix}$ **0´50 puntos**.

Exercicio 2. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

Sexa a función $f(x) = \dfrac{1}{a}x^3 - ax^2 + 5x + 10,\ a \neq 0$

(a) **1 punto**: *Obter os valores de "a" para os que a función ten un máximo en x = 1*

– Determinar a primeira derivada: $f'(x) = \dfrac{3}{a}x^2 - 2ax + 5$ **0´25 puntos**.

– Pola condición de máximo no punto x = 1: $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 - 2a^2 + 5a = 0$ **0´25 puntos**.

– Resolver a ecuación anterior e obter os dous valores *a* = –1/2 e *a* = 3 **0´25 puntos**.

– Comprobar se é máximo para os dous valores de *a*, é dicir,

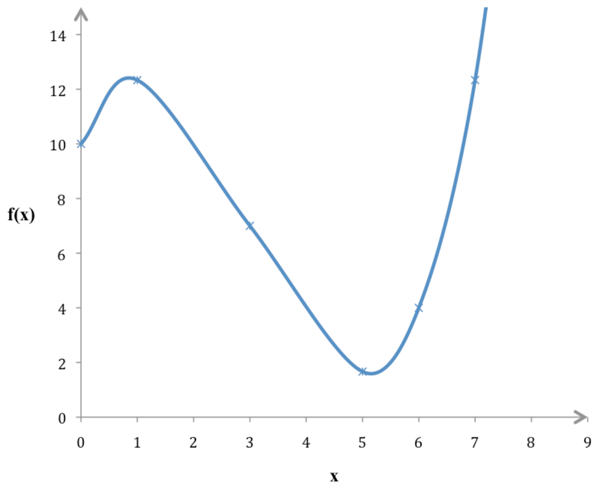
$f''(x) = \dfrac{6}{a}x - 2a,\ f''(1) = -12 + 1 < 0$ *para* $a = -1/2$; $f''(1) = 2 - 6 < 0$ *para* $a = 3$. Logo os valores válidos son os dous *a* = –1/2 e *a* = 3 **0´25 puntos**.

(b) **2 puntos**: Supoñendo que *a* = 3, representar a gráfica da función *f*(*x*) en [0, +∞), estudando

– *Intervalos de crecemento e de decrecemento*: A primeira derivada anúlase nos puntos *x* = 1 e *x* = 5. Estúdase o signo desta derivada nos intervalos (0, 1), (1, 5) e (5, +∞), obténdose que a función é *crecente* nos intervalos (0, 1) e (5, +∞) **0´50 puntos** e *decrecente* no intervalo (1, 5) **0´25 puntos**.

– *Máximos e mínimos*: No punto (1, 37/3) a función presenta un *máximo* **0´25 puntos**. No punto (5, 5/3) presenta un *mínimo* **0´25 puntos**. No (0, 10) hai tamén un mínimo relativo.

– *Punto de inflexión*: En (3, 7) a función presenta un punto de inflexión, sendo cóncava hacia arriba no intervalo (3, +∞) e cóncava hacia abaixo no (0, 3) **0´25 puntos**.
– *Representación gráfica da función*: **0´50 puntos**.



Exercicio 3. (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)
Trátase dun exame tipo test que consta de 300 preguntas, cada unha delas con catro respostas posibles e das cales só unha é correcta. Un opositor responde ao chou,
(a) **0´50 puntos**: *calcula o número esperado de respostas que terá correctas*
– Definimos a variable aleatoria binomial X = número de respostas correctas, nunha mostra de n = 300 preguntas. $X \sim B(n = 300, p = 1/4)$. Número esperado de respostas correctas $= E(X) = n \cdot p = 75$. *Espérase que conteste correctamente 75 preguntas en mostras de 300 preguntas.*
(b) **1´50 puntos**: *Calcula a probabilidade de que responda correctamente 100 ou máis preguntas*
– Formular a probabilidade pedida: $P(X \geq 100)$ **0´25 puntos**.

– Paso da binomial á normal: $X \sim B(n = 300, p = 0'25) \Rightarrow X' \sim N\left(\mu = n \cdot p = 75, \sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = 7'5\right)$ **0´50 puntos**.

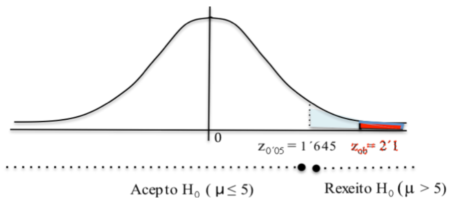
– Corrección de medio punto: $P(X \geq 100) = P(X' > 99'5)$ **0´25 puntos**.

– Tipificación: $P(X' > 99'5) = P\left(Z > \dfrac{99'5 - 75}{7'5}\right) = P(Z > 3'27)$ **0´25 puntos**.

– Paso a táboas e resultado final: $P(Z > 3'27) = 1 - P(Z \leq 3'27) = 1 - 0'9995 = 0'0005$ **0´25 puntos**.

Exercicio 4. (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)
Sexa *"Y = puntuación (que ofrece o editor dunha escala de madurez) dun estudante da poboación de ensino secundario"* $Y \sim N(\mu_Y = 5,\ \sigma_Y = 2)$. Un educador sospeita que a media da escala podería aumentar no momento actual. Para comprobalo, selecciona unha mostra aleatoria de 49 estudantes de secundaria e tras pasarlles a proba , obtén unha media de 5´6. Se chamamos X a nova variable, "*X = puntuación dun estudante de secundaria no momento actual*" teremos que $X \sim N(\mu, \sigma = 2)$ e se $\bar{X}$ é o estatístico media da mostra, o valor particular que toma para a mostra dada é $\bar{x} = 5'6$.
(a) **1 punto**. *Formula un test para contrastar a hipótese de que a puntuación media non aumentou, fronte a que si o fixo tal como sospeita o educador e explica a que conclusión se chega, cun nivel de significación do 5%*

– Especificar as hipótesis nula e alternativa: $\begin{cases} H_0 : \mu \leq 5 \\ H_1 : \mu > 5 \end{cases}$ **0´25 puntos**.



– Estatístico de proba: $\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$

– Esteblecer a rexión crítica: $(1'645, +\infty)$ **0´25 puntos**.

– Avaliar o estatístico de proba, *"baixo H_0 certa"*, para a mostra dada: $z_{ob} = \dfrac{5'6 - 5}{2/\sqrt{49}} = 2'1$ **0´25 puntos**.

– Decisión: $z_{ob} = 2'1 \in (1'645, +\infty) \Rightarrow$ *Rexeito H_0. Cos datos desta mostra e con risco de equivocarnos do 5%, concluiríamos que a puntuación media no momento actual aumentou, como sospeitaba o educador* **0´25 puntos**. (O último risco de equivocarnos, ante esta afirmación, é o valor-P = P(Z >2´1) = 0´0179, é dicir, aproximadamente dun 1´8%, sendo polo tanto o test significativo).
(b) **1 punto**. *Utilizando a mostra dada, calcula o intervalo da puntuación media dos estudantes de secundaria no momento actual, cunha confianza do 95%*

– Expresión do intervalo de confianza: $P\left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$ **0´25 puntos**.

– Calcular $z_{\alpha/2} = z_{0'025} = 1'96$ **0´25 puntos**.

– Calcular numéricamente os extremos do intervalo 5´04 e 6´16 e concluir que: *"en base a mostra dada, estímase cun 95% de confianza, que a puntuación media no momento actual está entre 5,04 e 6´16 puntos"* **0´50 puntos**.

OPCIÓN B

Exercicio 1. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

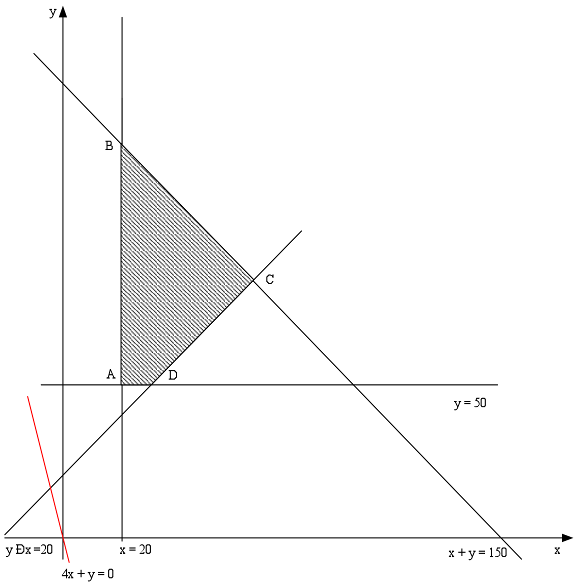
Sexan "x" o número de ordenadores portátiles e "y" o número de impresoras, que vende a tenda de informática.

(a) **2´25 puntos**:

– Formular o sistema *de inecuacións* **1 punto**: $x + y \le 150$; $x \ge 20$; $y \ge 50$; $y \ge x + 20$ (**0´25 puntos** por cada unha delas).

– *Vértices da rexión factible* **0´75 puntos**, polos vértices: A (2, 50); B (20, 130); D (30, 50) **0´50 puntos** e polo vértice C (65, 85) **0´25 puntos**

– *Representación gráfica da rexión factible* **0´50 puntos**:



(b) **0´75 puntos**:

– Función obxectivo $f(x, y) = 80x + 20y$ **0´25 puntos**.– A función maximízase no punto C (65, 85) é dicir, *debería vender 65 portátiles e 85 impresoras para obter o máximo beneficio* **0´25 puntos**.

– O beneficio máximo sería: 6900 euros **0´25 puntos**.

Exercicio 2. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

Custo fixo das plantas = 4´50 euros. Custo variable = 1´20 euros por planta. Vende "cada unidade" a 3 euros. Decide ofertalas en lotes de "x" plantas de maneira que por cada planta que conteña o lote reduce o seu prezo por unidade en 0´10 euros.

(a) **0´75 puntos:**

– *Función ingreso* = $I(x) = x(3 - 0'10x)$ **0´25 puntos**.

– *Función custo* = $C(x) = 4'50 + 1'20x$ **0´25 puntos**.

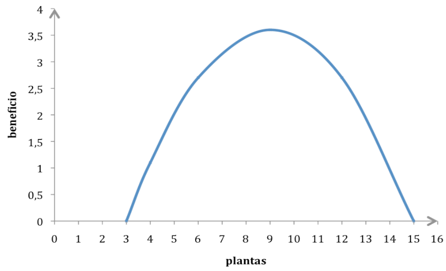
– *Función beneficio* = $B(x) = I(x) - C(x) = -0'10x^2 + 1'80x - 4'50$ **0´25 puntos**.

(b) **1 punto:** ¿*Cantas plantas debe conter cada lote para que o beneficio sexa positivo*?

– Formular a inecuación: $-0'1x^2 + 1'8x - 4'5 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 18x + 45 < 0$ **0´25 puntos**.

– Obter os valores de x, resolvendo a ecuación, $x = 3$ e $x = 15$ **0´50 puntos**.

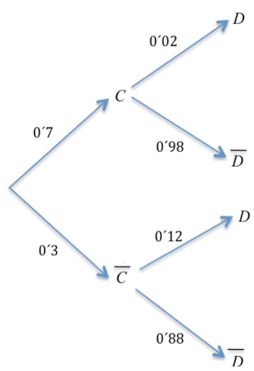
– Especificar entre que valores o beneficio é positivo (ben por medio da gráfica da parábola, ou traballando coa desigualdade) "*Cada lote debe conter máis de 3 e menos de 15 plantas para que o beneficio sexa positivo*" **0´25 puntos**.



(c) **1´25 puntos:** *¿Cantas plantas debe conter cada lote para obter o máximo beneficio? Nese caso, ¿canto custa cada planta do lote? ¿Canto custa o lote de plantas?*
– Determinar a primeira derivada: $B'(x) = -0'2x + 1'80$ **0´25 puntos**.
– Calcular o punto crítico $x = 9$ **0´25 puntos**.
– Comprobar que é máximo, ou pola gráfica, ou comprobando que $B''(9) = -0'2 < 0$, polo que, "*obtén máximo beneficio con lotes de 9 plantas*" **0´25 puntos**.
– *Custo de cada planta do lote* = 3 – 0´10.9 = 2´10 euros **0´25 puntos**.
– *Custo do lote de plantas* = 9.2´10 = 18´90 euros **0´25 puntos**.

Exercicio 3. (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)
Denominamos aos sucesos *C: un artigo é sometido a control de calidade, D: un artigo é defectuoso.* Os datos que recollemos do enunciado son: $P(C) = 0'7;\ P\left(D/C\right) = 0'02;\ P\left(D/\overline{C}\right) = 0'12$

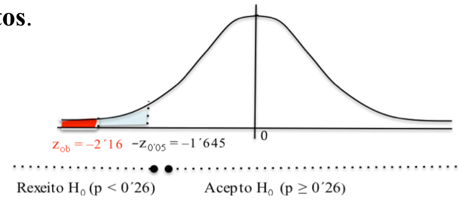
(a) **1 punto**: *¿Cal é a probabilidade de que un artigo elixido ao chou resulte defectuoso?*
– Formular a probabilidade pedida: $P(D)$ **0´25 puntos**.
– Utilizar o teorema das probabilidades totais e sustituír os valores de cada probabilidade na fórmula anterior:
$P(D) = P(C)\cdot P\left(D/C\right) + P(\overline{C})\cdot P\left(D/\overline{C}\right) = 0'7\cdot 0'02 + 0'3\cdot 0'12$ **0´50 puntos**.
– Cálculos e resultado final = 0´05, **0´25 puntos**.
(b) **1 punto**: *Se un artigo elixido ao chou resula defectuoso, ¿cal é a probabilidade de que non fose sometido ao control de calidade?*
– Formular a probabilidade pedida $P\left(\overline{C}/D\right)$ **0´25 puntos**.
– Expresión da probabilidade condicionada e sustituír os valores de cada probabilidade na fórmula anterior $P\left(\overline{C}/D\right) = \dfrac{P(\overline{C})\cdot P\left(D/\overline{C}\right)}{P(D)} = \dfrac{0'3\cdot 0'12}{0'05}$ **0´50 puntos**.
– Resultado final = 0´72 **0´25 puntos**.



Tamén podemos facer o exercicio construíndo o diagrama de árbore, nese caso, a árbore ben feito puntúase con **1 punto** e os apartados (a) e (b) con **0´50 puntos** cada un deles.

Exercicio 4. (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)
Sexa *"p = proporción (poboacional) de fogares que contratan o seu servizo de ADSL coa compañía telefónica A"*. A compañía *A* afirma que $p \geq 0'26$, non obstante, outra compañía da competencia *B,* sostén que actualmente a proporción é menor, $p < 0'26$. Para comprobalo realiza unha enquisa a 400 clientes que teñen nos seus fogares o servizo *ADSL* e deles 85 manifestan que teñen contratado dito servizo á compañía *A.*
Temos por tanto, que se $\hat{P}$ é o *estatístico proporción da mostra* de clientes que teñen *ADSL* coa compañía *A*, o valor particular que toma este estatístico para a mostra dada é $\hat{p} = 85/400 = 0'2125$.
(a) **1 punto**. *Formula un test para contrastar que a proporción é a que afirma a compañía A fronte á alternativa sostida pola compañía B. ¿A que conclusión se chega cun nivel de significación do 5%?*

– Especificar as hipóteses nula e alternativa: $\begin{cases} H_0 : p \geq 0'26 \\ H_1 : p < 0'26 \end{cases}$ **0´25 puntos**.



– Estatístico de proba: $\dfrac{\hat{P} - p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)$

– Esteblecer a rexión crítica: $(-\infty, -1'645)$ **0´25 puntos**.

– Avaliar o estatístico de proba, *"baixo H_0 certa"*, para a mostra dada: $z_{ob} = \dfrac{0'2125 - 0'26}{\sqrt{\dfrac{0'26 \cdot 0'74}{400}}} = -2'16$ **0´25 puntos**.

– Decisión: $z_{ob} = -2'16 \in (-\infty, -1'645) \Rightarrow$ *Rexeito H_0. Cun risco de equivocarnos do 5%, concluiríamos que a proporción de usuarios que contrata ADSL coa compañía A é menor do 26%, tal como afirmaba a compañía da competencia B* **0´25 puntos**. (o último risco de equivocarnos, ante esta afirmación, é o valor-P = P(Z < –2´16) = 0´0154, é dicir, dun 1´5%, sendo polo tanto o test significativo).

(b) **1 punto**. *Utilizando a información obtida na enquisa, calcula un intervalo do 95% de confianza para a proporción de fogares que contratan actualmente o seu servizo de ADSL coa compañía telefónica A.*

– Expresión do intervalo de confianza: $P\left(\widehat{P} - z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < p < \widehat{P} + z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = 1 - \alpha$ **0´25 puntos**.

– Calcular $z_{\alpha/2} = z_{0'05} = 1'96$ **0´25 puntos**.

– Calcular numéricamente os extremos do intervalo 0´1725 e 0´2525 e concluir que: *"en base a mostra dada, estímase cun 95% de confianza, que a proporción de fogares que contrata o seu ADSL, actualmente, coa compañía A está entre un 17´25% e un 25´25%*. Erro cometido na estimación dun 4%. **0´50 puntos**.