

## EJERCICIOS DE MATRICES

### Ejercicio 1.-

Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ , calcula:

a)  $-2A + 3B$       b)  $\frac{1}{2} A \cdot B$       c)  $B \cdot (-A)$       d)  $A \cdot A - B \cdot B$

a)  $\begin{pmatrix} -23 & 4 \\ -12 & 4 \end{pmatrix}$       b)  $\begin{pmatrix} -17/2 & -2 \\ -11/2 & 1 \end{pmatrix}$       c)  $\begin{pmatrix} 21 & -6 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$       d)  $\begin{pmatrix} 43 & -16 \\ 24 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -16 \\ 22 & -9 \end{pmatrix}$

### Ejercicio 2.-

Efectúa el producto  $\begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{pmatrix} 7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \end{pmatrix}$$

### Ejercicio 3.-

a) ¿Son iguales las matrices  $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$ ?

b) Halla, si es posible, las matrices  $AB$ ;  $BA$ ;  $A + B$ ;  $A^t - B$ .

a) No,  $A$  tiene dimensión  $2 \times 1$  y  $B$  tiene dimensión  $1 \times 2$ . Para que dos matrices sean iguales, deben tener la misma dimensión y coincidir término a término.

b)  $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$ ;  $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$ ;  $A + B$  no se puede hacer, pues no tienen la misma dimensión.

$$A^t - B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### Ejercicio 4.-

Dadas las matrices:  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  comprueba que:

a)  $(A + B)^t = A^t + B^t$

b)  $(3A)^t = 3A^t$

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } (A + B)^t = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A^t + B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\} (A + B)^t = A^t + B^t$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{b) } (3A)^t = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \\ 3A^t = 3 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \right\} (3A)^t = 3A^t$$

### Ejercicio 5.-

Calcula  $3AA^t - 2I$ , siendo  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} 3AA^t - 2I &= 3 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 10 & 17 \\ 17 & 29 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 30 & 51 \\ 51 & 87 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 51 \\ 51 & 85 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### Ejercicio 6.-

Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , comprueba que  $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ .

$$\left. \begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \\ B^t \cdot A^t &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

### Ejercicio 7.-

Calcula, en cada caso, la matriz  $B$  que verifica la igualdad:

a)  $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

b)  $2 \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - 3B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a)  $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

b)  $2 \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - 3B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow 3B = 2 \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4/3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

### Ejercicio 8.-

Comprueba que la matriz inversa de  $A$  es  $A^{-1}$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = I$$

### Ejercicio 9.-

¿Cuál es la matriz inversa de la matriz unidad?

La matriz unidad,  $I$ .

### Ejercicio 10.-

Halla las matrices  $X$  e  $Y$  que verifican el sistema

$$2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left. \begin{array}{l} 2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \text{Sumando las dos ecuaciones, queda:}$$

$$3X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Despejamos  $Y$  en la 2ª ecuación:

$$Y = X - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto,  $X = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  y  $Y = \begin{pmatrix} -1/3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

### Ejercicio 11.-

Calcula  $X$  tal que  $X - B^2 = A \cdot B$ , siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A \cdot B + B^2$$

$$\left. \begin{array}{l} A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\} X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

### Ejercicio 12.-

Determina los valores de  $m$  para los cuales

$$X = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ verifique } X^2 - \frac{5}{2}X + I = 0.$$

$$\begin{aligned} X^2 - \frac{5}{2}X + I &= \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \frac{5}{2} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \frac{5}{2} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 - (5/2)m + 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tiene que cumplirse que:

$$m^2 - \frac{5}{2}m + 1 = 0 \rightarrow 2m^2 - 5m + 2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow m = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Hay dos soluciones:  $m_1 = 2$ ;  $m_2 = \frac{1}{2}$

### Ejercicio 13.-

Resuelve:  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x - y \\ 3x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2x \\ 3y - 2 \end{pmatrix} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y = 3 + 2x \\ 3x + 2y = 3y - 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + y = -3 \\ 3x - y = -2 \end{array} \right\}$$

Sumando:  $4x = -5 \rightarrow x = \frac{-5}{4} \rightarrow y = -3 - x = -3 + \frac{5}{4} = \frac{-7}{4}$

Solución:  $x = \frac{-5}{4}$ ;  $y = \frac{-7}{4}$

### Ejercicio 14.-

Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ , calcula  $A^2, A^3, \dots, A^{128}$ .

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I; A^4 = A^3 \cdot A = I \cdot A = A$$

$$A^{128} = A^{42 \cdot 3 + 2} = (A^3)^{42} \cdot A^2 = I^{42} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

### Ejercicio 15.-

Comprueba que  $A^2 = 2A - I$ , siendo:  $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$  e  $I$  la matriz unidad de orden 3.

Utiliza esa igualdad para calcular  $A^4$ .

$$\left. \begin{array}{l} A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \\ 2A - I = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \end{array} \right\} A^2 = 2A - I$$

Calculamos  $A^4$ :

$$A^4 = (A^2)^2 = (2A - I)^2 = (2A - I)(2A - I) = 4A^2 - 2A - 2A + I^2 = \\ = 4(2A - I) - 4A + I = 8A - 4I - 4A + I = 4A - 3I =$$

$$= 4 \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -16 & 8 \\ 8 & -4 & 4 \\ -16 & 16 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

### Ejercicio 16.-

Calcula  $A^n$  y  $B^n$  siendo:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$   $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\bullet A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/7 & 3/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así,  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Lo probamos por inducción:

Acabamos de comprobar que para  $n = 2$  (primer caso relevante), funciona.

Suponemos que es cierto para  $n - 1$ :

$$A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n-1/7 & n-1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$$

Por tanto,  $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ . Lo probamos por inducción:

Igual que en el caso anterior, para  $n = 2$  se cumple.

Suponemos que es cierto para  $n - 1$ :

$$B^n = B^{n-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

### Ejercicio 17.-

Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , prueba que  $A^3$  es la matriz nula.

Demuestra después que la matriz  $I + A + A^2$  es la matriz inversa de  $I - A$ .

• Multiplica  $I + A + A^2$  por  $I - A$ .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Veamos que  $I + A + A^2$  es la inversa de  $I - A$ :

$$(I + A + A^2)(I - A) = I - A + A - A^2 + A^2 - A^3 = I - A^3 = I - \mathbf{0} = I.$$

Como  $(I + A + A^2) \cdot (I - A) = I$ , entonces  $I + A + A^2$  es la inversa de  $I - A$ .

### Ejercicio 18.-

Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$  comprueba que  $(A + I)^2 = \mathbf{0}$  y expresa  $A^2$  como combinación lineal de  $A$  e  $I$ .

$$A + I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(A + I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Expresamos  $A^2$  como combinación lineal de  $A$  e  $I$ :

$$\begin{aligned} (A + I)^2 = \mathbf{0} &\rightarrow (A + I)(A + I) = A^2 + A + A + I = A^2 + 2A + I = \mathbf{0} \rightarrow \\ &\rightarrow A^2 = -2A - I \end{aligned}$$

### Ejercicio 19.-

a) Comprueba que la inversa de  $A$  es  $A^{-1}$ :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 0 \\ -3/5 & 6/5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calcula la matriz  $X$  que verifica  $XA = B$ , siendo  $A$  la matriz anterior y  $B = (1 \ -2 \ 3)$ .

a)  $A \cdot A^{-1} = I$

b)  $XA = B \rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \rightarrow X = B \cdot A^{-1}$

Por tanto:

$$X = (1 \ -2 \ 3) \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 0 \\ -3/5 & 6/5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left( \frac{7}{5} \quad \frac{1}{5} \quad -2 \right)$$

### Ejercicio 20.-

Halla  $X$  e  $Y$  sabiendo que  $5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$  y  $3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$ .

$$\left. \begin{array}{l} 5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \\ 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \begin{array}{l} -15X - 9Y = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 12 & -45 \end{pmatrix} \\ 15X + 10Y = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -10 & 45 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \text{Sumando: } Y = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

### Ejercicio 21.-

Una compañía de muebles fabrica butacas, mecedoras y sillas, y cada una de ellas de tres modelos: E (económico), M (medio) y L (lujo). Cada mes produce 20 modelos E, 15 M y 10 L de butacas; 12 modelos E, 8 M y 5 L de mecedoras, y 18 modelos E, 20 M y 12 L de sillas. Representa esta información en una matriz y calcula la producción de un año.

$$\text{Cada mes: } \begin{array}{l} \text{BUTACAS} \\ \text{MECEDORAS} \\ \text{SILLAS} \end{array} \begin{pmatrix} \text{E} & \text{M} & \text{L} \\ 20 & 15 & 10 \\ 12 & 8 & 5 \\ 18 & 20 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\text{Cada año: } 12 \cdot \begin{pmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 12 & 8 & 5 \\ 18 & 20 & 12 \end{pmatrix} = \begin{array}{l} \text{BUTACAS} \\ \text{MECEDORAS} \\ \text{SILLAS} \end{array} \begin{pmatrix} \text{E} & \text{M} & \text{L} \\ 240 & 180 & 120 \\ 144 & 96 & 60 \\ 216 & 240 & 144 \end{pmatrix}$$

### Ejercicio 22.-

En un edificio hay tres tipos de viviendas: L3, L4 y L5. Las viviendas L3 tienen 4 ventanas pequeñas y 3 grandes; las L4 tienen 5 ventanas pequeñas y 4 grandes, y las L5, 6 pequeñas y 5 grandes. Cada ventana pequeña tiene 2 cristales y 4 bisagras, y las grandes, 4 cristales y 6 bisagras.

- a) Escribe una matriz que describa el número y tamaño de ventanas de cada vivienda y otra que exprese el número de cristales y bisagras de cada tipo de ventana.
- b) Calcula la matriz que expresa el número de cristales y de bisagras de cada tipo de vivienda.

$$\text{a) } \begin{array}{l} \text{L3} \\ \text{L4} \\ \text{L5} \end{array} \begin{pmatrix} \text{P} & \text{G} \\ 4 & 3 \\ 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}; \begin{array}{l} \text{P} \\ \text{G} \end{array} \begin{pmatrix} \text{C} & \text{B} \\ 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{array}{l} \text{L3} \\ \text{L4} \\ \text{L5} \end{array} \begin{pmatrix} \text{P} & \text{G} \\ 4 & 3 \\ 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{l} \text{P} \\ \text{G} \end{array} \begin{pmatrix} \text{C} & \text{B} \\ 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{array}{l} \text{L3} \\ \text{L4} \\ \text{L5} \end{array} \begin{pmatrix} \text{C} & \text{B} \\ 20 & 34 \\ 26 & 44 \\ 32 & 54 \end{pmatrix}$$

### Ejercicio 23.-

Un industrial fabrica dos tipos de bombillas: transparentes (T) y opacas (O). De cada tipo se hacen cuatro modelos:  $M_1, M_2, M_3$  y  $M_4$ .

	T	O	
$M_1$	300	200	Esta tabla muestra la producción semanal de bombillas de cada tipo y modelo.
$M_2$	400	250	
$M_3$	250	180	
$M_4$	500	300	

El porcentaje de bombillas defectuosas es el 2% en el modelo  $M_1$ , el 5% en el  $M_2$ , el 8% en el  $M_3$  y el 10% en el  $M_4$ .

Calcula la matriz que expresa el número de bombillas transparentes y opacas, buenas y defectuosas, que se producen.

$$\begin{array}{cccc} & & & \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{array}{cccc} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \\ D & (0,02 & 0,05 & 0,08 & 0,1) \\ B & (0,98 & 0,95 & 0,92 & 0,9) \end{array} & \cdot & \begin{array}{cc} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{array} & \begin{array}{cc} \left( \begin{array}{cc} 300 & 200 \\ 400 & 250 \\ 250 & 180 \\ 500 & 300 \end{array} \right) & = & \begin{array}{cc} T & O \\ B & (1354 & 869,1) \end{array} \approx & \begin{array}{cc} T & O \\ B & (1354 & 869) \end{array} \end{array}$$

### Ejercicio 24.-

Halla todas las matrices  $X$  de la forma  $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$  tales que  $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} a^2 = 1 \\ a + b = 0 \\ b^2 = 1 \\ b + c = 0 \\ c^2 = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = \pm 1 \\ a = -b \\ b = \pm 1 \\ c = -b \\ c = \pm 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \rightarrow b = -1 \rightarrow c = 1 \\ a = -1 \rightarrow b = 1 \rightarrow c = -1 \end{array} \right.$$

Hay dos soluciones:  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

### Ejercicio 25.-

Dada la matriz:  $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$  prueba que se verifica  $A^3 + I = 0$  y utiliza esta igualdad para obtener  $A^{10}$ .

• Haz  $A^{10} = (A^3)^3 \cdot A$  y ten en cuenta que  $A^3 = -I$ .

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}; A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A^3 + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos  $A^{10}$  (teniendo en cuenta que  $A^3 + I = 0 \rightarrow A^3 = -I$ ):

$$A^{10} = (A^3)^3 \cdot A = (-I)^3 \cdot A = -I \cdot A = -A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$



### Ejercicio 26.-

Justifica por qué no es cierta la igualdad:  $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$  cuando  $A$  y  $B$  son dos matrices cualesquiera.

$$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$$

Para que la igualdad fuera cierta, tendría que ser  $AB = BA$ ; y, en general, no es cierto para dos matrices cualesquiera.

### Ejercicio 27.-

Sea  $A$  una matriz de dimensión  $2 \times 3$ :

a) ¿Existe una matriz  $B$  tal que  $A \cdot B$  sea una matriz de una sola fila?

b) ¿Y para  $B \cdot A$ ?

Pon un ejemplo para cada caso, siendo:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) No;  $A \cdot B$  tendrá 2 filas necesariamente. Por ejemplo, tomando  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ , tenemos que:  $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) Sí; si tomamos una matriz de dimensión  $1 \times 2$  (ha de tener dos columnas para poder multiplicar  $B \cdot A$ ), el resultado tendrá una sola fila. Por ejemplo:

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = (1 \ 2), \text{ entonces } B \cdot A = (5 \ 2 \ 0)$$

### Ejercicio 28.-

Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden 3 tal que  $a_{ij} = 0$  si  $i \neq j$  ( $A$  es una matriz diagonal). Prueba que el producto de dos matrices diagonales es una matriz diagonal.

Si  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$ , su producto es:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}b_{33} \end{pmatrix}, \text{ que también es una matriz diagonal.}$$

---

### Ejercicio 29.-

Sean  $A = (a_{ij})_{m,n}$ ,  $B = (b_{ij})_{n,p}$ ,  $C = (c_{ij})_{q,r}$ . ¿Qué condiciones deben cumplir  $p$ ,  $q$  y  $r$  para que se puedan efectuar las siguientes operaciones?

a)  $A \cdot C \cdot B$

b)  $A \cdot (B + C)$

a)  $n = q = r$

b)  $n = q$ ;  $p = r$