TEMA 8. MATRICES.

1. Definición de Matrices y tipos de Matrices
2. Operaciones con Matrices
   2.1. Igualdad de Matrices
   2.2. Suma de Matrices
   2.3. Producto de una Matriz por un número (escalar)
3. Producto de Matrices
4. Transposición de Matrices. Matrices simétricas y antisimétricas
5. Matriz inversa
   5.1. Definición.
   5.2. Cálculo
6. Resolución de ecuaciones matriciales

Contexto con la P.A.U.

En este tema comienza el Bloque II de Álgebra Lineal. Por lo general en los exámenes de la P.A.U. suele haber un problema relacionado con la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, que veremos en el tema 10, y una o dos cuestiones relativas a:

- resolución de ecuaciones matriciales, este tema
- dada una matriz A cálculo del valor de A^n , este tema
- cálculo de determinantes, tema 9
- comprobar si una matriz es inversible o no, tema 9

Por lo general tanto el problema como las cuestiones relativas a este bloque que ahora empezamos suelen ser metódicas, y por tanto sencillas.

1. Definiciones de Matrices y tipos de Matrices

El concepto de Matriz es sencillo, es una tabla con m filas y n columnas de números reales ordenados ($m,n\in N$). Veamos una definición más matemática de las matrices

***Definición**:* se llama matriz de dimensión m×n al conjunto de números reales dispuestos en m filas y n columnas de la siguiente forma:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ con a_{ij}=elemento de la matriz A situado en la fila i y columna j

Muchas veces la matriz A se denota también como $A=(a_{ij})$

***Definición**:* El conjunto de todas las matrices con m filas y n columnas se denota como $\boldsymbol{M_{n\times m}(R)}$.

Así $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ → $A\in M_{2x3}(R)$

Definición: dimensión de una matriz es el número de filas y columnas de la misma, en el ejemplo anterior, A es de dimensión 2x3

<u>Tipos de matrices:</u>

1. ***Matrices cuadradas:*** son las matrices que tienen igual número de filas que de columnas (m=n), y que como veremos son las únicas que pueden multiplicarse entre si. El conjunto de todas las matrices cuadradas con n filas y columnas se denotan como $M_{n\times n}(R)$ o $M_n(R)$.

   Ejemplo: $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B\in M_{2x2}(R)$ ó $B\in M_2(R)$

   Elementos de las matrices cuadradas:

   a. <u>Diagonal principal</u>: elementos de la forma a_{ii}, es decir en la diagonal que va desde a_{11} hasta a_{nn}

   b. <u>Diagonal secundaria</u>: elementos de la forma a_{ij} donde i+j=n+1, es decir los elementos en la diagonal que va desde a_{1n} hasta a_{n1}

   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 1 \\ 8 & 9 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

   —— Diagonal principal i=j

   - - - -

2. ***Matrices triangulares superiores e inferiores:*** son las matrices cuadradas tal que:

a. *Superior:* elementos debajo diagonal de la principal son nulos $a_{ij}=0$ si i>j

b. *Inferior:* elementos encima de la diagonal principal son nulos $a_{ij}=0$ si i<j

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 2\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}\ \textit{triangular superior}\quad B=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ -3 & 4 & 5\end{pmatrix}\ \textit{triangular inferior}$$

3. ***Matrices diagonales***: matrices cuadradas donde todos los elementos fuera de la diagonal son cero.

$$D=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 10 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -5\end{pmatrix}$$

4. ***Matriz escalar:*** matriz diagonal en el que todos los términos de la diagonal son iguales:

$$E=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

5. ***Matriz unidad o matriz identidad:*** matriz escalar cuyos elementos son 1. Se denota como I o Id:

$$I=Id_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ \text{(matriz identidad de orden 2)}$$

$$I=Id_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\text{(matriz identidad de orden 3)}$$

$$I=Id_4=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\text{(matriz identidad de orden 4)}$$

6. ***Matriz columna:*** toda matriz con una sola columna→ $M_{mx1}(R)$

$$C=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -3\end{pmatrix}\quad C\in M_{3x1}(R)$$

7. ***Matriz fila:*** toda matriz con una única fila → $M_{1xn}(R)$

$F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $F \in M_{1x3}(R)$

Anotaciones:

- Toda matriz diagonal es triangular, tanto superior como inferior, pues los elementos por encima y por debajo de la diagonal son nulos.
- Toda matriz escalar es diagonal.
- La matriz identidad es una matriz escalar.

Ejercicio 1. Escribir matrices de los siguientes tipos:

a) De dimensión 3x2

b) Cuadrada de dimensión 4

c) Triangular inferior de dimensión 3

d) Diagonal de dimensión 4

e) ¿Qué tipo de matriz es de dimensión 1x1? Pon un ejemplo. ¿Cuál será la matriz identidad de dimensión 1?

Solución:

a. $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 0 \\ -3 & 8 & 11 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

e. 1 fila y una columna → los números reales $M_{1x1}(R)=R$, ejemplos 2,-1.3, y la identidad es 1.

Ejercicio 2. Decir que tipo de matrices y de que dimensión son las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

- **a.** Matriz cuadrada, triangular superior, dimensión 3x3(M_{3x3}(R)) o cuadrada de dimensión 3.
- **b.** Matriz columna de dimensión 4x1 (M_{4x1}(R))
- **c.** Matriz rectangular de dimensión 2x3 (M_{2x3}(R))
- **d.** Matriz cuadrada, escalar de dimensión 3x3 (M_{3x3}(R)) o simplemente matriz cuadrada de dimensión 3.

2. Operaciones con matrices

2.1 Igualdad de matrices

Definición: dos matrices M y N se dicen que son iguales (M=N) si se cumplen:

- misma dimensión
- elementos que ocupan el mismo lugar son iguales.

2.2 Suma de matrices

Solo se pueden sumar matrices de la misma dimensión, veamos en qué consiste la suma de matrices:

Definición: la suma de dos matrices de dimensión A y B es otra matriz que se denota como A+B con misma dimensión que las otras dos y definida como $A+B=(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})$. Es decir A+B se obtiene sumando los elementos que ocupan la misma posición en las dos matrices que suman.

Veamos un ejemplo de dos matrices $A,B\in M_{2x3}(R)$

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$$

Propiedades de la suma de matrices: como la suma de matrices definidas a partir de la suma de números reales cumple las mismas propiedades que estos, es decir:

- Asociativa: A+(B+C)=(A+B) +C
- Elemento neutro A+0=A, con O la matriz de igual dimensión que A con todos sus coeficientes iguales a cero
- Elemento opuesto: A+(-A)=0, con $(-A)=(-a_{ij})$ es decir los elementos opuestos a los de la matriz A.
- Conmutativa: A+B=B+A

Ejemplo de elemento opuesto:

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 4\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix},\ -A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & -4\\ 0 & -1 & -2\end{pmatrix}$$

2.3 Producto de una matriz por un número (escalar)

Definición: Sea $k\in R$ (escalar) y $A=(a_{ij})$ una matriz de dimensión mxn ($A\in M_{mxn}(R)$).El producto de k por A es otra matriz $k\cdot A$ de misma dimensión tal que:

$k\cdot A=k(a_{ij})=(k\cdot a_{ij})$, es decir la matriz $k\cdot A$ se obtiene de multiplicar por k cada elemento de la matriz A.

Ejemplo: $A\in M_{3x3}(R)$: $k\cdot\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ka_{11} & ka_{12} & ka_{13}\\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23}\\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33}\end{pmatrix}$

Propiedades:

- k(A+B)=kA+kB

  $$3\cdot\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 6\\ 3 & 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 6\\ 3 & 21\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 7\end{pmatrix}$$

- $(k+t)\cdot A=k\cdot A+t\cdot A$
- $k(tA)=(kt)\cdot A$
- $1\cdot A=A$

***Ejercicio 3*:** sacar factor común un escalar de las siguientes matrices de forma que éstas se simplifiquen

$$A=\begin{pmatrix}4 & 8 & -4\\ 0 & 4 & 16\\ 12 & 0 & 0\end{pmatrix}=4\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 4\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{1}{8}\\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}2 & -6 & 1\\ -2 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}36 & 12\\ -48 & 48\end{pmatrix}=12\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ -4 & 4\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}11 & 0 & 0\\ 0 & 11 & 0\\ 0 & 0 & 11\end{pmatrix}=11\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=11\cdot Id$$

Nota: siempre que de forma sencilla se pueda sacar factor común, simplificando la matriz, se recomienda sacar éste, ya que se simplifican los cálculos, especialmente en la multiplicación de matrices, como veremos en el apartado siguiente.

Ejercicio 4: Calcular el valor de a, b, c y d: $\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+5 & 7+a+b \\ -2+c+d & 3d+4 \end{pmatrix}$

2a=a+5 → a=5

2b=7+a+b → b=12

2c=-2+c+d → c=d-2 →c=-6

2d=3d+4 → d=-4

Ejercicio 5: dadas las matrices A, B y C calcular las siguientes operaciones:

A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

a) A+B=$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

b) A-B-C=$\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

c) 3A+5B-6C=$\begin{pmatrix} 29 & -15 \\ 7 & -25 \end{pmatrix}$

Ejercicio 6: resolver los siguientes sistemas

a) $\left.\begin{array}{l} (1)\ 2X+Y=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ (2)\ X-3Y=\begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$

Llamemos A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y B=$\begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(1)-2·(2) → Y+6Y=A-2B → Y=1/7(A-2B)=$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 9 & 8 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

X=B+3Y=$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\left.\begin{array}{l} (1)\ X+Y=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ (2)\ X-Y=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$

Llamamos A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y B=$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(1)+(2)→ 2X=A+B → X=1/2(A+B)=$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{Y=A-X=}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

c) $\left.\begin{array}{l} (1)\ 2X+Y=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ (2)\ X+2Y=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$

Llamamos A=$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ y B=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

(1)-2(2)→ -3Y=A-2B → Y=-1/3(A-2B)= $-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}$

$$\text{X=B-2Y=}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$$

3. Producto de Matrices

El producto de matrices es una operación más compleja que las anteriores. Para poder multiplicar dos matrices es necesario que el nº de columnas de la primera matriz del producto sea igual al nº de filas de la segunda matriz. Veamos la definición del producto de matrices:

Definición: El producto de la matriz A=$(a_{ij})\in M_{mxn}$ y B=$(b_{ij})\in M_{nxp}$ es otra matriz C=A·B$\in M_{mxp}$, con igual nº de filas que A y de columnas que B, tal que el elemento de la matriz C que ocupa la fila i y columna j, c_{ij} se obtiene multiplicando la fila i-esima de la primera matriz con la columna j-ésima de la segunda.

Resulta más sencillo comprender el producto de matrices a partir de varios ejemplos:

$$\underset{3x3}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}}\cdot\underset{3x1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}=\begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot0+3\cdot(-1) \\ 4\cdot1+5\cdot0+6\cdot(-1) \\ 7\cdot1+8\cdot0+9(-1) \end{pmatrix}=\underset{3x1}{\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2(-1) + 3\cdot 3 & 1\cdot 0 + 2\cdot 2 + 3\cdot(-4) \\ 4\cdot 1 + 5\cdot(-1) + 6\cdot 3 & 4\cdot 0 + 5\cdot 2 + 6\cdot(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 17 & -14 \end{pmatrix}$$

2x3 3x2 2x2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

No se puede multiplicar, pues la primera matriz tiene 3 columnas y la segunda 2 filas.

Nota: Veamos la utilidad de sacar factor común en el producto de matrices con un ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 100 & 50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 30 \\ 30 & -90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50\cdot 0 + 30\cdot 0 & 50\cdot 30 + 0\cdot(-90) \\ 100\cdot 0 + 30\cdot 50 & 30\cdot 100 + 50\cdot(-90) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1500 \\ 1500 & -1500 \end{pmatrix}$$

Más simple→ $50\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot 30\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = 1500\begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 0\cdot 1 & 1\cdot 1 + 0\cdot(-3) \\ 0\cdot 2 + 1\cdot 1 & 1\cdot 2 + 1(-3) \end{pmatrix} = 1500\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Ejercicio7: ver todos los productos posibles con las siguientes matrices y calcularlos:

A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, C= $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

A∈M_{3x3}, B∈M_{3x1}, C∈M_{2x3}, solo posibles los siguientes productos:

$$A\cdot B = \underset{3x3}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3x1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1+4+3 \\ 1+2+1 \\ 0+2-1 \end{pmatrix} = \underset{3x1}{\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$C\cdot A = \underset{2x3}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3x3}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2+1+0 & 4+1+0 & 6+1+0 \\ 3+4+0 & 6+4+5 & 9+4-5 \end{pmatrix} = \underset{2x3}{\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 7 & 15 & 8 \end{pmatrix}}$$

$$C\cdot B = \underset{2x3}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3x1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2+2++0 \\ 3+8+5 \end{pmatrix} = \underset{2x1}{\begin{pmatrix} 4 \\ 16 \end{pmatrix}} = 4\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 8: multiplicar A·B y B·A, ¿Qué ocurre?

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&0&0\\1&2&3\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&0&0\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&6&8\\20&12&14\\32&18&20\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&0&0\\1&2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&-6&-6\\2&4&6\\30&36&42\end{pmatrix}$$

Nota**:* en las matrices cuadradas, no siempre cumplen que A·B≠B·A, es decir no se cumple la propiedad conmutativa del producto de matrices. Existen algún tipo de matrices que si conmutan, A·B=B·A, si esto ocurre se dice que ***A y B conmutan

Ejercicio 9: Calcular A^2-B^2, $(A+B)^2$ y $(A-B)^2$ siendo A y B las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\2&1&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&1&2\\-1&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$$

a) $A^2=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\2&1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\2&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&2\\2&2&0\\0&4&2\end{pmatrix}$ nótese que no coincide con elevar al cuadrado cada término de A

$$B^2=\begin{pmatrix}0&1&2\\-1&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&2\\-1&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&5&2\\-1&0&-2\\-2&4&1\end{pmatrix}$$

$$A^2\text{-}B^2=\begin{pmatrix}1&4&2\\2&2&0\\0&4&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&5&2\\-1&0&-2\\-2&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\3&2&2\\2&0&1\end{pmatrix}$$

b) $(A+B)^2=(A+B)\cdot(A+B)=\begin{pmatrix}1&3&2\\-1&2&1\\2&3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3&2\\-1&2&1\\2&3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&15&5\\-1&4&0\\-1&12&7\end{pmatrix}$

c) $(A-B)^2=(A-B)\cdot(A-B)=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&0&1\\2&-1&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&0&1\\2&-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&3&3\\3&0&-4\\-3&4&-1\end{pmatrix}$

Nota: al no ser conmutativo el producto de las matrices se cumple que las igualdades notables no son ciertas cuando A y B son matrices→

$(A+B)^2=A^2+B^2+AB+BA\neq A^2+B^2+2AB$

$(A-B)^2=A^2+B^2-AB-BA\neq A^2+B^2-2AB$

Ejercicio 10: Calcular los valores de x e y que verifican las siguientes igualdades:

a) $\begin{pmatrix}1 & x\\ 2 & y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1 & x\\ 2 & y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+3x & y+4x\\ 2x+3y & 2y+4y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}4x=0\\ y+4x=0\\ 2x+3y=0\\ 6y=0\end{cases}\rightarrow \mathbf{x=y=0}$$

b) $\begin{pmatrix}5 & x\\ y & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-x & 2\\ 5 & -y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}5 & x\\ y & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-x & 2\\ 5 & -y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5x+5x & 10-xy\\ 10-xy & 2y-2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 10-xy\\ 10-xy & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\rightarrow$$

10-xy=0→ **x·y=10**

Ejercicio 11. Decir si son verdaderas o falsas las siguientes identidades para A y B cualquier matriz:

a) $(A+B)^2=A^2+B^2+2AB$ → Falsa $AB\neq BA$ $(A+B)^2=A^2+B^2+AB+BA\neq A^2+B^2+2AB$

b) $(A-B)^2=A^2+B^2-2AB$ → Falsa $AB\neq BA$ $(A-B)^2=A^2+B^2-AB-BA\neq A^2+B^2+2AB$

c) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ → Falsa $AB\neq BA$ $(A+B)(A-B)=A^2-B^2-AB+BA$

Ejercicio 12: Calcular las matrices que conmuten con la matriz A y B, siendo:

$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

a) Si conmutan se cumple que AX=XA →

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}x+z & y+t\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & x+y\\ z & z+t\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix}x+z=x\\ y+t=x+y\\ z=z\\ t=z+t\end{matrix}\right\}\ z=0, x=t, y\ cualquiera\rightarrow\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & x\end{pmatrix} conmuta\,con\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ \forall x,y\in R$$

b) Si conmutan se cumple que BX=XB →

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} b+c & c & 0 \\ e+f & f & 0 \\ h+i & i & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ a+d & b+e & c+f \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} b+c=0 \\ c=0 \\ e+f=a \\ f=b \\ c=0 \\ h+i=a+d \\ 0=0 \\ i=b+e \\ 0=c+f \end{array}\right\}\rightarrow c=0, b=0, f=0, e=a=i, d=h\rightarrow\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & a & 0 \\ g & d & a \end{pmatrix}\textit{conmuta con}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\forall a,d,g\in R$$

Ejercicio 13. Sea A=$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ calcular A^n. Calcular A^{50}, A^{97}

Veamos lo que vale A^2, A^3, y a partir de sus valores busquemos el valor de A^n:

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-Id$$

$A^3=A\cdot A^2=A\cdot(-Id)=-A$

$A^4=A^2\cdot A^2=(-Id)(-Id)=Id$

$A^5=A^4\cdot A=Id\cdot(A)=A$

…

$$A^n=\begin{cases} A & n=1+4k \quad \textit{el resto de dividir } n \textit{ entre } 4 \textit{ es } 1 \\ -Id & n=2+4k \quad \textit{el resto de dividir } n \textit{ entre } 4 \textit{ es } 2 \\ -A & n=3+4k \quad \textit{el resto de dividir } n \textit{ entre } 4 \textit{ es } 3 \\ Id & n=4k \quad \textit{el resto de dividir } n \textit{ entre } 4 \textit{ es } 0 \end{cases}$$

Así A^{50}=-Id, ya que el resto de dividir 50 entre 4 es 2.

A^{97}=A, ya que el resto de dividir 97 entre 4 es 1

Ejercicio 14: Sea A=$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ calcular A^n.

a) A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a)

$$A^2=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+1&1+1\\1+1&1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}=2\cdot A$$

$$A^3=A^2\cdot A=2A\cdot A=2\cdot A^2=2\cdot 2\cdot A=4\cdot A=\begin{pmatrix}2^2&2^2\\2^2&2^2\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3\cdot A=4\cdot A\cdot A=8\cdot A$$

...

$$A^n=2^{n-1}\cdot A=\begin{pmatrix}2^{n-1}&2^{n-1}\\2^{n-1}&2^{n-1}\end{pmatrix}$$

b)

$$A^2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2+1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3\cdot A=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3+1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}$$

...

$$A^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$$

c)

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

...

$$A^n=\begin{pmatrix}1&0&n\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Ejercicio 15. Sea A una matriz que conmuta con B y C. Demostrar que es cierta la igualdad (B·C)·A=A·(B·C)

Si A y B conmutan → A·B=B·A

Si A y C conmutan → A·C=C·A

(B·C)·A=B·(C·A)=B·(A·C)=(B·A)·C=(A·B)·C=A·(B·C)

Ejercicio16 ¿Es posible que para dos matrices A y B no cuadradas puedan existir A·B y B·A?

Sea $A\in M_{mxn}(R)$ y $B\in M_{pxq}(R)$.

Si existe A·B → n=p

Si existe B·A → q=m

Sólo existe A·B y B·A si $A\in M_{mxn}$ y $B\in M_{nxm}$. Un caso particular es cuando m=n, es decir las dos matrices son matrices cuadradas.

4. Transposición de Matrices.Matrices simétricas y antisimétricas

Definición: sea una matriz $A\in M_{mxn}(R)$ se llama matriz transpuesta y se escribe como $A^t\in M_{nxm}(R)$ que resulta de cambiar las filas por las columnas.

Ejemplos:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix} \quad A^t=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \quad B^t=\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} \quad C^t=\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}$$

Propiedades:

1. $(A^t)^t=A$
2. $(A+B)^t=A^t+B^t$
3. $(k\cdot A)^t=kA^t$
4. $(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t$

Las transposiciones de matrices nos permiten definir dos tipos de matrices: simétricas y antisimétricas. Definámoslas:

a) *Matriz simétrica:* es toda matriz cuadrada $A\in M_{nxn}(R)$ tal que coincide con su transpuesta A^t → $A=A^t$, es decir los elementos simétricos respecto a la diagonal son iguales, veamos un ejemplo de dimensión 3:

$$A=\begin{pmatrix} a & x & y \\ x & b & z \\ y & z & c \end{pmatrix} \quad A^t=\begin{pmatrix} a & x & y \\ x & b & z \\ y & z & c \end{pmatrix}$$

b) *Matriz antisimétrica:* es toda matriz cuadrada $A\in M_{nxn}(R)$ tal que coincide con el opuesto de su transpuesta $-A^t$ → $A=-A^t$, es decir los elementos simétricos respecto a la diagonal son opuestos, y los de la diagonal son cero. Veamos un ejemplo de dimensión 3:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{pmatrix} \quad A^t=\begin{pmatrix} 0 & -x & -y \\ x & 0 & -z \\ y & z & 0 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{pmatrix}=-A$$

Ejercicio 17. Demostrar las propiedades de matrices traspuestas a partir de las siguientes matrices:

$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

P1: $(A^t)^t=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

P2: $(A+B)^t=\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\right)^t=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}=A^t+B^t=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$

P3: $(k\cdot A)^t=\left(k\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right)^t=\begin{pmatrix} -k & 2k \\ 3k & 4k \end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix} -k & 3k \\ 2k & 4k \end{pmatrix}\leftrightarrow kA^t=k\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -k & 3k \\ 2k & 4k \end{pmatrix}$

P4: $(A\cdot B)^t=\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\right)^t=\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 19 & 29 \end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix} 7 & 19 \\ 7 & 29 \end{pmatrix}\leftrightarrow B^t\cdot A^t=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 19 \\ 7 & 29 \end{pmatrix}$

Ejercicio 18: Escribir una matriz simétrica y antismétrica de dimensión 2,3 y 4.

$$simétrica \quad S=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix} \qquad antismétrica \quad A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

$$simétrica \quad S=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -3 & 9\\ 3 & 9 & 5\end{pmatrix} \qquad antismétrica \quad A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ -2 & 0 & 9\\ -3 & -9 & 0\end{pmatrix}$$

$$simétrica \quad S=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 3 & 6 & 2\\ 4 & 6 & 2 & 0\\ 5 & 2 & 0 & 7\end{pmatrix} \quad antisimétrica \quad A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 4 & 5\\ -2 & -4 & 0 & 6\\ -3 & -5 & -6 & 0\end{pmatrix}$$

Ejercicio 19. Encontrar todas las matrices A antisimétricas y S simétricas de orden 2 que verifican A^2=Id y S^2=Id

Si A es antisimétrica de orden 2 entonces es de la siguiente forma $A=\begin{pmatrix}0 & x\\ -x & 0\end{pmatrix}$, $\forall x\in R$

$A^2=\begin{pmatrix}0 & x\\ -x & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & x\\ -x & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x^2 & 0\\ 0 & -x^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ → $-x^2=1$ imposible, es decir no hay ninguna matriz antismétrica de orden 2 que al cuadrado sea igual a la Id.

Si S es simétrica de orden 2 es de la siguiente forma $S=\begin{pmatrix}y & x\\ x & z\end{pmatrix}$, $\forall x,y,z\in R$

$S^2=\begin{pmatrix}y & x\\ x & z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y & x\\ x & z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2+y^2 & yx+xz\\ yx+xz & x^2+z^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ →

$\left.\begin{array}{l}(1)\ x^2+y^2=1\\ (2)\ x^2+z^2=1\\ (3)\ yx+xz=0\end{array}\right\}$ de la ecuación 3 obtenemos x(y+z)=0 → x=0 o y=-z

caso 1: x=0 → $y=\pm1$, $z=\pm1$

$S_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, S_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, S_3=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, S_4=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

caso 2: y=-z → $x^2+y^2=1$ $x=\pm\sqrt{1-y^2}$

$S_5=\begin{pmatrix}y & \sqrt{1-y^2}\\ \sqrt{1-y^2} & -y\end{pmatrix}$, $S_6=\begin{pmatrix}y & -\sqrt{1-y^2}\\ -\sqrt{1-y^2} & -y\end{pmatrix}$ se cumple siempre que $-1\le y\le 1$ (radicando positivo).

Ejercicio 20. Descomponer toda matriz cuadrada como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica

Sea $B\in M_{nxn}$ la matriz cuadrada, veamos las siguientes matrices:

$S=\frac{B+B^t}{2}$ → demostremos que es simétrica $S^t=\left(\frac{B+B^t}{2}\right)^t=\frac{B^t+B}{2}=S$

$A=\frac{B-B^t}{2}$ → demostremos que es antismétrica $A^t=\left(\frac{B-B^t}{2}\right)^t=\frac{B^t-B}{2}=-\frac{B-B^t}{2}=-A$

Tendremos que comprobar que la suma de A y S suman B:

$A+S=\frac{B-B^t}{2}+\frac{B+B^t}{2}=B$

5. Matriz inversa

5.1 Definición

Definición: la matriz inversa de una matriz cuadrada $A\in M_{nxn}(R)$ es otra matriz cuadrada de misma dimensión que se denota como $A^{-1}\in M_{nxn}(R)$ tal que se cumple:

$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=Id$ con $Id\in M_{nxn}(R)$

No todas las matrices cuadradas tienen inversa, así las matrices que tiene inversa se llaman **matrices regulares** y las que no tienen inversa se denominan **matrices singulares.**

5.2 Cálculo de la inversa

El método más sencillo para el cálculo de la inversa lo veremos en el tema siguiente, cuando definamos el determinante de las matrices.

Para matrices 2x2 podemos calcular la inversa a partir de la definición:

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}2&2\\3&7\end{pmatrix}\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$$

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}2&2\\3&7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2x+2z&2y+2t\\3x+7z&3y+7t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Tenemos 4 ecuaciones con 4 incógnitas, que podemos agruparlas en dos sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ 2x+2z=1\\(2)\ 2y+2t=0\\(3)\ 3x+7z=0\\(4)\ 3y+7t=1\end{array}\right\}$$

Los sistemas son:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ 2x+2z=1\\(3)\ 3x+7z=0\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}(2)\ 2y+2t=0\\(4)\ 3y+7t=1\end{array}\right\}$$

Las soluciones son x=7/8, y=-1/4, z=-3/8 y t=1/4, con lo que $A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}7 & -2\\-3 & 2\end{pmatrix}$

Comprobación: $A\cdot A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}8 & 0\\0 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=Id$

Ejercicio 21. Calcular la inversa de las siguientes matrices

a) $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\2 & 0\end{pmatrix}$ $A^{-1}=\begin{pmatrix}x & y\\z & t\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0 & 1\\2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z & t\\2x & 2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

(1) z=1

(2) t=0

(3) 2x=0

(4) 2y=1

Solución x=t=0 y=1/2 z=1 → $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\1 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\2 & 0\end{pmatrix}$

Comprobación: $A\cdot A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=Id$

b) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$ $A^{-1}=\begin{pmatrix}x & y\\z & t\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2z & y+2t\\3x+4z & 3y+4t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ x+2z=1\\(2)\ y+2t=0\\(3)\ 3x+4z=0\\(4)\ 3y+4t=1\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ x+2z=1\\(3)\ 3x+4z=0\end{array}\right\}x=-2,\ z=3/2$$

$$\left.\begin{array}{l}(2)\ y+2t=0\\(4)\ 3y+4t=1\end{array}\right\}y=1,\ t=-1/2$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\3/2 & -1/2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4 & 2\\3 & -1\end{pmatrix}$$

c) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 8\end{pmatrix}$ $A^{-1}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2z & y+2t\\ 4x+8z & 4y+8t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

(1) x+2z=1

(2) y+2t=0

(3) 4x+8z=0

(4) 4y+8t=1

$\left.\begin{array}{l}(1)\ x+2z=1\\ (3)\ 4x+8z=0\end{array}\right\}$ no solución

$\left.\begin{array}{l}(2)\ y+2t=0\\ (4)\ 4y+8t=1\end{array}\right\}$ no solución

Luego la matriz A no tiene inversa, por lo que es una matriz singular .

6. Resolución de ecuaciones matriciales

6.1 Definición

Definición: son ecuaciones algebraicas donde los coeficientes y las incógnitas son matrices.

Ejemplos

(PAU JUN 2004 PRUEBA A, C-4) → X·B+B=B^{-1} siendo B=$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

(PAU SEP 2004 PRUEBA B, C-1)→ P^{-1}·B·P=A siendo $P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

6.2 Resolución de ecuaciones.

Tenemos que obtener la matriz incógnita, que generalmente se denota como X, despejándola de la igualdad. Para conseguirlo tenemos las siguientes reglas:

1) Si una matriz está sumando a un lado de la igualdad pasa restando al otro lado de la igualdad y al revés.

X+B=C → X=C-B

X-B=C → X=C+B

2) Si multiplicamos una matriz por la izquierda a un lado de la igualdad también lo tenemos que hacer en el otro lado de la igualdad por la izquierda. Igual por la derecha.

$A\cdot X=B \rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B \rightarrow Id\cdot X=A^{-1}\cdot B \rightarrow X=A^{-1}\cdot B$

$X\cdot A=B \rightarrow X\cdot A\cdot A^{-1}=B\cdot A^{-1} \rightarrow X\cdot Id=B\cdot A^{-1} \rightarrow X=B\cdot A^{-1}$

Ejemplo: veamos la resolución de los dos anteriores ejemplos:

(PAU JUN 2004 PRUEBA B, C-4)

$X\cdot B+B=B^{-1} \xrightarrow{\textit{pasamos B otro miembro}} X\cdot B=B^{-1}-B \xrightarrow{\textit{multiplicamos por } B^{-1} \textit{ a la derecha}} X\cdot B\cdot B^{-1}=(B^{-1}-B)\cdot B^{-1}$

$X\cdot Id=(B^{-1}-B)\cdot B^{-1} \rightarrow X=B^{-1}\cdot B^{-1}-B\cdot B^{-1}= B^{-1}\cdot B^{-1}-Id$

Calculando B^{-1} tenemos que $B^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ con lo que $X=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}=4\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(PAU SEP 2004 PRUEBA B, C-1)

$P^{-1}\cdot B\cdot P=A \xrightarrow{\textit{multiplicamos por P por la izquierda}} P\cdot P^{-1}\cdot B\cdot P=P\cdot A \rightarrow Id\cdot B\cdot P=A\cdot P \rightarrow B\cdot P=P\cdot A$

$\xrightarrow{\textit{multiplicamos por } P^{-1} \textit{ por la derecha}} B\cdot P\cdot P^{-1}=P\cdot A\cdot P^{-1} \rightarrow B=P\cdot A\cdot P^{-1}$

Calculando $P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ tenemos que la matriz B buscada es:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 22: Las matrices A tal que $A^2=A$ se llaman idelpotentes, calcular las matrices idelpotentes de orden 2

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ba+bc \\ ab+bc & c^2+b^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

$\left.\begin{array}{l} (1)\ a^2+b^2=a \\ (2)\ ba+bc=b \\ (3)\ ba+bc=b \\ (4)\ c^2+b^2=c \end{array}\right\}$ → (2) y (3) son iguales b=b(a+c) → caso 1: a=1-c ; caso 2 b=0

Caso 1 a=1-c

Sustituyendo en (1) $(1-c)^2+b^2=(1-c)$ → $b=\pm\sqrt{c-c^2}$

$A=\begin{pmatrix} 1-c & \pm\sqrt{c-c^2} \\ \pm\sqrt{c-c^2} & c \end{pmatrix}$ $\forall$ $c\in[0,1]$ (que son los valores de c donde el radicando es positivo)

$A_1=\begin{pmatrix} 1-c & \sqrt{c-c^2} \\ \sqrt{c-c^2} & c \end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix} 1-c & -\sqrt{c-c^2} \\ -\sqrt{c-c^2} & c \end{pmatrix}$

Caso 2 b=0

Sustituyendo en (1) → $a^2=a$ a=1,0

Sustituyendo en (4) → $c^2=c$ c=1,0

Esto nos genera 4 soluciones:

$A_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_5=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_6=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 23. Sea A la matriz $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calcular k tal que se cumpla la siguiente igualdad $(A-kId)^2=0$

$(A-kId)=\begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix}$

$$(A-kI)^2=\begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} k^2-1 & 2k-2 & 4k-4 \\ 2k-2 & k^2-1 & 4k-4 \\ -2k+2 & -2k+2 & 5-6k+k^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos 9 ecuaciones con una incógnita, todas las ecuaciones tienen una solución común **k=1.** Si la solución fuera distinta en alguna otra ecuación no tendría solución

Ejercicio 24. Calcular la matriz X, en la ecuación matricial B(2A+Id)=AXA+B siendo $A=\begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$B(2A+Id)=AXA+B \xrightarrow{pasamos\ B\ otro\ miembro} B(2A+Id)-B=AXA \rightarrow 2BA=AXA$

$\xrightarrow{multiplicamos\ por\ A^{-1}\ por\ izquierda} 2A^{-1}BA= A^{-1}AXA \rightarrow 2A^{-1}BA = XA \xrightarrow{multiplicamos\ A^{-1}\ por\ la\ derecha}$

$2A^{-1}BA\ A^{-1}= XAA^{-1} \rightarrow 2A^{-1}B = X$

Calculando A^{-1} (tema siguiente) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$

$$X=2A^{-1}B=2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -8 & 14 \\ -6 & -18 & 32 \\ 4 & 14 & -26 \end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix} -1 & -4 & 7 \\ -3 & -9 & 16 \\ 2 & 7 & -13 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 25. Prueba que A^2-A-2I=0 siendo $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcula A^{-1} a partir de la anterior igualdad:

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2-A-2Id=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A^2-A-2Id=0 \rightarrow A^2-A=2Id \rightarrow A(A-Id)=2Id \rightarrow A\dfrac{(A-Id)}{2}=Id \rightarrow A^{-1}=\dfrac{(A-Id)}{2}$

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 26. Si A y B son dos matrices diagonales de orden 2 demuestra que A·B=B·A. Hallar las matrices diagonales que cumplan A^2=Id

a) $A=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ → A·B=$\begin{pmatrix} xz & 0 \\ 0 & yt \end{pmatrix}$, B·A=$\begin{pmatrix} xz & 0 \\ 0 & yt \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ → $x^2=1$, $y^2=1$ →$x=\pm 1$, $y=\pm 1$

Luego hay 4 soluciones: $A_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,$A_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,$A_4=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Ejercicios PAU:

Junio 2004.Prueba B

C-4-Dada la matriz $B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ hállese una matriz X que verifique la ecuación $XB+B=B^{-1}$.

$X\cdot B+B=B^{-1} \xrightarrow{\text{pasamos } B \text{ otro miembro}} X\cdot B=B^{-1}-B \xrightarrow{\text{multiplicamos por } B^{-1} \text{ a la derecha}} X\cdot B\cdot B^{-1}=(B^{-1}-B)\cdot B^{-1}$

$X\cdot Id=(B^{-1}-B)\cdot B^{-1} \rightarrow X=B^{-1}\cdot B^{-1}-B\cdot B^{-1}= B^{-1}\cdot B^{-1}-Id$

Calculando B^{-1} tenemos que $B^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ con lo que $X=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}=4\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Septiembre 2004. Prueba B

C-1) Dadas las matrices $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, hállese la matriz B sabiendo que $P^{-1}BP=A$.

$P^{-1}\cdot B\cdot P=A \xrightarrow{\text{multiplicamos por } P \text{ por la izquierda}} P\cdot P^{-1}\cdot B\cdot P=P\cdot A \rightarrow Id\cdot B\cdot P=A\cdot P \rightarrow B\cdot P=P\cdot A$

$\xrightarrow{\text{multiplicamos por } P^{-1} \text{ por la derecha}} B\cdot P\cdot P^{-1}=P\cdot A\cdot P^{-1} \rightarrow B=P\cdot A\cdot P^{-1}$

Calculando $P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ tenemos que la matriz B buscada es:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Junio 2005. Prueba B

C-1.- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, hállense las matrices *X* que satisfacen $XC+A=C+A^2$.

$XC+A=C+A^2$ siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$XC+A=C+A^2 \xrightarrow{\text{pasamos } A \text{ al otro miembro}} XC=C+A^2-A \xrightarrow{\text{multiplicamos por } C^{-1} \text{ por la derecha}}$

$XC\cdot C^{-1}=(C+A^2-A)\cdot C^{-1} \rightarrow X=(C+A^2-A)\cdot C^{-1} \rightarrow X=Id+(A^2-A)\cdot C^{-1}$

Calculemos $A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$=A. Luego sustituyendo A^2=A en la ecuación matricial tenemos:

$X=Id+(A-A)\cdot C^{-1}=Id$

Junio 2006. Prueba A

C-1- Hállense las matrices A cuadradas de orden 2, que verifican la igualdad:

$A\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot A$

$A\cdot\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot A$ → es equivalente a ver las matrices que conmutan con $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$

Por resolución de ecuaciones no podemos obtenerla, ya que no podemos despejar A, ya que para eliminarla del primer miembro deberíamos multiplicar por A^{-1}, pero entonces tendríamos A y A^{-1} en el segundo miembro.

Para solucionar esto definamos la matriz A como $A=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$. Así la igualdad es de la siguiente:

$$\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}x+y&y\\z+t&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&y\\x+z&y+t\end{pmatrix}\rightarrow$$

(1) $x+y=x \rightarrow y=0$

(2) $y=y$

(3) $z+t=x+z \rightarrow t=x$

(4) $y+t=t \rightarrow y=0$

Luego A será toda matriz $A=\begin{pmatrix}x&0\\z&x\end{pmatrix}$ $\forall x,z\in R$.

Comprobación:

$$\begin{pmatrix}x&0\\z&x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&0\\x+z&x\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x&0\\z&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&0\\x+z&x\end{pmatrix}$$

Junio 2006. Prueba B

C-1.- Dadas las matrices $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, hállese razonadamente la matriz *B* sabiendo que *BP=A*.

$B\cdot P=A \rightarrow B\cdot P\cdot P^{-1}= A\cdot P^{-1} \rightarrow B= A\cdot P^{-1}$

Calculando P^{-1}(tema siguiente): $P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Entonces $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Septiembre 2007. Prueba A

C-1.- Sean *X* una matriz 2x2, *I* la matriz identidad 2x2 y $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar *X* sabiendo que $BX+B=B^2+I$.

$$BX + B = B^2 + I \rightarrow BX = B^2 + I - B \rightarrow B^{-1}\cdot(BX) = B^{-1}\left(B^2 + I - B\right) \rightarrow$$
$$X = B^{-1}B^2 + B^{-1} - B^{-1}B \rightarrow X = B + B^{-1} - I$$

Calculando $B^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Junio 2008. Prueba A

C-3.- Sean $B=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$ calcular A sabiendo $A^2=B$ y $A^3=C$

Veamos lo difícil que sería resolver el sistema de la siguiente forma

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + yz & xy + yt \\ xz + zt & zy + t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} x^2 + yz & xy + yt \\ xz + zt & zy + t^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 + xyz + xyz + yzt & x^2y + y^2z + xyt + yt^2 \\ x^2z + xzt + z^2y + t^2z & xyz + yzt + zyt + t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

…

Tendremos que pensar en una forma más sencilla para encontrar la matriz A:

Si $B=A^2$ y $C=A^3$, entonces se cumple que $C=A^2 \cdot A=B \cdot A$

$C=B \cdot A \rightarrow B^{-1} \cdot C=A$

Calculando $B^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 89 & 55 \\ 55 & 34 \end{pmatrix}$