Distribuciones binomial y normal 11

ACTIVIDADES

1. Página 262

a) Sería mejor estudiar toda la población, ya que es una población pequeña.

b) Sería mejor estudiar una muestra de la población, ya que es imposible medir la temperatura en todos los lugares de la comunidad en todo momento.

c) Sería mejor estudiar una muestra de la población, ya que es muy costoso obtener el peso de todos los habitantes del país.

d) Sería mejor estudiar toda la población, porque es una población pequeña.

e) Sería mejor estudiar toda la población, ya que es una población pequeña.

2. Página 262

Para llegar a esta conclusión hay dos opciones:

- Se ha realizado un censo de las alturas de toda la población, donde 167 cm es la media de las alturas de la población. En este casi si se estudiaría a toda la población.
- Se ha estudiado una muestra de la población, realizando un estudio estadístico. En este caso 167 cm es la media muestral y no se habrá estudiado toda la población.

Para que sea conveniente hacer un censo, el tamaño de la población no debe ser muy grande.

3. Página 262

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Un posible estudio estadístico sería: estudiar el número medio de horas que ven la televisión los alumnos de mi instituto.

La población sería todo el alumnado del instituto. El tamaño de la población es el número de alumnos total del instituto.

Una posible muestra sería escoger al azar 40 alumnos. El tamaño muestral sería 40.

4. Página 263

a) Puede ser un muestreo aleatorio ya que, en principio, cada corredor tiene la misma probabilidad de ser escogido para el control.

b) No es un muestreo aleatorio ya que al estar en la estación de trenes la probabilidad de que se utilice el transporte público es mayor que la probabilidad de que no se utilice, es decir, no son sucesos equiprobables.

c) Las probabilidades de escoger a un hombre y a una mujer son distintas; por lo tanto, el muestreo no puede ser aleatorio.

5. Página 263

Tenemos que modificar los procedimientos del apartado b) y c) puesto que el apartado a) ya podía ser un muestreo aleatorio.

En el apartado b) para que el muestreo pudiese ser aleatorio se podría realizar una encuesta en varios lugares aleatorios de la ciudad.

En el apartado c) para que el muestreo fuese aleatorio se podrían elegir 45 hombres y 65 mujeres:

$P\text{(Hombre)} = \frac{45}{450} = \frac{1}{10} = 0{,}1$ $\qquad$ $P\text{(Mujer)} = \frac{65}{650} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

6. Página 263

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Dos posibles estudios donde podemos extraer una muestra aleatoria son:

- Estudiar la altura media de una población.
- Realizar una encuesta telefónica sobre el nivel de estudios de una población tomando los números de teléfono al azar.

7. Página 263

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Dos posibles estudios donde no podemos extraer una muestra aleatoria son:

- Realizar una encuesta sobre el nivel de estudios de una población entre los visitantes de un congreso sobre ecuaciones en derivadas parciales.
- Estudiar la altura media de una población, tomando como muestra gente que acude a un congreso de jugadores de baloncesto.

8. Página 264

a) El número de muestras es: $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{24}{4} = 6$.

Las posibles muestras son: {1, 3}, {1, 5}, {1, 7}, {3, 5}, {3, 7}, {5, 7}.

b) El número de muestras es: $\binom{4+2-1}{2} = \frac{(4+2-1)!}{2!(4-1)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{120}{12} = 10$.

Las posibles muestras son: {1, 1}, {1, 3}, {1, 5}, {1, 7}, {3, 3}, {3, 5}, {3, 7}, {5, 5}, {5, 7}, {7, 7}.

9. Página 264

a) La población de las medias es: {2, 3, 4, 4, 5, 6}.

La media es: $\frac{2+3+4+4+5+6}{6} = \frac{24}{6} = 4$.

b) La población de las medias es: {1, 2, 3, 4, 3, 4, 5, 5, 6, 7}.

La media es: $\frac{1+2+3+4+3+4+5+5+6+7}{10} = \frac{40}{4} = 4$

10. Página 265

a) $n = 25$

Asignamos de manera aleatoria un número a cada una de las 2 350 gallinas ponedoras y calculamos la constante de elevación: $h = \frac{2350}{25} = 94$

Elegimos al azar un número entre 1 y 94, ambos incluidos, y determinamos la gallina marcada con ese número. Si, por ejemplo, el elegido es el número 45, ese es el primer elemento de la muestra, y los siguientes elementos son las gallinas marcadas con los números:

$45 + 94,\ 45 + 94 \cdot 2,\ 45 + 94 \cdot 3,\ \ldots,\ 45 + 94 \cdot 25$

b) $n = 235$

Asignamos de manera aleatoria un número a cada una de las 2 350 gallinas ponedoras y calculamos la constante de elevación: $h = \frac{2350}{235} = 10$

Elegimos al azar un número entre 1 y 10, ambos incluidos, y determinamos la gallina marcada con ese número. Si, por ejemplo, el elegido es el número 5, ese es el primer elemento de la muestra, y los siguientes elementos son las gallinas marcadas con los números:

$5 + 10,\ 5 + 10 \cdot 2,\ 5 + 10 \cdot 3,\ \ldots,\ 5 + 10 \cdot 235$

c) $n = 50$

Asignamos de manera aleatoria un número a cada una de las 2 350 gallinas ponedoras y calculamos la constante de elevación: $h = \frac{2350}{50} = 47$.

Elegimos al azar un número entre 1 y 47, ambos incluidos, y determinamos la gallina marcada con ese número. Si, por ejemplo, el elegido es el número 21, ese es el primer elemento de la muestra, y los siguientes elementos son las gallinas marcadas con los números:

$21 + 47,\ 21 + 47 \cdot 2,\ 21 + 47 \cdot 3,\ \ldots,\ 21 + 47 \cdot 50$

d) $n = 47$

Asignamos de manera aleatoria un número a cada una de las 2 350 gallinas ponedoras y calculamos la constante de elevación: $h = \frac{2350}{47} = 50$

Elegimos al azar un número entre 1 y 50, ambos incluidos, y determinamos la gallina marcada con ese número. Si, por ejemplo, el elegido es el número 15, ese es el primer elemento de la muestra, y los siguientes elementos son las gallinas marcadas con los números:

$15 + 50,\ 15 + 50 \cdot 2,\ 15 + 50 \cdot 3,\ \ldots,\ 15 + 50 \cdot 47$

11. Página 265

La muestra es representativa de la población, ya que la elección de los coches no tiene que ver con las características de este, simplemente influye la posición en que pasa.

12. Página 266

$\frac{n}{N} = \frac{60}{280 + 320} = \frac{60}{600} = \frac{1}{10}$. Calculamos el número de hombres, n_1, y el de mujeres, n_2:

$\frac{n_1}{N_1} = \frac{n_1}{280} = \frac{1}{10} \rightarrow n_1 = \frac{280}{10} = 28$ $\qquad$ $\frac{n_2}{N_2} = \frac{n_2}{320} = \frac{1}{10} \rightarrow n_2 = \frac{320}{10} = 32$

Se deben seleccionar 28 hombres y 32 mujeres.

13. Página 266

$n_1 = n_2 = n_3 = \frac{n}{3} = \frac{81}{3} = 27 \rightarrow$ Se deben seleccionar 27 yogures de cada una de las tres marcas.

14. Página 267

Para realizar una muestra estratificada, formamos los estratos:

Estrato 1: formado por las 4 clases de 1.º de ESO.

Estrato 2: formado por las 4 clases de 2.º de ESO.

Estrato 3: formado por las 4 clases de 3.º de ESO.

Estrato 4: formado por las 4 clases de 4.º de ESO.

Los estratos son grupos homogéneos entre sí, y diferenciados entre los distintos grupos. Una vez formados los estratos elegimos muestras aleatorias simples en cada uno de ellos.

Para realizar una muestra conglomerada, formamos los conglomerados:

Conglomerado 1: formado por las 4 clases del primer piso.

Conglomerado 2: formado por las 4 clases del segundo piso.

Conglomerado 3: formado por las 4 clases del tercer piso.

Conglomerado 4: formado por las 4 clases del cuarto piso.

Los conglomerados son grupos heterogéneos, representantes de toda la población, y muy semejantes entre los distintos grupos. Una vez formados los conglomerados elegimos muestras aleatorias simples en cada uno de ellos.

15. Página 267

Para realizar una muestra estratificada, formamos los estratos:

Estrato 1: estudio del reciclaje de plástico.

Estrato 2: estudio del reciclaje de papel.

Estrato 3: estudio del reciclaje de vidrio.

Los estratos son grupos homogéneos entre sí, y diferenciados entre los distintos grupos. Una vez formados los estratos elegimos muestras aleatorias simples en cada uno de ellos.

16. Página 268

a) La suma de puntuaciones del lanzamiento de dos dados puede tomar los siguientes valores:

{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

b) La diferencia de puntuaciones del lanzamiento de dos dados puede tomar los siguientes valores:

{0, 1, 2, 3, 4, 5}

c) El producto de las puntuaciones del lanzamiento de dos dados pueda tomar los siguientes valores:

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36}

17. Página 268

Estamos ante un muestreo sin reposición; por lo tanto, hay $\binom{20}{4} = \frac{20!}{4!(20-4)!} = 4845$.

Hay 4 845 muestras posibles.

A continuación vemos cuatro ejemplos de variables aleatorias que podemos definir sobre las muestras.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Ejemplo 1: la función que a cada muestra le hace corresponder el número de hombres en la muestra. Los posibles valores son 0, 1, 2, 3 y 4.

Ejemplo 2: la función que a cada muestra le hace corresponder el número de idiomas distintos que hablan entre los cuatro guías. Puede tomar múltiples valores enteros.

Ejemplo 3: la función que a cada muestra le hace corresponder la media aritmética de las edades de los guías. Puede tomar infinitos valores reales.

Ejemplo 4: la función que a cada muestra le hace corresponder la media aritmética de las alturas de los guías. Puede tomar infinitos valores reales.

18. Página 269

Los posibles valores de la variable aleatoria, *X,* son: 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8.

$P(X=2)=P(1-1)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$ $\qquad$ $P(X=3)=P(1-2)+P(2-1)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

$P(X=4)=P(1-3)+P(2-2)+P(3-1)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$

$P(X=5)=P(1-4)+P(2-3)+P(3-2)+P(4-1)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

$P(X=6)=P(2-4)+P(3-3)+P(4-2)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$

$P(X=7)=P(3-4)+P(4-3)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$ $\qquad$ $P(X=8)=P(4-4)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$

Calculamos los parámetros de la variable aleatoria *X*.

Media: $\mu=\sum_{i=2}^{8}p_ix_i=\frac{1}{16}\cdot 2+\frac{1}{8}\cdot 3+\frac{3}{16}\cdot 4+\frac{1}{4}\cdot 5+\frac{3}{16}\cdot 6+\frac{1}{8}\cdot 7+\frac{1}{16}\cdot 8=5$

Varianza: $\sigma^2=\sum_{i=2}^{8}p_ix_i^2-\mu^2=\frac{1}{16}\cdot 2^2+\frac{1}{8}\cdot 3^2+\frac{3}{16}\cdot 4^2+\frac{1}{4}\cdot 5^2+\frac{3}{16}\cdot 6^2+\frac{1}{8}\cdot 7^2+\frac{1}{16}\cdot 8^2-5^2=\frac{5}{2}=2{,}5$

Desviación típica: $\sigma^2=\sqrt{\sum_{i=2}^{8}p_ix_i^2-\mu^2}=\sqrt{2{,}5}=1{,}58$

19. Página 269

Los posibles valores de la variable aleatoria, *X,* son: 0, 1, 2, 3 y 4.

Primero hacemos los cálculos con remplazamiento:

$P(X=0)=\left(\frac{14}{30}\right)^4=\frac{2401}{50625}$ $\qquad$ $P(X=1)=C_{4,1}\cdot\frac{16}{30}\cdot\left(\frac{14}{30}\right)^3=4\cdot\frac{16}{30}\cdot\left(\frac{14}{30}\right)^3=\frac{10976}{50625}$

$P(X=2)=C_{4,2}\cdot\left(\frac{16}{30}\right)^2\cdot\left(\frac{14}{30}\right)^2=6\cdot\left(\frac{16}{30}\right)^2\cdot\left(\frac{14}{30}\right)^2=\frac{6272}{16875}$ $\qquad$ $P(X=3)=C_{4,3}\cdot\left(\frac{16}{30}\right)^3\cdot\frac{14}{30}=4\cdot\left(\frac{16}{30}\right)^3\cdot\frac{14}{30}=\frac{14336}{50625}$

$P(X=4)=\left(\frac{16}{30}\right)^4=\frac{4096}{50625}$

Calculamos los parámetros de la variable aleatoria X.

Media: $\mu = \sum_{i=0}^{4} p_i x_i = \frac{4096}{50625}\cdot 4 + \frac{14336}{50625}\cdot 3 + \frac{6272}{16875}\cdot 2 + \frac{10976}{50625}\cdot 1 + \frac{2401}{50625}\cdot 0 = 2{,}13$

Varianza: $\sigma^2 = \sum_{i=0}^{4} p_i x_i^2 - \mu^2 = \frac{4096}{50625}\cdot 4^2 + \frac{14336}{50625}\cdot 3^2 + \frac{6272}{16875}\cdot 2^2 + \frac{10976}{50625}\cdot 1^2 + \frac{2\,401}{50\,625}\cdot 0^2 - \left(\frac{28}{15}\right)^2 = \frac{224}{225} = 0{,}9956$

Desviación típica: $\sigma^2 = \sqrt{\sum_{i=0}^{4} p_i x_i^2 - \mu^2} = \sqrt{0{,}9956} = 0{,}9978$

Hacemos, ahora, los cálculos sin remplazamiento:

$P(X=0) = \frac{14}{30}\cdot\frac{13}{29}\cdot\frac{12}{28}\cdot\frac{11}{27} = \frac{143}{3915}$

$P(X=1) = \frac{16}{30}\cdot\frac{14}{29}\cdot\frac{13}{28}\cdot\frac{12}{27} + \frac{14}{30}\cdot\frac{16}{29}\cdot\frac{13}{28}\cdot\frac{12}{27} + \frac{14}{30}\cdot\frac{13}{29}\cdot\frac{16}{28}\cdot\frac{12}{27} + \frac{14}{30}\cdot\frac{13}{29}\cdot\frac{12}{28}\cdot\frac{16}{27} = \frac{832}{3915}$

$P(X=2) = \frac{16}{30}\cdot\frac{15}{29}\cdot\frac{14}{28}\cdot\frac{13}{27} + \frac{16}{30}\cdot\frac{14}{29}\cdot\frac{15}{28}\cdot\frac{13}{27} + \frac{16}{30}\cdot\frac{14}{29}\cdot\frac{13}{28}\cdot\frac{15}{27} + \frac{14}{30}\cdot\frac{16}{29}\cdot\frac{15}{28}\cdot\frac{13}{27} + \frac{14}{30}\cdot\frac{16}{29}\cdot\frac{13}{28}\cdot\frac{15}{27} +$

$+ \frac{14}{30}\cdot\frac{13}{29}\cdot\frac{16}{28}\cdot\frac{15}{27} = \frac{104}{261}$

$P(X=3) = \frac{16}{30}\cdot\frac{15}{29}\cdot\frac{14}{28}\cdot\frac{14}{27} + \frac{16}{30}\cdot\frac{15}{29}\cdot\frac{14}{28}\cdot\frac{14}{27} + \frac{16}{30}\cdot\frac{14}{29}\cdot\frac{15}{28}\cdot\frac{14}{27} + \frac{14}{30}\cdot\frac{16}{29}\cdot\frac{15}{28}\cdot\frac{14}{27} = \frac{224}{783}$

$P(X=4) = \frac{16}{30}\cdot\frac{15}{29}\cdot\frac{14}{28}\cdot\frac{13}{27} = \frac{52}{783}$

Calculamos los parámetros de la variable aleatoria X.

Media: $\mu = \sum_{i=0}^{4} p_i x_i = \frac{143}{3\,915}\cdot 0 + \frac{832}{3\,915}\cdot 1 + \frac{104}{261}\cdot 2 + \frac{224}{783}\cdot 3 + \frac{52}{783}\cdot 4 = \frac{32}{15}$

Varianza: $\sigma^2 = \sum_{i=0}^{4} p_i x_i^2 - \mu^2 = \frac{832}{3\,915}\cdot 1^2 + \frac{104}{261}\cdot 2^2 + \frac{224}{783}\cdot 3^2 + \frac{52}{783}\cdot 4^2 - \left(\frac{32}{15}\right)^2 = 0{,}89$

Desviación típica: $\sigma^2 = \sqrt{\sum_{i=0}^{4} p_i x_i^2 - \mu^2} = \sqrt{0{,}89} = 0{,}94$

20. Página 270

a) Es una variable discreta, puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4 y 5.

Se lanza una moneda 5 veces $\rightarrow n = 5$

Identificamos el suceso: $C =$ «Sale cara» $P(C) = \frac{1}{2} = 0{,}5$

El hecho de que en un lanzamiento salga cara o cruz no influye en lo que salga en el otro.

La variable sigue una distribución binomial, $X \equiv B(5; 0{,}5)$.

Obtenemos los parámetros de la población:

Media: $\mu = np = 5\cdot 0{,}5 = 0{,}5$ Varianza: $\sigma^2 = np(1-p) = 5\cdot 0{,}5\cdot(1-0{,}5) = 1{,}25$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{1{,}25} = 1{,}12$

b) $P(X=3) = \binom{5}{3}\cdot 0{,}5^3\cdot(1-0{,}5)^{5-3} = 0{,}3125$

21. Página 270

a) La variable cuenta las personas que no sufren una determinada enfermedad después de ser aplicada cierta vacuna. Es una variable discreta.

Se administra la vacuna a 10 pacientes $\rightarrow n=10$

Identificamos el suceso: E = «La vacuna tiene éxito», $P(E)=0,72$

Que un paciente contraiga la enfermedad no influye en que otro lo haga o no.

Sigue una distribución binomial: $X \equiv B(10;0,72) \longrightarrow P(X=10)=\binom{10}{10}\cdot 0,72^{10}\cdot(1-0,72)^{10-10}=0,03744$

b) $P(X>8)=P(X=9)+P(X=10)=\binom{10}{9}\cdot 0,72^{9}\cdot(1-0,72)^{10-9}+0,03744=0,18304$

22. Página 271

X = «Número de personas que han leído la novela»

Elegimos a 5 miembros del club de lectura $\rightarrow n=5$.

Probabilidad de que, elegido un miembro del club de lectura al azar, haya leído la novela $\rightarrow p=0,8$

a) $X<3 \rightarrow P(X<3)=\sum_{i=0}^{2}\binom{5}{i}\cdot 0,8^{i}\cdot(1-0,8)^{5-i}=0,05792$

b) $X\geq 1 \rightarrow P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\binom{5}{0}\cdot 0,8^{0}\cdot(1-0,8)^{5}=0,99968$

23. Página 271

X = «Número de bolas blancas que se extraen»

Sacamos tres bolas de la urna $\rightarrow n=3$

Probabilidad de que, al sacar una bola al azar de la urna, sea blanca $\rightarrow p=\frac{2}{5}=0,4$

$X=2 \rightarrow P(X=2)=\binom{3}{2}\cdot 0,4^{2}\cdot(1-0,4)^{3-2}=0,288$

24. Página 272

a) $x_1=3 \rightarrow \frac{3-2}{3}=\frac{1}{3}=0,33$

b) $x_2=4,5 \rightarrow \frac{4,5-2}{3}=\frac{2,5}{3}=0,833$

c) $x_3=-0,5 \rightarrow \frac{-0,5-2}{3}=\frac{-2,5}{3}=-0,833$

d) $x_4=-1 \rightarrow \frac{-1-2}{3}=\frac{-3}{3}=-1$

25. Página 272

Tipificamos las cantidades para poder compararlas:

$x_1=1 \rightarrow \frac{1-1}{2}=0$ $\qquad x_2=2 \rightarrow \frac{2-2}{1}=0$ $\qquad x_3=1,5 \rightarrow \frac{1,5-1,5}{1,5}=0$

La probabilidad de las tres cantidades es la misma, ya que al tipificarlas son iguales.

26. Página 273

$X =$ «Minutos de retraso del autobús»

a) $P(X > 4) = P\left(Z > \frac{4-5}{2,5}\right) = P(Z > -0,4) = P(Z < 0,4) = 0,6554$

b) $P(X \leq 1,5) = P\left(Z \leq \frac{1,5-5}{2,5}\right) = P(Z \leq -1,4) = 1 - P(Z < 1,4) = 1 - 0,9192 = 0,0808$

27. Página 273

$X =$ «kWh consumidos en un mes»

$P(380 \leq X \leq 425) = P\left(\frac{380-390}{92} \leq Z \leq \frac{425-390}{92}\right) = P(-0,11 \leq Z \leq 0,38) =$

$= P(Z \leq 0,38) - P(Z < -0,11) = P(Z \leq 0,38) - (1 - P(Z \leq 0,11)) = 0,648 - (1 - 0,5438) = 0,1918$

28. Página 274

$X =$ «Peso del pomelo (g)»

a) $P(150 \leq X \leq 180) = P\left(\frac{150-190}{35} \leq Z \leq \frac{180-190}{35}\right) = P(-1,14 \leq Z \leq -0,29)$

$= P(Z \leq 1,14) - P(Z < 0,29) = 0,8729 - 0,6141 = 0,2588 = 25,88\ \%$

Un 25,88 % de los pomelos pesan entre 150 y 180 gramos.

b) El intervalo es de la forma $(190 - k, 190 + k)$, donde $k = \sigma z_{\frac{\alpha}{2}} = 35 z_{0,025}$.

$P(Z < 1,96) = 0,975 \rightarrow z_{0,025} = 1,96 \rightarrow k = 68,6$

El intervalo es $(190 - 68,6; 190 + 68,6) = (121,4; 258,6)$.

29. Página 274

$X =$ «Salario de los trabajadores (€)»

a) La media es el punto medio del intervalo $\rightarrow \mu = \frac{850 + 1330}{2} = 1090$

El intervalo es $(1\,090 - k, 1\,090 + k)$, donde $k = 1\,090 - 850 = 240 = \sigma z_{\frac{\alpha}{2}} = \sigma z_{0,005} \rightarrow \sigma = \frac{240}{z_{0,005}}$.

$$\left.\begin{array}{l} P(Z < 2,57) = 0,9949 \\ P(Z < 2,58) = 0,9951 \end{array}\right\} \rightarrow z_{0,005} = 2,575 \rightarrow \sigma = 93,2$$

b) $P(X > 1\,000) = P\left(Z > \frac{1\,000 - 1\,090}{93,2}\right) = P(Z > -0,97) = P(Z < 0,97) = 0,834 = 83,4\ \%$

El 83,4 % de los trabajadores cobran más de 1 000 €.

30. Página 275

$X \equiv B(420; 0,92) \rightarrow n = 420 > 8 \qquad np = 420 \cdot 0,92 = 386,4 > 5 \qquad n(1-p) = 420 \cdot 0,08 = 33,6 > 5$

$$\left.\begin{array}{l}\mu = np = 420 \cdot 0,92 = 386,4 \\ \sigma = \sqrt{np(1-p)} = 5,56\end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B(420; 0,92) \approx N(386,4; 5,56)$$

$$P(380 \le X \le 400) = P\left(\frac{380-386,4}{5,56} Z \le \frac{400-386,4}{5,56}\right) = P(-1,15 \le Z \le 2,44) = P(Z \le 2,44) - (1 - P(Z \le 1,15)) =$$

$$= 0,9929 - (1 - 0,8749) = 0,8678$$

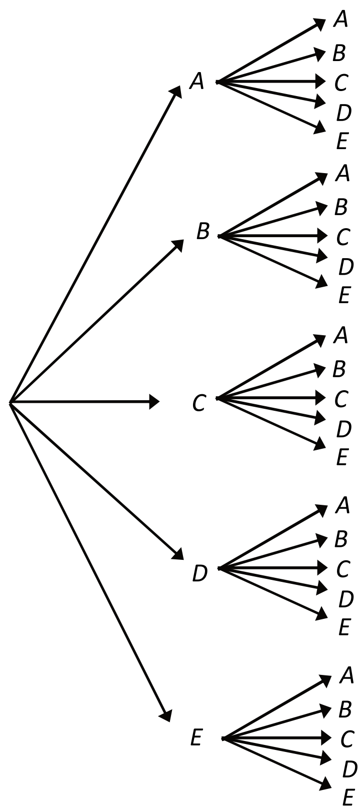
31. Página 275

$X \equiv B(150; 0,4) \rightarrow n = 150 > 8 \qquad np = 150 \cdot 0,4 = 60 > 5 \qquad n(1-p) = 150 \cdot 0,6 = 90 > 5$

$$\left.\begin{array}{l}\mu = np = 150 \cdot 0,4 = 60 \\ \sigma = \sqrt{np(1-p)} = 6\end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B(150; 0,4) \approx N(60, 6) \qquad P(X \le 80) = P\left(Z \le \frac{80-60}{6}\right) = P(Z \le 3,33) = 0,9996$$

SABER HACER

32. Página 276



Con remplazamiento, no importa el orden en que se escojan los elementos:

{*A*, *A*}, {*A*, *B*}, {*A*, *C*}, {*A*, *D*}, {*A*, *E*}, {*B*, *B*}, {*B*, *C*}, {*B*, *D*}, {*B*, *E*}, {*C*, *C*}, {*C*, *D*}, {*C*, *E*}, {*D*, *D*}, {*D*, *E*}, {*E*, *E*}

Con reemplazamiento, no se pueden repetir elementos:

{*A*, *B*}, {*A*, *C*}, {*A*, *D*}, {*A*, *E*}, {*B*, *C*}, {*B*, *D*}, {*B*, *E*}, {*C*, *D*}, {*C*, *E*}, {*D*, *E*}.

33. Página 276

La población sigue una distribución binomial de parámetros $n = 300$ y $p = 0{,}05$.

Como $np = 300 \cdot 0{,}05 = 15 > 5$ y $n(1-p) = 300 \cdot 0{,}95 = 285 > 5$, se puede aproximar la distribución normal:

$$\left.\begin{array}{l}\mu = np = 300 \cdot 0{,}05 = 15\\ \sigma = \sqrt{np(1-p)} = 3{,}775\end{array}\right\} \to X \equiv B(300;0{,}05) \approx N(15;3{,}775)$$

a) $P(-0{,}5 < X < 0{,}5) = P\left(\dfrac{-0{,}5-15}{3{,}775} < Z < \dfrac{0{,}5-15}{3{,}775}\right) = P(-4{,}11 < Z < -3{,}84) = 0$

b) $P(12 \le X \le 15) = P\left(\dfrac{12-15}{3{,}775} \le Z \le \dfrac{15-15}{3{,}775}\right) = P(-0{,}79 \le Z \le 0) = P(Z \le 0{,}79) - P(Z < 0) = 0{,}7852 - 0{,}5 = 0{,}2852$

34. Página 277

Peso de sandía de tipo *A*: $X_A \equiv N(6;\,0{,}5)$.

Peso de sandía de tipo *B*: $X_B \equiv N(5,\,2)$.

Sandía *A*: $P(X_A > 6{,}5) = P\left(Z > \dfrac{6{,}5-6}{0{,}5}\right) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \le 1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$

Sandía *B*: $P(X_B > 6{,}5) = P\left(Z > \dfrac{6{,}5-5}{2}\right) = P(Z > 0{,}75) = 1 - P(Z \le 0{,}75) = 1 - 0{,}7734 = 0{,}2266$

Tipo *A*: 0,1587 · 400 = 63,48 Tipo *B*: 0,2266 · 500 = 113,3

Se adquieren más sandías del tipo *B* que del tipo *A*.

35. Página 277

X = «Puntuación del examen» $X \equiv N(66,\,19)$

$$P(Z \le k_1) = 0{,}2 \to \left\{\begin{array}{l}P(Z < -k_1) = 0{,}8\\ P(Z < 0{,}84) = 0{,}7995\end{array}\right. \to k_1 = -0{,}84$$

La siguiente puntuación contendría el 20 % + 65 % = 85 % de los exámenes.

$$\left.\begin{array}{l}P(Z \le k_2) = 0{,}85\\ P(Z \le 1{,}04) = 0{,}8508\end{array}\right\} \to k_2 = 1{,}04$$

Hallamos el valor correspondiente a estos valores tipificados:

$-0{,}84 = \dfrac{a-66}{19} \to a = 50{,}04$ $1{,}04 = \dfrac{b-66}{19} \to b = 85{,}76$

Las puntuaciones que separan un grupo de otro son 50,04 y 85,76. Es decir, 50 y 86.

36. Página 278

$X \equiv N(42,\,18)$

a) $P(X > 65) = P\left(Z > \dfrac{65-42}{18}\right) = P(Z > 1{,}28) = 1 - P(Z \le 1{,}28) = 1 - 0{,}8997 = 0{,}1003$

$0{,}1003 \cdot 250 = 25{,}075 \to$ Se espera que haya 25 personas de más de 65 años.

b) $P(18 \leq X < 35) = P\left(\frac{18-42}{18} \leq Z < \frac{35-42}{18}\right) = P(-1,33 \leq Z < -0,39) =$

$= P(Z \leq 1,33) - P(Z \leq 0,39) = 0,9082 - 0,6517 = 0,2565$

$0,2565 \cdot 250 = 64,125 \rightarrow$ Se espera que haya 64 personas que puedan conseguir la tarjeta joven.

37. Página 278

$X \equiv N(92, 5)$

$$P(X \geq P_{97,5}) = 0,975 \rightarrow P\left(Z \geq \frac{P_{97,5}-92}{5}\right) = 0,975 \rightarrow \begin{cases} P\left(Z \leq -\frac{P_{97,5}-92}{5}\right) = 0,975 \\ P(Z \leq 1,96) = 0,975 \end{cases} \rightarrow -\frac{P_{97,5}-92}{5} = 1,96 \rightarrow P_{97,5} = 82,2$$

El 97,5 % de la población supera los 82,2 años.

38. Página 279

$X \equiv N(\mu, \sigma)$

$$P(X \leq 42) = 0,6 \rightarrow \begin{cases} P\left(Z \leq \frac{42-\mu}{\sigma}\right) = 0,6 \\ P(Z \leq 0,25) = 0,5987 \end{cases} \rightarrow \frac{42-\mu}{\sigma} = 0,25$$

$$P(X > 54) = 0,06 \rightarrow 1 - P(X \leq 54) = 0,06 \rightarrow P\left(Z \leq \frac{54-\mu}{\sigma}\right) = 0,94 \rightarrow \begin{cases} P(Z \leq 1,55) = 0,9394 \\ P(Z \leq 1,56) = 0,9406 \end{cases} \rightarrow \frac{54-\mu}{\sigma} = 1,555$$

$$\left.\begin{array}{l} 42-\mu = 0,25\sigma \\ 54-\mu = 1,555\sigma \end{array}\right\} \rightarrow 12 = 1,305\sigma \rightarrow \sigma = 15,66$$

$42 - \mu = 0,25 \cdot 15,66 = 3,915 \rightarrow \mu = 38,085$

Por lo tanto, $X \equiv N(38,085; 15,66)$.

39. Página 279

$X \equiv N(30, 8)$

a) $p = 0,99 \rightarrow \alpha = 1 - p = 0,01 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,005$

$$0,01 = 1 - P(-z_{0,005} < Z < z_{0,005}) \rightarrow P(Z < z_{0,005}) - \left(1 - P(Z \leq z_{0,005})\right) = 0,99 \rightarrow P(Z < z_{0,005}) = \frac{1,99}{2} = 0,995$$

$$\left.\begin{array}{l} P(Z < 2,57) = 0,9949 \\ P(Z < 2,58) = 0,9951 \end{array}\right\} \rightarrow z_{0,005} = 2,575$$

$$0,99 = P(k_1 < X < k_2) = P\left(\frac{k_1-30}{8} < Z < \frac{k_2-30}{8}\right) \rightarrow \begin{cases} \frac{k_1-30}{8} = -2,575 \\ \frac{k_2-30}{8} = 2,575 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k_1 = 9,4 \\ k_2 = 50,6 \end{cases}$$

El intervalo característico para una probabilidad del 99 % es (9,4; 50,6).

b) $p = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 1 - p = 0{,}05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}025$

$$0{,}05 = 1 - P(-z_{0{,}025} < Z < z_{0{,}025}) \rightarrow P(Z < z_{0{,}025}) - (1 - P(Z \leq z_{0{,}025})) = 0{,}95 \rightarrow P(Z < z_{0{,}025}) = \frac{1{,}95}{2} = 0{,}975$$

$$P(Z < 1{,}96) = 0{,}975 \rightarrow z_{0{,}025} = 1{,}96$$

$$0{,}95 = P(k_1 < X < k_2) = P\left(\frac{k_1 - 30}{8} < Z < \frac{k_2 - 30}{8}\right) \rightarrow \begin{cases} \frac{k_1 - 30}{8} = -1{,}96 \\ \frac{k_2 - 30}{8} = 1{,}96 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k_1 = 14{,}32 \\ k_2 = 45{,}68 \end{cases}$$

El intervalo característico para una probabilidad del 95 % es (14,32; 45,68).

c) $p = 0{,}9 \rightarrow \alpha = 1 - p = 0{,}1 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}05$

$$0{,}1 = 1 - P(-z_{0{,}05} < Z < z_{0{,}05}) \rightarrow P(Z < z_{0{,}05}) - (1 - P(Z \leq z_{0{,}05})) = 0{,}9 \rightarrow P(Z < z_{0{,}05}) = \frac{1{,}9}{2} = 0{,}95$$

$$\left.\begin{array}{l} P(Z < 1{,}64) = 0{,}9495 \\ P(Z < 1{,}65) = 0{,}9505 \end{array}\right\} \rightarrow z_{0{,}05} = 1{,}645$$

$$0{,}9 = P(k_1 < X < k_2) = P\left(\frac{k_1 - 30}{8} < Z < \frac{k_2 - 30}{8}\right) \rightarrow \begin{cases} \frac{k_1 - 30}{8} = -1{,}645 \\ \frac{k_2 - 30}{8} = 1{,}645 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k_1 = 16{,}84 \\ k_2 = 43{,}16 \end{cases}$$

El intervalo característico para una probabilidad del 90 % es (16,84; 43,16).

ACTIVIDADES FINALES

40. Página 280

a) Numeramos los 5 000 ordenadores. Elegimos 250 ordenadores al azar de entre los 5 000 posibles.

b) Numeramos los 5 000 ordenadores. Hallamos la constante de elevación: $h = \frac{5000}{250} = 20$.

Elegimos al azar un elemento entre los 20 primeros, por ejemplo 13. La muestra está formada por los elementos: {13, 13 + 20, 13 + 2 · 20, …, 13 + 249 · 13}.

41. Página 280

a) $\mu = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} = 2{,}5$

$$\sigma^2 = \frac{1}{4} \cdot 1^2 + \frac{1}{4} \cdot 2^2 + \frac{1}{4} \cdot 3^2 + \frac{1}{4} \cdot 4^2 - 2{,}5^2 = 1{,}25 \rightarrow \sigma = \sqrt{1{,}25} = 1{,}118$$

b) Las posibles muestras de dos elementos con repetición son:

{1, 1}, {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {2, 2}, {2, 3}, {2, 4}, {3, 3}, {3, 4}, {4, 4}

c) Las posibles muestras de tres elementos con repetición son:

{1, 1, 1}, {1, 1, 2}, {1, 1, 3}, {1, 1, 4}, {1, 2, 2}, {1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 3, 3}, {1, 3, 4}, {1, 4, 4}, {2, 2, 2}, {2, 2, 3}, {2, 2, 4}, {2, 3, 3}, {2, 3, 4}, {2, 4, 4}, {3, 3, 3}, {3, 3, 4}, {3, 4, 4}, {4, 4, 4}

d) Medias de las muestras de dos elementos: {1; 1,5; 2; 2,5; 2; 2,5; 3; 3; 3,5; 4}

$$\mu = 1\cdot\frac{1}{10}+1{,}5\cdot\frac{1}{10}+2\cdot\frac{2}{10}+2{,}5\cdot\frac{2}{10}+3\cdot\frac{2}{10}+3{,}5\cdot\frac{1}{10}+4\cdot\frac{1}{10}=2{,}5$$

$$\sigma^2 = 1^2\cdot\frac{1}{10}+1{,}5^2\cdot\frac{1}{10}+2^2\cdot\frac{2}{10}+2{,}5^2\cdot\frac{2}{10}+3^2\cdot\frac{2}{10}+3{,}5^2\cdot\frac{1}{10}+4^2\cdot\frac{1}{10}-2{,}5^2=0{,}75\rightarrow\sigma=0{,}866$$

Medias de las muestras de tres elementos: $\left\{1,\frac{4}{3},\frac{5}{3},2,\frac{5}{3},2,\frac{7}{3},\frac{7}{3},\frac{8}{3},3,2,\frac{7}{3},\frac{8}{3},\frac{8}{3},3,\frac{10}{3},3,\frac{10}{3},\frac{11}{3},4\right\}$

$$\mu = 1\cdot\frac{1}{20}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{20}+\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{20}+2\cdot\frac{3}{20}+\frac{7}{3}\cdot\frac{3}{20}+\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{20}+3\cdot\frac{3}{20}+\frac{10}{3}\cdot\frac{2}{20}+\frac{11}{3}\cdot\frac{1}{20}+4\cdot\frac{1}{20}=\frac{5}{2}=2{,}5$$

$$\sigma^2 = 1^2\cdot\frac{1}{20}+\left(\frac{4}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{20}+\left(\frac{5}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{20}+2^2\cdot\frac{3}{20}+\left(\frac{7}{3}\right)^2\cdot\frac{3}{20}+\left(\frac{8}{3}\right)^2\cdot\frac{3}{20}+3^2\cdot\frac{3}{20}+\left(\frac{10}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{20}+\left(\frac{11}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{20}+$$

$$+4^2\cdot\frac{1}{20}-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{7}{12}=0{,}58\rightarrow\sigma=0{,}76$$

42. Página 280

a) Las posibles muestras de dos elementos con repetición son:

{10, 10}, {10, 11}, {10, 12}, {10, 13}, {10, 14}, {11, 11}, {11, 12}, {11, 13}, {11, 14},
{12, 12}, {12, 13}, {12, 14}, {13, 13}, {13, 14}, {14, 14}

Las posibles muestras de dos elementos sin repetición son:

{10, 11}, {10, 12}, {10, 13}, {10, 14}, {11, 12}, {11, 13}, {11, 14}, {12, 13}, {12, 14}, {13, 14}

b) $\mu = 10\cdot\frac{1}{5}+11\cdot\frac{1}{5}+12\cdot\frac{1}{5}+13\cdot\frac{1}{5}+14\cdot\frac{1}{5}=12$

$$\sigma^2=\frac{1}{5}\cdot10^2+\frac{1}{5}\cdot11^2+\frac{1}{5}\cdot12^2+\frac{1}{5}\cdot13^2+\frac{1}{5}\cdot14^2-12^2=2$$

c) Medias con repetición: {10; 10,5; 11; 11,5; 12; 11; 11,5; 12; 12,5; 12; 12,5; 13; 13; 13,5; 14}

$$\mu = 10\cdot\frac{1}{15}+10{,}5\cdot\frac{1}{15}+11\cdot\frac{2}{15}+11{,}5\cdot\frac{2}{15}+12\cdot\frac{3}{15}+12{,}5\cdot\frac{2}{15}+13\cdot\frac{2}{15}+13{,}5\cdot\frac{1}{15}+14\cdot\frac{1}{15}=12$$

$$\sigma^2 = 10^2\cdot\frac{1}{15}+10{,}5^2\cdot\frac{1}{15}+11^2\cdot\frac{2}{15}+11{,}5^2\cdot\frac{2}{15}+12^2\cdot\frac{3}{15}+12{,}5^2\cdot\frac{2}{15}+13^2\cdot\frac{2}{15}+13{,}5^2\cdot\frac{1}{15}+14^2\cdot\frac{1}{15}-12^2=1{,}167$$

Medias de las muestras sin repetición: {10,5; 11; 11,5; 12; 11,5; 12; 12,5; 12,5; 13; 13,5}

$$\mu = 10{,}5\cdot\frac{1}{10}+11\cdot\frac{1}{10}+11{,}5\cdot\frac{2}{10}+12\cdot\frac{2}{10}+12{,}5\cdot\frac{2}{10}+13\cdot\frac{1}{10}+13{,}5\cdot\frac{1}{10}=12$$

$$\sigma^2 = 10{,}5^2\cdot\frac{1}{10}+11^2\cdot\frac{1}{10}+11{,}5^2\cdot\frac{2}{10}+12^2\cdot\frac{2}{10}+12{,}5^2\cdot\frac{2}{10}+13^2\cdot\frac{1}{10}+13{,}5^2\cdot\frac{1}{10}-12^2=0{,}75$$

43. Página 280

$\frac{n}{N}=\frac{150}{3\,000}=\frac{1}{20}$. Calculamos el número de manzanas de tipo *A*, n_1; de tipo *B*, n_2; de tipo *C*, n_3; de tipo *D*, n_4.

$\frac{n_1}{N_1}=\frac{n_1}{1\,224}=\frac{1}{20}\rightarrow n_1=\frac{1\,224}{20}=61{,}2$

$\frac{n_2}{N_2}=\frac{n_2}{857}=\frac{1}{20}\rightarrow n_2=\frac{857}{20}=42{,}85$

$\frac{n_3}{N_3}=\frac{n_3}{495}=\frac{1}{20}\rightarrow n_3=\frac{495}{20}=24{,}75$

$\frac{n_4}{N_4}=\frac{n_4}{424}=\frac{1}{20}\rightarrow n_4=\frac{424}{20}=21{,}2$

Dado que no nos da resultados exactos aproximamos a la unidad más cercana, tomamos 61 manzanas de tipo *A*, 43 de tipo *B*, 25 de tipo *C* y 21 de tipo *D*.

44. Página 280

$$\frac{n}{N}=\frac{100}{3500+2700}=\frac{100}{6200}=\frac{1}{62}$$

Calculamos el número de hombres, n_1; y de mujeres, n_2.

$$\frac{n_1}{N_1}=\frac{n_1}{3500}=\frac{1}{62}\rightarrow n_1=\frac{3500}{62}=56,45 \qquad \frac{n_2}{N_2}=\frac{n_2}{2700}=\frac{1}{62}\rightarrow n_2=\frac{2700}{62}=43,55$$

Dado que no nos da resultados exactos aproximamos a la unidad más cercana, tomamos 56 hombres y 44 mujeres.

45. Página 280

Hacer un reparto con afijación igual, $n_1=n_2=\frac{n}{k}=\frac{100}{2}=50\rightarrow$ Tomamos 50 hombres y 50 mujeres.

Para que la muestra fuese más representativa de la población sería mejor hacer un muestreo con afijación proporcional, ya que así la muestra sigue la misma proporción de estratos que la población total.

46. Página 280

$$\frac{n}{N}=\frac{39}{600+800+160}=\frac{39}{1560}=\frac{1}{40}$$

Calculamos el número de hombres, n_1; de mujeres, n_2; y de niños C, n_3.

$$\frac{n_1}{N_1}=\frac{n_1}{600}=\frac{1}{40}\rightarrow n_1=\frac{600}{40}=15 \qquad \frac{n_2}{N_2}=\frac{n_2}{800}=\frac{1}{40}\rightarrow n_2=\frac{800}{40}=20 \qquad \frac{n_3}{N_3}=\frac{n_3}{160}=\frac{1}{40}\rightarrow n_3=\frac{160}{40}=4$$

Tomamos 15 hombres, 20 mujeres y 4 niños.

47. Página 280

$\frac{n}{N}=\frac{30}{1\,000}=\frac{3}{100}$. Calculamos el número de diestros, n_1; y de zurdos, n_2.

$$\frac{n_1}{N_1}=\frac{n_1}{700}=\frac{3}{100}\rightarrow n_1=\frac{3\cdot 700}{100}=21 \qquad \frac{n_2}{N_2}=\frac{n_2}{300}=\frac{3}{100}\rightarrow n_2=\frac{3\cdot 300}{100}=9$$

Tomamos 21 diestros y 9 zurdos.

48. Página 280

a) $N=500+860+1200+700+740=4000$

10 % de 4 000 $=\frac{10}{100}\cdot 4000=400=n$

Calculamos el número de juegos clásicos, n_1; de estrategia, n_2; deportivos, n_3; de ciencia ficción, n_4; e históricos, n_5.

$n_1=n_2=n_3=n_4=n_5=\frac{n}{k}=\frac{400}{5}=80\rightarrow$ Se toman 80 juegos de cada tipo.

b) Con afijación proporcional, la muestra estará formada por el 10 % de elementos de cada estrato.

Calculamos el número de juegos clásicos, n_1; de estrategia, n_2; deportivos, n_3; de ciencia ficción, n_4; e históricos, n_5.

$$10\,\% \text{ de } 500 = \frac{10}{100} \cdot 500 = 50 = n_1$$

$$10\,\% \text{ de } 860 = \frac{10}{100} \cdot 860 = 86 = n_2$$

$$10\,\% \text{ de } 1\,200 = \frac{10}{100} \cdot 1\,200 = 120 = n_3$$

$$10\,\% \text{ de } 700 = \frac{10}{100} \cdot 700 = 70 = n_4$$

$$10\,\% \text{ de } 740 = \frac{10}{100} \cdot 740 = 74 = n_5$$

Se toman 50 juegos clásicos, 86 juegos de estrategia, 120 juegos deportivos, 70 juegos de ciencia ficción y 74 juegos históricos.

49. Página 280

$$\frac{n}{N} = \frac{100}{5000} = \frac{1}{50}$$

Calculamos el número de personas que viven en chalet con jardín, n_1; en adosados de dos plantas, n_2; y en bloques de apartamentos de 4 alturas, n_3.

$$\frac{n_1}{N_1} = \frac{n_1}{1000} = \frac{1}{50} \rightarrow n_1 = \frac{1000}{50} = 200$$

$$\frac{n_2}{N_2} = \frac{n_2}{1500} = \frac{1}{50} \rightarrow n_2 = \frac{1500}{50} = 300$$

$$\frac{n_3}{N_3} = \frac{n_3}{2\,500} = \frac{1}{50} \rightarrow n_3 = \frac{2\,500}{50} = 500$$

Se toman 200 personas que viven en chalet con jardín, 300 que viven en adosados de dos plantas y 500 que viven en apartamentos de 4 alturas.

50. Página 280

a) Se debería tomar una muestra estratificada, donde aparecen elementos de todos los estratos.

b) Para atender a un criterio de proporcionalidad, debemos tomar afijación proporcional.

$$\frac{n}{N} = \frac{160}{200 + 450 + 100 + 40 + 10} = \frac{160}{800} = \frac{1}{5}$$

Calculamos el número de personas del departamento de producción, n_1; del de ventas, n_2; del de I+D+i, n_3; del de recursos humanos, n_4; y del de administración, n_5.

$$\frac{n_1}{N_1} = \frac{n_1}{200} = \frac{1}{5} \rightarrow n_1 = \frac{200}{5} = 40 \qquad \frac{n_2}{N_2} = \frac{n_2}{450} = \frac{1}{5} \rightarrow n_2 = \frac{450}{5} = 90 \qquad \frac{n_3}{N_3} = \frac{n_3}{100} = \frac{1}{5} \rightarrow n_3 = \frac{100}{5} = 20\,,$$

$$\frac{n_4}{N_4} = \frac{n_4}{40} = \frac{1}{5} \rightarrow n_4 = \frac{40}{5} = 8 \qquad \frac{n_5}{N_5} = \frac{n_5}{10} = \frac{1}{5} \rightarrow n_5 = \frac{10}{5} = 2$$

Se toman 40 personas del departamento de producción, 90 del de ventas, 20 del de I+D+i, 8 del de recursos humanos y 2 del de administración.

51. Página 280

$$\frac{n}{N}=\frac{28+32+20}{2000}=\frac{80}{2000}=\frac{1}{25}$$

Calculamos el número total de alumnos de inglés, n_1; de francés, n_2; y de alemán, n_3:

$$\frac{n_1}{N_1}=\frac{28}{N_1}=\frac{1}{25}\rightarrow N_1=28\cdot 25=700$$

$$\frac{n_2}{N_2}=\frac{32}{N_2}=\frac{1}{25}\rightarrow N_2=32\cdot 25=800$$

$$\frac{n_3}{N_3}=\frac{20}{N_3}=\frac{1}{25}\rightarrow N_3=20\cdot 25=500$$

Hay 700 alumnos de inglés, 800 de francés y 500 de alemán.

52. Página 281

X = «Número de hermanos». La variable toma los posibles valores 0, 1, 2, 3, 4 y 5.

Media: $\mu=\frac{9}{30}\cdot 0+\frac{10}{30}\cdot 1+\frac{6}{30}\cdot 2+\frac{3}{30}\cdot 3+\frac{1}{30}\cdot 4+\frac{1}{30}\cdot 5=\frac{4}{3}=1{,}33$

Varianza: $\sigma^2=\frac{9}{30}\cdot 0^2+\frac{10}{30}\cdot 1^2+\frac{6}{30}\cdot 2^2+\frac{3}{30}\cdot 3^2+\frac{1}{30}\cdot 4^2+\frac{1}{30}\cdot 5^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2=1{,}62$

Desviación típica: $\sigma=\sqrt{1{,}62}=1{,}27$

53. Página 281

X = «Personas que viven en una casa». La variable toma los posibles valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8.

Media: $\mu=\frac{3}{40}\cdot 0+\frac{4}{40}\cdot 1+\frac{5}{40}\cdot 2+\frac{8}{40}\cdot 3+\frac{7}{40}\cdot 4+\frac{4}{40}\cdot 5+\frac{5}{40}\cdot 6+\frac{1}{40}\cdot 7+\frac{3}{40}\cdot 8=\frac{147}{40}=3{,}675$

Varianza: $\sigma^2=\frac{3}{40}\cdot 0^2+\frac{4}{40}\cdot 1^2+\frac{5}{40}\cdot 2^2+\frac{8}{40}\cdot 3^2+\frac{7}{40}\cdot 4^2+\frac{4}{40}\cdot 5^2+\frac{5}{40}\cdot 6^2+\frac{1}{40}\cdot 7^2+\frac{3}{40}\cdot 8^2-3{,}675^2=4{,}72$

Desviación típica: $\sigma=\sqrt{4{,}72}=2{,}17$

54. Página 281

X = «Horas de duración de una pila». La variable toma los posibles valores 9, 10, 11, 12, 13 y 14.

Media: $\mu=\frac{2}{24}\cdot 9+\frac{6}{24}\cdot 10+\frac{6}{24}\cdot 11+\frac{4}{24}\cdot 12+\frac{5}{24}\cdot 13+\frac{1}{24}\cdot 14=\frac{271}{24}=11{,}29$

Varianza: $\sigma^2=\frac{2}{24}\cdot 9^2+\frac{6}{24}\cdot 10^2+\frac{6}{24}\cdot 11^2+\frac{4}{24}\cdot 12^2+\frac{5}{24}\cdot 13^2+\frac{1}{24}\cdot 14^2-11{,}29^2=1{,}87$

Desviación típica: $\sigma=\sqrt{1{,}87}=1{,}37$

55. Página 281

X = «Número de chicos en la muestra». La variable toma los posibles valores 0, 1, 2 y 3.

$$P(X=0)=\frac{C_{6,3}}{C_{10,3}}=\frac{\frac{6!}{3!(6-3)!}}{\frac{10!}{3!(10-3)!}}=\frac{1}{6} \qquad P(X=1)=\frac{C_{6,2}\cdot C_{4,1}}{C_{10,3}}=\frac{\frac{6!}{2!(6-2)!}\cdot 4}{\frac{10!}{3!(10-3)!}}=\frac{1}{2}$$

$$P(X=2)=\frac{C_{6,1}\cdot C_{4,2}}{C_{10,3}}=\frac{6\cdot\frac{4!}{2!(4-2)!}}{\frac{10!}{3!(10-3)!}}=\frac{3}{10} \qquad P(X=3)=\frac{C_{4,3}}{C_{10,3}}=\frac{4}{\frac{10!}{3!(10-3)!}}=\frac{1}{30}$$

Media: $\mu=\frac{1}{6}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{3}{10}\cdot 2+\frac{1}{30}\cdot 3=\frac{6}{5}=1{,}2$

Varianza: $\sigma^2=\frac{1}{6}\cdot 0^2+\frac{1}{2}\cdot 1^2+\frac{3}{10}\cdot 2^2+\frac{1}{30}\cdot 3^2-1{,}2^2=0{,}56$

Desviación típica: $\sigma=\sqrt{0{,}56}=0{,}75$

56. Página 281

X = «Número de cruces en la muestra». La variable toma los posibles valores 0, 1, 2 y 3.

P (cruz) $= k$ $\qquad$ P (cara) $= 2\,k \rightarrow k+2k=3k=1\rightarrow k=\frac{1}{3}$

$$P(X=0)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{27} \qquad P(X=1)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

$$P(X=2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9} \qquad P(X=3)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$$

Media: $\mu=\frac{8}{27}\cdot 0+\frac{4}{9}\cdot 1+\frac{2}{9}\cdot 2+\frac{1}{27}\cdot 3=1$

Varianza: $\sigma^2=\frac{8}{27}\cdot 0^2+\frac{4}{9}\cdot 1^2+\frac{2}{9}\cdot 2^2+\frac{1}{27}\cdot 3^2-1^2=0{,}67$

Desviación típica: $\sigma=\sqrt{0{,}67}=0{,}82$

57. Página 281

X = «Número de veces que la cara oculta es 1». La variable toma los posibles valores 0, 1, 2, 3, 4 y 5.

$$P(X=0)=\left(\frac{4}{5}\right)^5=0{,}3277 \qquad P(X=1)=C_{5,1}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^4=5\cdot\left(\frac{1}{5}\right)\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^4=0{,}4096$$

$$P(X=2)=C_{5,2}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^3=10\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^3=0{,}2048 \qquad P(X=3)=C_{5,3}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2=10\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2=0{,}0512$$

$$P(X=4)=C_{5,4}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^4\cdot\frac{4}{5}=5\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^4\cdot\frac{4}{5}=0{,}0064 \qquad P(X=5)=\left(\frac{1}{5}\right)^5=0{,}0003$$

Media: $\mu=0{,}3277\cdot 0+0{,}4096\cdot 1+0{,}2048\cdot 2+0{,}0512\cdot 3+0{,}0064\cdot 4+0{,}0003\cdot 5=0{,}9999$

Varianza: $\sigma^2=0{,}3277\cdot 0^2+0{,}4096\cdot 1^2+0{,}2048\cdot 2^2+0{,}0512\cdot 3^2+0{,}0064\cdot 4^2+0{,}0003\cdot 5^2-0{,}9999^2=0{,}7997$

Desviación típica: $\sigma=\sqrt{0{,}7997}=0{,}894$

58. Página 281

X = «Número de refrescos de naranja en la muestra». La variable toma los posibles valores 0, 1, 2 y 3.

$$P(X=0)=\frac{12}{22}\cdot\frac{11}{21}\cdot\frac{10}{20}=\frac{1}{7}$$

$$P(X=1)=\frac{12}{22}\cdot\frac{11}{21}\cdot\frac{10}{20}+\frac{12}{22}\cdot\frac{10}{21}\cdot\frac{11}{20}+\frac{10}{22}\cdot\frac{12}{21}\cdot\frac{11}{20}=\frac{3}{7}$$

$$P(X=2)=\frac{12}{22}\cdot\frac{10}{21}\cdot\frac{9}{20}+\frac{10}{22}\cdot\frac{12}{21}\cdot\frac{9}{20}+\frac{10}{22}\cdot\frac{9}{21}\cdot\frac{12}{20}=\frac{27}{77}$$

$$P(X=3)=\frac{10}{22}\cdot\frac{9}{21}\cdot\frac{8}{20}=\frac{6}{77}$$

Media: $\mu=\frac{1}{7}\cdot 0+\frac{3}{7}\cdot 1+\frac{27}{77}\cdot 2+\frac{6}{77}\cdot 3=\frac{15}{11}$

Varianza: $\sigma^2=\frac{1}{7}\cdot 0^2+\frac{3}{7}\cdot 1^2+\frac{27}{77}\cdot 2^2+\frac{6}{77}\cdot 3^2-\left(\frac{15}{11}\right)^2=0{,}673$

Desviación típica: $\sigma=\sqrt{0{,}673}=0{,}82$

59. Página 281

X = «Número de trabajadores en la industria». La variable toma los posibles valores 0, 1, 2 y 3.

$N = 2\,920\,000 + 925\,000 + 3\,584\,000 + 7\,420\,000 = 14\,849\,000$

Número de trabajadores en un sector que no sea la industria: $14\,849\,000 - 3\,584\,000 = 11\,265\,000$

$$P(X=0)=\frac{11265000}{14849000}\cdot\frac{11264999}{14848999}\cdot\frac{11264998}{14848998}=0{,}4366$$

$$P(X=1)=\frac{11265000}{14849000}\cdot\frac{11264999}{14848999}\cdot\frac{3584000}{14848998}+\frac{11265000}{14849000}\cdot\frac{3584000}{14848999}\cdot\frac{11264999}{14848998}+$$

$$+\frac{3584000}{14849000}\cdot\frac{11265000}{14848999}\cdot\frac{11264999}{14848998}=0{,}4167$$

$$P(X=2)=\frac{11265000}{14849000}\cdot\frac{3584000}{14848999}\cdot\frac{3583999}{14848998}+\frac{3584000}{14849000}\cdot\frac{11\,265000}{14848999}\cdot\frac{3584999}{14848998}+$$

$$+\frac{358400}{14849000}\cdot\frac{3583999}{14848999}\cdot\frac{11265000}{14848998}=0{,}1326$$

$$P(X=3)=\frac{3584000}{14849000}\cdot\frac{3583999}{14848999}\cdot\frac{3583998}{14848998}=0{,}0141$$

Media: $\mu=0{,}4366\cdot 0+0{,}4167\cdot 1+0{,}1326\cdot 2+0{,}0141\cdot 3=0{,}7242$

Varianza: $\sigma^2=0{,}4366\cdot 0^2+0{,}4167\cdot 1^2+0{,}1326\cdot 2^2+0{,}0141\cdot 3^2-0{,}7242^2=0{,}5495$

Desviación típica: $\sigma=\sqrt{0{,}5495}=0{,}7413$

60. Página 281

a) La variable, *X*, cuenta las preguntas acertadas en el examen. Es una variable discreta.

El examen tiene 10 preguntas $\rightarrow n=10$

Identificamos el suceso: *A* = «Acierta la pregunta» $\rightarrow P(A)=\frac{1}{3}=0{,}33$

Acertar una pregunta es independiente de acertar otra.

La variable sigue una distribución binomial, $X\equiv B(10;0{,}33)$.

$$P(X=7)=\binom{10}{7}\cdot 0{,}33^7\cdot(1-0{,}33)^{10-7}=0{,}0154$$

b) $P(X\geq 7)=P(X=7)+P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)= =0{,}0154+\binom{10}{8}\cdot 0{,}33^8\cdot(1-0{,}33)^{10-8}+\binom{10}{9}\cdot 0{,}33^9\cdot(1-0{,}33)^{10-9}$

$$+\binom{10}{10}\cdot 0{,}33^{10}\cdot(1-0{,}33)^{10-10}=0{,}01855$$

61. Página 281

a) La variable, *X*, cuenta los Blu-Ray que funcionan después de un año. Es una variable discreta.

Analizamos una muestra de 10 Blu-Ray $\rightarrow n=10$

Identificamos el suceso: *F* = «Funciona después de un año» $\rightarrow P(F)=0{,}9$

Que un Blu-Ray falle es independiente de que falle el otro.

La variable sigue una distribución binomial, $X\equiv B(10;0{,}9)$.

$$P(X\leq 8)=1-P(X>8)=1-P(X=9)-P(X=10)=1-\binom{10}{9}\cdot 0{,}9^9\cdot(1-0{,}9)^{10-9}-\binom{10}{10}\cdot 0{,}9^{10}\cdot(1-0{,}9)^{10-10}=0{,}264$$

b) $P(X\geq 8)=P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)=$

$$=\binom{10}{8}\cdot 0{,}9^8\cdot(1-0{,}9)^{10-8}+\binom{10}{9}\cdot 0{,}9^9\cdot(1-0{,}9)^{10-9}+\binom{10}{10}\cdot 0{,}9^{10}\cdot(1-0{,}9)^{10-10}=0{,}9298$$

62. Página 281

La variable, *X*, cuenta los teléfonos que comunican. Es una variable discreta.

Analizamos una muestra de 8 llamadas $\rightarrow n=8$.

Identificamos el suceso: *C* = «El teléfono comunica» $\rightarrow P(C)=\frac{1}{5}=0{,}2$

Que un teléfono comunique es independiente de que lo haga otro.

La variable sigue una distribución binomial, $X\equiv B(8;0{,}2)$.

$$P(X=2)=\binom{8}{2}\cdot 0{,}2^2\cdot(1-0{,}2)^{8-2}=0{,}2936$$

63. Página 281

a) La variable, *X*, cuenta los elevalunas defectuosos de la muestra. Es una variable discreta.

Identificamos el suceso: *D* = «El elevalunas está defectuoso» $\rightarrow P(D)=0,3$

Que un elevalunas sea defectuoso es independiente de que lo sea el otro.

La variable sigue una distribución binomial, $X \equiv B(n;0,3)$.

La varianza y la desviación típica dependen del tamaño de la población estudiada y son:

Varianza: $\sigma^2 = np(1-p) = n \cdot 0,3 \cdot (1-0,3) = 0,21n$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{0,21n} = 0,458\sqrt{n}$

b) Analizamos una muestra de 5 elevalunas $\rightarrow n=5 \rightarrow X \equiv B(5;0,3)$.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{5}{0} \cdot 0,3^0 \cdot (1-0,3)^5 = 0,83193$$

c) El número de elevalunas esperado es la media, es decir, *n* · *p* = 2 000 · 0,3 = 600.

64. Página 281

a) La variable, *X*, cuenta las personas que han visto la película entre los seguidores de esta. Es discreta.

Analizamos una muestra de 4 amigos $\rightarrow n=4$

Identificamos el suceso: *P* = «Han visto la película» $\rightarrow P(P)=0,75$

Que un seguidor haya visto la película es independiente que otro la haya visto.

La variable sigue una distribución binomial, $X \equiv B(4;0,75)$.

$$P(X=2) = \binom{4}{2} \cdot 0,75^2 \cdot (1-0,75)^{4-2} = 0,211$$

b) $P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 0,211 + \binom{4}{3} \cdot 0,75^3 \cdot (1-0,75)^{4-3} + \binom{4}{4} \cdot 0,75^4 \cdot (1-0,75)^{4-4} = 0,949$

65. Página 281

a) La variable *X* cuenta las personas que han dado positivo en el control de alcoholemia. Es discreta.

Analizamos una muestra de 5 conductores $\rightarrow n=5$

Identificamos el suceso: *P* = «Han dado positivo en el control de alcoholemia» $\rightarrow P(P)=0,04$

Que un conductor haya dado positivo es independiente de que otro haya dado positivo.

La variable sigue una distribución binomial, $X \equiv B(5;0,04)$.

$$P(X=3) = \binom{5}{3} \cdot 0,04^3 \cdot (1-0,04)^{5-3} = 0,00059$$

b) La variable *Y* cuenta las personas que no llevaban puesto el cinturón de seguridad. Es discreta.

Identificamos el suceso: *C* = «No llevaban puesto el cinturón de seguridad» $\rightarrow P(C)=0,09$

Que un conductor no lleve puesto el cinturón es independiente de que otro lo lleve.

La variable sigue una distribución binomial, $Y \equiv B(5;0,09)$.

$$P(Y=3) = \binom{5}{3} \cdot 0,09^3 \cdot (1-0,09)^{5-3} = 0,00604$$

c) La variable Z cuenta las personas que no llevaban puesto el cinturón de seguridad y han dado positivo en el control de alcoholemia. Es una variable discreta.

Los sucesos son independientes: $P(P\cap C)=P(P)\cdot P(C)=0{,}04\cdot 0{,}09=0{,}0036$

La variable sigue una distribución binomial, $Z\equiv B(5;0{,}0036)$.

$$P(Z=3)=\binom{5}{3}\cdot 0{,}0036^3\cdot(1-0{,}0036)^{5-3}=0{,}000000463$$

d) La variable W cuenta las personas que no llevaban puesto el cinturón de seguridad o han dado positivo en el control de alcoholemia. Es una variable discreta.

$$P(P\cup C)=P(P)+P(C)-P(P\cap C)=0{,}04+0{,}09-0{,}0036=0{,}1264$$

La variable sigue una distribución binomial, $W\equiv B(5;0{,}1264)$.

$$P(W=3)=\binom{5}{3}\cdot 0{,}1264^3\cdot(1-0{,}1264)^{5-3}=0{,}01541$$

e) $P(W\geq 1)=1-P(W=0)=1-\binom{5}{0}\cdot 0{,}1264^0\cdot(1-0{,}1264)^5=0{,}49118$

66. Página 282

a) La variable, X, cuenta los pacientes que tienen efectos secundarios al medicamento. Es discreta.

Analizamos una muestra de 4 pacientes $\rightarrow n=4$

Identificamos el suceso: E = «El paciente tiene efectos secundarios» $\rightarrow P(E)=\frac{4}{100}=0{,}04$

Que un paciente sufra efectos secundarios es independiente de que los sufra otro.

La variable sigue una distribución binomial, $X\equiv B(4;0{,}04)$.

$$P(X=0)=\binom{4}{0}\cdot 0{,}04^0\cdot(1-0{,}04)^4=0{,}8493$$

b) $P(X\geq 2)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-0{,}8493-\binom{4}{1}\cdot 0{,}04^1\cdot(1-0{,}04)^{4-1}=0{,}0091$

c) Si se eligen 200 pacientes al azar, el número esperado de pacientes con efectos secundarios es la media de X, es decir, $200\cdot 0{,}04=8$.

67. Página 282

a) La variable, X, cuenta los hogares con al menos un perro. Es una variable discreta.

Analizamos una muestra de 6 hogares $\rightarrow n=6$

Identificamos el suceso: P = «Hay al menos un perro en el hogar» $\rightarrow P(P)=0{,}35$

Que un hogar tenga perro es independiente de que lo tenga otro.

La variable sigue una distribución binomial, $X\equiv B(6;0{,}35)$.

$$P(X\geq 2)=1-P(X=1)-P(X=0)=1-\binom{6}{1}\cdot 0{,}35^1\cdot(1-0{,}35)^{6-1}-\binom{6}{0}\cdot 0{,}35^0\cdot(1-0{,}35)^6=0{,}6809$$

b) $P(2 \le X \le 4) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = \binom{6}{2} \cdot 0,35^2 \cdot (1-0,35)^{6-2} +$

$+\binom{6}{3} \cdot 0,35^3 \cdot (1-0,35)^{6-3} + \binom{6}{4} \cdot 0,35^4 \cdot (1-0,35)^{6-4} = 0,6586$

68. Página 282

a) La variable, *X*, cuenta el número de mujeres entre 16 y 21 años que son madres. Es discreta.

Analizamos una muestra de 5 mujeres $\rightarrow n=5$

Identificamos el suceso: M = «Una mujer es madre» $\rightarrow P(M) = \frac{108}{1000} = 0,108$

Que una mujer sea madre es independiente de que lo sea otra.

La variable sigue una distribución binomial, $X \equiv B(5; 0,108)$.

$P(X \ge 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{5}{0} \cdot 0,108^0 \cdot (1-0,108)^5 = 0,4353$

b) $P(X < 4) = 1 - P(X=4) - P(X=5) = 1 - \binom{5}{4} \cdot 0,108^4 \cdot (1-0,108)^{5-4} - \binom{5}{5} \cdot 0,108^5 \cdot (1-0,108)^{5-5} = 0,99938$

69. Página 282

a) La variable, *X*, cuenta el número de personas que celebran el Día del Padre el 19 de marzo. Es una variable discreta.

Analizamos una muestra de 7 personas $\rightarrow n=7$

Identificamos el suceso: P = «Celebran el Día del Padre» $\rightarrow P(P) = 0,78$

Que una persona celebre el Día del Padre es independiente de que lo haga otra.

La variable sigue una distribución binomial, $X \equiv B(7; 0,78)$.

$P(X=0) = \binom{7}{0} \cdot 0,78^0 \cdot (1-0,78)^7 = 0,000025$

b) $P(X \ge 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0,000025 = 0,999975$

c) $P(X=7) = \binom{7}{7} \cdot 0,78^7 \cdot (1-0,78)^0 = 0,1757$

70. Página 282

a) La variable, *X*, cuenta el número de personas que viven pasados 30 años. Es una variable discreta.

Analizamos una muestra de 6 personas $\rightarrow n=6$

Identificamos el suceso: V = «Viven después de 30 años» $\rightarrow P(V) = \frac{4}{5} = 0,8$

Que una persona viva después de 30 años es independiente de que lo haga otra.

La variable sigue una distribución binomial, $X \equiv B(6; 0,8)$.

$P(X=6) = \binom{6}{6} \cdot 0,8^6 \cdot (1-0,8)^{6-6} = 0,2621$

b) $P(X=4)=\binom{6}{4}\cdot 0,8^4\cdot(1-0,8)^{6-4}=0,2458$

c) $P(X\geq 4)=P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)=0,2621+\binom{6}{5}\cdot 0,8^5\cdot(1-0,8)^{6-5}+0,2458\ =0,9011$

71. Página 282

a) La variable, *X*, cuenta el número de personas que tienen estudios superiores. Es una variable discreta.

Analizamos una muestra de 8 personas $\rightarrow n=8$

Identificamos el suceso: S = «Tienen estudios superiores» $\rightarrow P(S)=0,4$

Que una persona tenga estudios superiores es independiente de que los tenga otra.

La variable sigue una distribución binomial, $X\equiv B(8;0,4)$.

$P(X=0)=\binom{8}{0}\cdot 0,4^0\cdot(1-0,4)^8=0,0168$

b) $P(X=4)=\binom{8}{4}\cdot 0,4^4\cdot(1-0,4)^{8-4}=0,2322$

c) $P(X\geq 7)=P(X=7)+P(X=8)=\binom{8}{7}\cdot 0,4^7\cdot(1-0,4)^{8-7}+\binom{8}{8}\cdot 0,4^8\cdot(1-0,4)^{8-8}=0,0085$

72. Página 282

a) $P(X\leq 1,5)=0,9332$

b) $P(X>1,5)=1-P(X\leq 1,5)=0,0668$

c) $P(0,2<X\leq 1,5)=P(X\leq 1,5)-P(X\leq 0,2)=0,9332-0,5793=0,3539$

d) $P(X\geq -1,5)=P(X\leq 1,5)=0,9332$

e) $P(X<-1,5)=P(X>1,5)=0,0668$

f) $P(-0,2\leq X\leq 1,5)=P(X\leq 1,5)-P(X<-0,2)=0,9332-(1-P(X\leq 0,2))\ =0,9332-(1-0,5793)=0,5125$

g) $P(-1,5\leq X\leq 0,2)=P(-0,2\leq X\leq 1,5)=0,5125$

h) $P(-1,5\leq X\leq -0,2)=P(0,2\leq X\leq 1,5)=P(0,2<X\leq 1,5)=0,3539$

73. Página 282

a) $P(X\leq 15)=P\left(Z\leq\frac{15-14}{5}\right)=P(Z\leq 0,2)=0,5793$

b) $P(X>15)=1-P(X\leq 15)=1-0,5793=0,4207$

c) $P(15<X\leq 16)=P\left(\frac{15-14}{5}<Z\leq\frac{16-14}{5}\right)=P(0,2<Z\leq 0,4)=P(Z\leq 0,4)-P(Z\leq 0,2)=0,6554-0,5793=0,0761$

d) $P(X\geq 11)=P\left(Z\geq\frac{11-14}{5}\right)=P(Z\geq -0,6)=P(Z\leq 0,6)=0,7257$

e) $P(X<11)=1-P(X\geq 11)=1-0{,}7257=0{,}2743$

f) $P(11\leq X\leq 15)=P(X\leq 15)-P(X<11)=0{,}5793-0{,}2743=0{,}305$

g) $P(11\leq X\leq 13)=P\left(\frac{11-14}{5}\leq Z\leq \frac{13-14}{5}\right)=P(-0{,}6\leq Z\leq -0{,}2)=P(0{,}2\leq Z\leq 0{,}6)=$

$=P(Z\leq 0{,}6)-P(Z<0{,}2)=0{,}7257-0{,}5793=0{,}1464$

h) $P(4\leq X\leq 20)=P\left(\frac{4-14}{5}\leq Z\leq \frac{20-14}{5}\right)=P(-2\leq Z\leq 1{,}2)=P(Z\leq 1{,}2)-(1-P(Z\leq 2))=$

$=0{,}8849-(1-0{,}9772)=0{,}8621$

74. Página 282

a) $P(Z\leq k)=0{,}5\rightarrow k=0$

b) $P(Z\leq k)=0{,}8729\rightarrow k=1{,}14$

c) $P(Z\leq k)=0{,}9\rightarrow k=1{,}28$

d) $P(Z\leq k)=0{,}33\rightarrow P(Z\leq -k)=1-0{,}33=0{,}67\rightarrow -k=0{,}44\rightarrow k=-0{,}44$

e) $P(Z\leq k)=0{,}2\rightarrow P(Z\leq -k)=1-0{,}2=0{,}8\rightarrow -k=0{,}84\rightarrow k=-0{,}84$

f) $P(Z>k)=0{,}12\rightarrow P(Z\leq k)=1-0{,}12=0{,}88\rightarrow k=1{,}175$

g) $P(Z\geq k)=0{,}9971\rightarrow P(Z\leq -k)=0{,}9971\rightarrow -k=2{,}76\rightarrow k=-2{,}76$

h) $P(Z\geq k)=0{,}6\rightarrow P(Z\leq -k)=0{,}6\rightarrow -k=0{,}25\rightarrow k=-0{,}25$

75. Página 282

$X\equiv N(2{,}4;0{,}8)$

a) $P(X>2{,}5)=P\left(Z>\frac{2{,}5-2{,}4}{0{,}8}\right)=P(Z>0{,}125)=1-P(Z\leq 0{,}125)=1-\frac{0{,}5478+0{,}5517}{2}=0{,}45025$

La probabilidad de que beba más de 2,5 litros de agua al día es 0,45025.

b) $P(2\leq X\leq 3)=P\left(\frac{2-2{,}4}{0{,}8}\leq Z\leq \frac{3-2{,}4}{0{,}8}\right)=P(-0{,}5\leq Z\leq 0{,}75)=$

$=P(Z\leq 0{,}75)-(1-P(Z\leq 0{,}5))=0{,}7734-(1-0{,}6915)=0{,}4649$

La probabilidad de que beba entre 2 y 3 litros de agua diarios es 0,4649.

76. Página 282

$X\equiv N(9,1)$

a) $P(X>8{,}5)=P\left(Z>\frac{8{,}5-9}{1}\right)=P(Z>-0{,}5)=P(Z<0{,}5)=0{,}6915$

La probabilidad de que duerma más de 8,5 horas es de 0,6915.

b) $P(8\leq X\leq 10)=P\left(\frac{8-9}{1}\leq Z\leq \frac{10-9}{1}\right)=P(-1\leq Z\leq 1)=P(Z\leq 1)-(1-P(Z\leq 1))=0{,}8413-(1-0{,}8413)=0{,}6826$

La probabilidad de que duerma entre 8 y 10 horas es de 0,6826.

77. Página 283

$X \equiv N(15, 5)$

a) $P(X > 10) = P\left(Z > \frac{10-15}{5}\right) = P(Z > -1) = P(Z < 1) = 0{,}8413$

La probabilidad de que la tasa de ahorro supere el 10 % es de 0,8413.

b) $P(X \leq 10) = 1 - P(X > 10) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$

La probabilidad de que la tasa de ahorro no supere el 10 % es de 0,1587.

c) $P(15 \leq X \leq 20) = P\left(\frac{15-15}{5} \leq Z \leq \frac{20-15}{5}\right) = P(0 \leq Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - P(Z < 0) = 0{,}8413 - 0{,}5 = 0{,}3413$

La probabilidad de que la tasa de ahorro esté entre 15 % y 20 % es de 0,3413.

d) $P(10 \leq X \leq 20) = P\left(\frac{10-15}{5} \leq Z \leq \frac{20-15}{5}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - (1 - P(Z \leq 1)) = 0{,}8413 - (1 - 0{,}8413) = 0{,}6826$

La probabilidad de que la tasa de ahorro esté entre 10 % y 20 % es de 0,6826.

78. Página 283

$X \equiv N(1{,}8; 0{,}7)$

a) $P(X > 2) = P\left(Z > \frac{2-1{,}8}{0{,}7}\right) = P(Z > 0{,}29) = 1 - P(Z \leq 0{,}29) = 1 - 0{,}6141 = 0{,}3859$

La probabilidad de que dedique más de dos horas al juego es 0,3859.

b) $P(X > 1) = P\left(Z > \frac{1-1{,}8}{0{,}7}\right) = P(Z > -1{,}14) = P(Z < 1{,}14) = 0{,}8729$

La probabilidad de que dedique más de una hora al juego es 0,8729.

c) $P(1{,}5 \leq X \leq 2{,}5) = P\left(\frac{1{,}5-1{,}8}{0{,}7} \leq Z \leq \frac{2{,}5-1{,}8}{0{,}7}\right) = P(-0{,}43 \leq Z \leq 1) =$

$= P(Z \leq 1) - (1 - P(Z < 0{,}43)) = 0{,}8413 - (1 - 0{,}6664) = 0{,}5077$

La probabilidad de que dedique al juego entre 1,5 horas y 2,5 es 0,5077.

79. Página 283

$X \equiv N(9, 2)$

a) $P(X > 10) = P\left(Z > \frac{10-9}{2}\right) = P(Z > 0{,}5) = 1 - P(Z \leq 0{,}5) = 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085$

La probabilidad de que dedique más del 10 % a I+D es de 0,3085.

b) $P(8 \leq X \leq 11) = P\left(\frac{8-9}{2} \leq Z \leq \frac{11-9}{2}\right) = P(-0{,}5 \leq Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - (1 - P(Z \leq 0{,}5)) = = 0{,}8413 - (1 - 0{,}6915) = 0{,}5328$

La probabilidad de que entre el 8 % y el 11 % del presupuesto total se dedique a I+D es de 0,5328.

80. Página 283

$X \equiv N(120, 10)$

a) $P(X \le k_1) = P\left(Z \le \frac{k_1 - 120}{10}\right) = 0,25 \to P\left(Z \le -\frac{k_1 - 120}{10}\right) = 1 - 0,25 = 0,75$

$\begin{cases} P(Z \le 0,67) = 0,7486 \\ P(Z \le 0,68) = 0,7517 \end{cases} \to -\frac{k_1 - 120}{10} = 0,675 \to k_1 = 113,25$

$P(X \le k_2) = P\left(Z \le \frac{k_2 - 120}{10}\right) = 0,75 \to \frac{k_1 - 120}{10} = 0,675 \to k_1 = 126,75$

El primer cuartil es 113,25 y el tercer cuartil es 126,75.

b) $P(100 \le X \le 130) = P\left(\frac{100 - 120}{10} \le Z \le \frac{130 - 120}{10}\right) = P(-2 \le Z \le 1) =$

$= P(Z \le 1) - (1 - P(Z \le 2)) = 0,8413 - (1 - 0,9772) = 0,8186$

La probabilidad de que la lluvia caída esté entre 100 y 130 litros es 0,8186.

81. Página 283

$X \equiv N(22,5; 8)$

$P(X < 30) = P\left(Z < \frac{30 - 22,5}{8}\right) = P(Z < 0,94) = 0,8264 = 82,64\,\%$

El porcentaje de viajes que duran menos de 30 minutos es de 82,64 %.

82. Página 283

$X \equiv N(1,65; \sigma)$

a) $P(X > 1,7) = P\left(Z > \frac{1,7 - 1,65}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{0,05}{\sigma}\right) = 0,33 \to P\left(Z \le \frac{0,05}{\sigma}\right) = 0,67$

$P(Z \le 0,44) = 0,67 \to \frac{0,05}{\sigma} = 0,44 \to \sigma = 0,1136 \to \sigma^2 = 0,0129$

La varianza es 0,0129.

b) $X \equiv N(1,65; 0,1136) \to P(X < 1,6) = P\left(Z < \frac{1,6 - 1,65}{0,0129}\right) = P(Z < -0,44) = 1 - P(Z \le 0,44) = 0,33 = 33\,\%$

El 33 % de los alumnos varones miden menos de 1,60 m.

83. Página 283

$\sigma^2 = 225 \to \sigma = 15 \to X \equiv N(65; 15)$

$P(Z \le k_1) = 0,25 \to P(Z < -k_1) = 0,75 \to \left.\begin{matrix} P(Z < 0,67) = 0,7486 \\ P(Z < 0,68) = 0,7517 \end{matrix}\right\} \to k_1 = -0,675$

$P(Z \le k_2) = 0,95 \to \begin{cases} P(Z \le 1,64) = 0,9495 \\ P(Z \le 1,65) = 0,9505 \end{cases} \to k_2 = 1,645$

Hallamos el valor correspondiente a estos valores tipificados:

$$\begin{cases} -0{,}675 = \dfrac{a-65}{15} \\ 1{,}645 = \dfrac{b-65}{15} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 54{,}875 \\ b = 89{,}675 \end{cases}$$

Las puntuaciones que separan un grupo de otro son 54,875 y 79,675, es decir, 55 y 80.

84. Página 283

$X \equiv N(7, 1)$

a) $P(X < 2) = P\left(Z < \dfrac{2-7}{1}\right) = P(Z < -5) = 0 \rightarrow$ Un 0 % de cafeteras tendrá que ser remplazadas.

b) $P(X < k) = P\left(Z < \dfrac{k-7}{1}\right) = P(Z < k-7) = 0{,}04 \rightarrow P(Z < 7-k) = 0{,}96$

$P(Z < 1{,}75) = 0{,}9599 \rightarrow 7 - k = 1{,}75 \rightarrow k = 5{,}25$ años $= 5{,}25 \cdot 12 = 63$ meses

c) $P(7 \le X \le 8) = P\left(\dfrac{7-7}{1} \le Z \le \dfrac{8-7}{1}\right) = P(0 \le Z \le 1) = P(Z \le 1) - P(Z < 0) = 0{,}8413 - 0{,}5 = 0{,}3413 \rightarrow 34{,}13\ \%$

Un 34,13 % de cafeteras durarán entre 7 y 8 años.

85. Página 283

$X \equiv N(6, 4)$

a) $P(5 < X < 7{,}5) = P\left(\dfrac{5-6}{4} < Z < \dfrac{7{,}5-6}{4}\right) = P(-0{,}25 < Z < 0{,}375) =$

$= P(Z < 0{,}375) - (1 - P(Z < 0{,}25)) = 0{,}6462 - (1 - 0{,}5987) = 0{,}2449$

Las llamadas durarán entre 5 y 7 minutos en una proporción de 0,2449.

b) $P(X \le 2) = P\left(Z \le \dfrac{2-6}{4}\right) = P(Z \le -1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$

La proporción de llamadas que se completan en 2 minutos o menos es 0,1587.

c) $P(X > 5) = P\left(Z > \dfrac{5-6}{4}\right) = P(Z > -0{,}25) = P(Z < 0{,}25) = 0{,}5987$

La probabilidad de que dure más de 5 minutos es de 0,5987.

86. Página 283

$X \equiv N(\mu, \sigma)$

$P(X \ge 40) = 0{,}6 \rightarrow P\left(Z \ge \dfrac{40-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}6 \rightarrow P\left(Z \le -\dfrac{40-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}6 \rightarrow P(Z \le 0{,}25) = 0{,}5987 \rightarrow -\dfrac{40-\mu}{\sigma} = 0{,}25$

$P(X \le 50) = 0{,}55 \rightarrow P\left(Z \le \dfrac{50-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}55 \rightarrow \begin{cases} P(Z \le 0{,}12) = 0{,}5478 \\ P(Z \le 0{,}13) = 0{,}5517 \end{cases} \rightarrow \dfrac{50-\mu}{\sigma} = 0{,}125$

$\left.\begin{array}{r} -40 + \mu = 0{,}25\sigma \\ 50 - \mu = 0{,}125\sigma \end{array}\right\} \rightarrow 10 = 0{,}375\sigma \rightarrow \sigma = 26{,}67 \qquad 50 - \mu = 0{,}125 \cdot 26{,}67 = 3{,}334 \rightarrow \mu = 46{,}666$

Por lo tanto, $X \equiv N(46{,}666; 26{,}67)$.

87. Página 284

Calculamos la probabilidad de que alguien obtenga menos nota que ellos en cada caso:

$X_1 \equiv N(76,2;\,3,1)$ $\quad\quad$ $X_2 \equiv N(62,7;\,2,9)$

$$P(X_1 \le 81,5) = P\left(Z \le \frac{81,5-76,2}{3,1}\right) = P(Z \le 1,71) = 0,9554$$

$$P(X_2 \le 76,5) = P\left(Z \le \frac{76,5-62,7}{2,9}\right) = P(Z \le 4,76) = 1$$

Se encuentra en la mejor posición el segundo individuo porque hay más gente con menos nota que él.

88. Página 284

$X \equiv N(25,\,2)$

a) $P(Z \le z_{0,05}) = 0,95 \to \begin{cases} P(Z \le 1,64) = 0,9495 \\ P(Z \le 1,65) = 0,9505 \end{cases} \to z_{0,05} = 1,645 \to \dfrac{a-25}{2} = 1,645 \to a = 28,29$

Por debajo de 28,29 gramos se encuentra el 95 % de las rebanadas.

b) El intervalo característico es:

$$(\mu - \sigma z_{0,05},\, \mu + \sigma z_{0,05}) = (25 - 2\cdot 1,645;\, 25 + 2\cdot 1,645) = (21,71;\, 28,29)$$

89. Página 284

$X \equiv N(15,\,5)$

a) $P(X \ge 14) = P\left(Z \ge \dfrac{14-15}{5}\right) = P(Z \ge -0,2) = P(Z \le 0,2) = 0,5793$

b) $P(Z \le z_{0,05}) = 0,95 \to \begin{cases} P(Z \le 1,64) = 0,9495 \\ P(Z \le 1,65) = 0,9505 \end{cases} \to z_{0,05} = 1,645 \to \dfrac{a-15}{5} = 1,645 \to a = 23,225$

Por debajo de 23,225 kg se encuentra el 95 % de los paquetes.

c) $1 - \alpha = 0,97 \to \alpha = 0,03 \to \dfrac{\alpha}{2} = 0,015 \to P(Z \le 2,17) = 0,985 \to z_{0,015} = 2,17$

El intervalo característico es:

$$(\mu - \sigma z_{0,015},\, \mu + \sigma z_{0,015}) = (15 - 5\cdot 2,17;\, 15 + 5\cdot 2,17) = (4,15;\, 25,85)$$

90. Página 284

$X \equiv N(10,\,6)$

a) $P(X < 5) = P\left(Z < \dfrac{5-10}{6}\right) = P(Z < -0,83) = 1 - P(Z \le 0,83) = 1 - 0,7967 = 0,2033$

b) $P(X \ge 2) = P\left(Z \ge \dfrac{2-10}{6}\right) = P(Z \ge -1,33) = P(Z \le 1,33) = 0,9082$

c) $P(Z \ge k) = 0,9 \to P(Z \le -k) = 0,9 \to P(Z \le 1,28) = 0,8997 \to k = -1,28 \to \dfrac{a-10}{6} = -1,28 \to a = 2,32$

Por encima de 2,32 minutos se encuentra el 90 % de los retrasos de los autobuses.

d) $1-\alpha=0{,}99 \rightarrow \alpha=0{,}01 \rightarrow \frac{\alpha}{2}=0{,}005 \rightarrow \begin{cases} P(Z \leq 2{,}57)=0{,}9949 \\ P(Z \leq 2{,}58)=0{,}9951 \end{cases} \rightarrow z_{0,005}=2{,}575$

El intervalo característico es:

$(\mu-\sigma z_{0,05}, \mu+\sigma z_{0,05})=(10-6\cdot 2{,}575; 10+6\cdot 2{,}575)=(-5{,}45; 25{,}45)$

91. Página 284

$X \equiv N(24, 1)$

$1-\alpha=0{,}75 \rightarrow \alpha=0{,}25 \rightarrow \frac{\alpha}{2}=0{,}125 \rightarrow P(Z \leq z_{0,125})=0{,}875 \rightarrow P(Z \leq 1{,}15)=0{,}8749 \rightarrow z_{0,125}=1{,}15$

El intervalo característico es:

$(\mu-\sigma z_{0,125}, \mu+\sigma z_{0,125})=(24-1\cdot 1{,}15; 24+1\cdot 1{,}15)=(22{,}85; 25{,}15)$

El 75 % de las baterías de los relojes duran entre 22,85 y 25,15 horas.

$1-\alpha=0{,}9 \rightarrow \alpha=0{,}1 \rightarrow \frac{\alpha}{2}=0{,}05 \rightarrow P(Z \leq z_{0,05})=0{,}95 \rightarrow \begin{cases} P(Z \leq 1{,}64)=0{,}9495 \\ P(Z \leq 1{,}65)=0{,}9505 \end{cases} \rightarrow z_{0,05}=1{,}645$

El intervalo característico es:

$(\mu-\sigma z_{0,05}, \mu+\sigma z_{0,05})=(24-1\cdot 1{,}645; 24+1\cdot 1{,}645)=(22{,}355; 25{,}645)$

El 90 % de las baterías de los relojes duran entre 22,355 y 25,645 horas.

$1-\alpha=0{,}95 \rightarrow \alpha=0{,}1 \rightarrow \frac{\alpha}{2}=0{,}025 \rightarrow P(Z \leq z_{0,025})=0{,}975 \rightarrow P(Z \leq 0{,}975)=1{,}96 \rightarrow z_{0,025}=1{,}96$

El intervalo característico es:

$(\mu-\sigma z_{0,05}, \mu+\sigma z_{0,05})=(24-1\cdot 1{,}96; 24+1\cdot 1{,}96)=(22{,}04; 25{,}96)$

El 95 % de las baterías de los relojes duran entre 22,04 y 25,96 horas.

$1-\alpha=0{,}99 \rightarrow \alpha=0{,}01 \rightarrow \frac{\alpha}{2}=0{,}005 \rightarrow P(Z \leq z_{0,005})=0{,}995 \rightarrow \begin{cases} P(Z \leq 2{,}57)=0{,}9949 \\ P(Z \leq 2{,}58)=0{,}9951 \end{cases} \rightarrow z_{0,005}=2{,}575$

El intervalo característico es:

$(\mu-\sigma z_{0,05}, \mu+\sigma z_{0,05})=(24-1\cdot 2{,}575; 24+1\cdot 2{,}575)=(21{,}425; 26{,}575)$

El 99 % de las baterías de los relojes duran entre 21,425 y 26,575 horas.

92. Página 284

a) $\sigma^2=81 \rightarrow \sigma=9 \rightarrow X \equiv N(250, 9)$

$P(Z \leq z_{0,01})=0{,}99 \rightarrow P(Z \leq 2{,}33)=0{,}9901 \rightarrow z_{0,01}=2{,}33 \rightarrow \frac{a-250}{9}=2{,}33 \rightarrow a=270{,}97$

Por debajo de 270,97 gramos se encuentra el 99 % de las bolas.

b) El intervalo característico es:

$(\mu-\sigma z_{0,01}, \mu+\sigma z_{0,01})=(250-9\cdot 2{,}33; 250+9\cdot 2{,}33)=(229{,}03; 270{,}7)$

93. Página 284

$X \equiv B(20; 0,12) \rightarrow n = 20 > 8$

$np = 20 \cdot 0,12 = 2,4 < 5 \rightarrow$ No se puede aproximar a una distribución normal.

$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) =$

$= 1 - \binom{20}{0} 0,12^0 (1 - 0,12)^{20} - \binom{20}{1} 0,12^1 (1 - 0,12)^{20-1} - \binom{20}{2} 0,12^2 (1 - 0,12)^{20-2} = 0,437$

94. Página 284

a) $X \equiv B(500; 0,01)$

$\mu = np = 500 \cdot 0,01 = 5 \rightarrow$ El número esperado de roturas es 5.

b) $X \equiv B(500; 0,01) \rightarrow n = 500 > 8$

$np = 500 \cdot 0,01 = 5 \geq 5$ $\qquad n(1 - p) = 500 \cdot 0,99 = 495 > 5$

$\sigma = \sqrt{np(1 - p)} = 2,225 \rightarrow X \equiv B(500; 0,01) \approx N(5; 2,225)$

$P(X \geq 20) = P\left(Z \geq \frac{20 - 5}{2,225}\right) = P(Z \geq 6,74) = 1$

95. Página 284

$X \equiv B(100; 0,25) \rightarrow n = 100 > 8$

$np = 100 \cdot 0,25 = 25 > 5$ $\qquad n(1 - p) = 100 \cdot 0,75 = 75 > 5$

$\left.\begin{array}{l} \mu = np = 100 \cdot 0,25 = 25 \\ \sigma = \sqrt{np(1 - p)} = 4,33 \end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B(100; 0,25) \approx N(25; 4,33)$

$P(X \geq 80) = 1 - P(X < 80) = 1 - P\left(Z \leq \frac{80 - 25}{4,33}\right) = 1 - P(Z \leq 12,7) = 0$

96. Página 284

a) $X \equiv B\left(90; \frac{1}{3}\right) \rightarrow n = 90 > 8$

$np = 90 \cdot \frac{1}{3} = 30 > 5$ $\qquad n(1 - p) = 90 \cdot \frac{2}{3} = 60 > 5$

$\left.\begin{array}{l} \mu = np = 90 \cdot \frac{1}{3} = 30 \\ \sigma = \sqrt{np(1 - p)} = 4,47 \end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B\left(90; \frac{1}{3}\right) \approx N(30; 4,47)$

b) $P(X \geq 25) = P\left(Z \geq \frac{25 - 30}{4,47}\right) = P(Z \geq -1,12) = P(Z \leq 1,12) = 0,8686$

97. Página 284

$X \equiv B(2000; 0{,}03) \rightarrow n = 2000 > 8$

$np = 2000 \cdot 0{,}03 = 60 > 5$ $\qquad n(1-p) = 2000 \cdot 0{,}97 = 1940 > 5$

$$\left.\begin{array}{l}\mu = np = 2000 \cdot 0{,}03 = 60 \\ \sigma = \sqrt{np(1-p)} = 7{,}63\end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B(2000; 0{,}03) \approx N(60; 7{,}63)$$

$$P(X \leq 50) = P\left(Z \leq \frac{50-60}{7{,}63}\right) = P(Z \leq -1{,}31) = 1 - P(Z < 1{,}31) = 1 - 0{,}9049 = 0{,}0951$$

98. Página 285

a) $X \equiv B(60; 0{,}7) \rightarrow n = 60 > 8$

$np = 60 \cdot 0{,}7 = 42 > 5$ $\qquad n(1-p) = 60 \cdot 0{,}3 = 18 > 5$

$$\left.\begin{array}{l}\mu = np = 60 \cdot 0{,}7 = 42 \\ \sigma = \sqrt{np(1-p)} = 3{,}55\end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B(60; 0{,}7) \approx N(42; 3{,}55)$$

$$P(X \geq 20) = P\left(Z \geq \frac{20-42}{3{,}55}\right) = P(Z \geq -6{,}2) = 1$$

b) $P(30 \leq X \leq 35) = P\left(\frac{30-42}{3{,}55} \leq Z \leq \frac{35-42}{3{,}55}\right) = P(-3{,}38 \leq Z \leq -1{,}97) = P(1{,}97 \leq Z \leq 3{,}38) =$

$= P(Z \leq 3{,}38) - P(Z \leq 1{,}97) = 0{,}9996 - 0{,}9756 = 0{,}024$

99. Página 285

a) $X \equiv B(1000000; 0{,}15) \rightarrow n = 1000000 > 8$

$np = 1000000 \cdot 0{,}15 = 150000 > 5$ $\qquad n(1-p) = 1000000 \cdot 0{,}85 = 850000 > 5$

$$\left.\begin{array}{l}\mu = np = 1000000 \cdot 0{,}15 = 150000 \\ \sigma = \sqrt{np(1-p)} = 357{,}07\end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B(1000000; 0{,}15) \approx N(150000; 357{,}07)$$

$$P(X \geq 300000) = P\left(Z \geq \frac{300000-150000}{357{,}07}\right) = P(Z \geq 420{,}08) = 0$$

b) Como estamos aproximando por una variable continua, tenemos: $P(X > 300000) = P(X \geq 300000) = 0$.

c) $P(100000 \leq X \leq 200000) = P\left(\frac{100000-150000}{357{,}07} \leq Z \leq \frac{200000-150000}{357{,}07}\right) = P(-140{,}03 \leq Z \leq 140{,}03) = 1$

100. Página 285

a) $X \equiv B(100; 0,4) \rightarrow n = 100 > 8$

$np = 100 \cdot 0,4 = 40 > 5$

$n(1-p) = 100 \cdot 0,6 = 60 > 5$

$$\left.\begin{array}{l}\mu = np = 100 \cdot 0,4 = 40 \\ \sigma = \sqrt{np(1-p)} = 4,9\end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B(100; 0,4) \approx N(40; 4,9)$$

$$P(X \geq 30) = P\left(Z \geq \frac{30-40}{4,9}\right) = P(Z \geq -2,04) = P(Z \leq 2,04) = 0,9793$$

b) $P(X \leq 50) = P\left(Z \leq \frac{50-40}{4,9}\right) = P(Z \leq 2,04) = 0,9793$

c) $P(30 \leq X \leq 50) = P\left(\frac{30-40}{4,9} \leq Z \leq \frac{50-40}{4,9}\right) = P(-2,04 \leq Z \leq 2,04) =$

$= P(Z \leq 2,04) - (1 - P(Z < 2,04)) = 0,9793 - (1 - 0,9793) = 0,9586$

101. Página 285

a) $X \equiv B(50; 0,75) \rightarrow n = 50 > 8$

$np = 50 \cdot 0,75 = 37,5 > 5$

$n(1-p) = 50 \cdot 0,25 = 12,5 > 5$

$$\left.\begin{array}{l}\mu = np = 50 \cdot 0,75 = 37,5 \\ \sigma = \sqrt{np(1-p)} = 3,06\end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B(50; 0,75) \approx N(37,5; 3,06)$$

$$P(X \geq 40) = P\left(Z \geq \frac{40-37,5}{3,06}\right) = P(Z \geq 0,82) = 1 - P(Z \leq 0,82) = 1 - 0,7939 = 0,2061$$

b) $P(X \leq 30) = P\left(Z \leq \frac{30-37,5}{3,06}\right) = P(Z \leq -2,45) = 1 - P(Z \leq 2,45) = 1 - 0,9929 = 0,0071$

102. Página 285

a) $X \equiv B(100; 0,2) \rightarrow n = 100 > 8$

$np = 100 \cdot 0,2 = 20 > 5$ $\qquad$ $n(1-p) = 100 \cdot 0,8 = 80 > 5$

$$\left.\begin{array}{l}\mu = np = 100 \cdot 0,2 = 20 \\ \sigma = \sqrt{np(1-p)} = 4\end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B(100; 0,2) \approx N(20, 4)$$

$$P(20 - 0,5 < X < 20 + 0,5) = P\left(\frac{19,5-20}{4} \leq Z \leq \frac{20,5-20}{4}\right) = P(-0,125 \leq Z \leq 0,125) =$$

$$= P(Z \leq 0,125) - (1 - P(Z \leq 0,125)) = \frac{0,5478 + 0,5517}{2} - \left(1 - \frac{0,5478 + 0,5517}{2}\right) = 0,0995$$

b) $P(X \leq 20) = P\left(Z \leq \frac{20-20}{4}\right) = P(Z \leq 0) = 0,5$

c) $P(X < 20) = P(X \leq 19) = P\left(Z \leq \frac{19-20}{4}\right) = P(Z \leq -0,25) = 1 - P(Z \leq 0,25) = 1 - 0,5987 = 0,4013$

103. Página 285

a) $X \equiv B(200;0,82) \to n = 200 > 8$

$np = 200 \cdot 0,82 = 164 > 5$

$n(1-p) = 200 \cdot 0,18 = 36 > 5$

$$\left.\begin{array}{l}\mu = np = 200 \cdot 0,82 = 164\\ \sigma = \sqrt{np(1-p)} = 5,43\end{array}\right\} \to X \equiv B(200;0,82) \approx N(164;5,43)$$

$$P(X \geq 160) = P\left(Z \geq \frac{160-164}{5,43}\right) = P(Z \geq -0,74) = P(Z \leq 0,74) = 0,7704$$

b) La secretaría de comercio dará el visto bueno al producto dependiendo del número de personas a las que les haya sido efectivo. Debería establecer un límite inferior a partir del cual aceptará el producto dependiendo con que certeza queramos tener la seguridad de que la estimación del vendedor es correcta. Por ejemplo, teniendo en cuenta el apartado a) si queremos tener la seguridad de que el 77,04 % de las muestras tomadas deben estar por encima de ese valor. Nuestro valor límite sería 160.

104. Página 285

a) $X \equiv N(25;10)$

$$P(Z \leq k_1) = 0,25 \to P(Z < -k_1) = 0,75 \to \begin{cases}P(Z < 0,67) = 0,7486\\ P(Z < 0,68) = 0,7517\end{cases} \to k_1 = -0,675$$

$$P(Z \leq k_2) = 0,5 \to k_2 = 0$$

$$P(Z < k_3) = 0,75 \to \begin{cases}P(Z < 0,67) = 0,7486\\ P(Z < 0,68) = 0,7517\end{cases} \to k_3 = 0,675$$

Hallamos el valor correspondiente a estos valores tipificados:

$$\left.\begin{array}{l}-0,675 = \dfrac{a-25}{10}\\ 0 = \dfrac{b-25}{10}\\ 0,675 = \dfrac{c-25}{10}\end{array}\right\} \to \begin{cases}a = 18,25\\ b = 25\\ c = 31,75\end{cases}$$

Las puntuaciones que separan un grupo de otro son 18,25; 25 y 31,75. Es decir, 18, 25 y 32.

b) Los cuartiles de la variable.

105. Página 285

$X \equiv N(250,15)$

a) $P(250 \leq X \leq 260) = P\left(\frac{250-250}{15} \leq Z \leq \frac{260-250}{15}\right) = P(0 \leq Z \leq 0,67) = = P(Z \leq 0,67) - P(Z < 0) = 0,7486 - 0,5 = 0,2486$

La probabilidad de que un vaso contenga entre 250 y 260 ml es de 0,2486.

b) $P(X > 270) = P\left(Z > \frac{270-250}{15}\right) = P(Z > 1,33) = 1 - P(Z \leq 1,33) = 1 - 0,9082 = 0,0918$

El número esperado de vasos que se derramarán es 0,0918 · 1 000 = 91,8. Es decir, 92 vasos.

c) $P(Z \leq k) = 0,25 \rightarrow P(Z < -k) = 0,75 \rightarrow \begin{cases} P(Z < 0,67) = 0,7486 \\ P(Z < 0,68) = 0,7517 \end{cases} \rightarrow k = -0,675$

Hallamos el valor correspondiente al valor tipificado obtenido:

$$-0,675 = \frac{a - 250}{15} \rightarrow a = 239,875$$

El 25 % de las bebidas más pequeñas están por debajo de 239,875. Es decir, 240 ml.

106. Página 285

$X \equiv N(1,275; 0,0125)$

$$P(1,26 \leq X \leq 1,29) = P\left(\frac{1,26 - 1,275}{0,0125} \leq Z \leq \frac{1,29 - 1,275}{0,0125}\right) = P(-1,2 \leq Z \leq 1,2) =$$

$$= P(Z \leq 1,2) - (1 - P(Z < 1,2)) = 0,8849 - (1 - 0,8849) = 0,7698$$

P(Defectuosas) $= 1 - P(1,26 \leq X \leq 1,29) = 1 - 0,7698 = 0,2302 = 23,02\%$

El 23,02 % de las lavadoras producidas por la máquina son defectuosas.

107. Página 285

a) $X \equiv B(30; 0,18) \rightarrow n = 30 > 8$

$np = 30 \cdot 0,18 = 5,4 > 5$

$n(1-p) = 30 \cdot 0,82 = 24,6 > 5$

$$\left.\begin{array}{l} \mu = np = 30 \cdot 0,18 = 5,4 \\ \sigma = \sqrt{np(1-p)} = 2,1 \end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B(30; 0,18) \approx N(5,4; 2,1)$$

$$P(X < 5) = P(X \leq 4) = P\left(Z < \frac{4 - 5,4}{2,1}\right) = P(Z < -0,48) = 1 - P(Z < 0,48) = 1 - 0,6844 = 0,3156$$

b) $P(4 \leq X \leq 8) = P\left(\frac{4 - 5,4}{2,1} \leq Z \leq \frac{8 - 5,4}{2,1}\right) = P(-0,67 \leq Z \leq 1,24) = P(Z \leq 1,24) - (1 - P(Z \leq 0,67)) =$

$$= 0,8925 - (1 - 0,7486) = 0,6411$$

108. Página 285

a) $X \equiv B(100; 0,1) \rightarrow n = 100 > 8$

$np = 100 \cdot 0,1 = 10 > 5$

$n(1-p) = 100 \cdot 0,9 = 90 > 5$

$$\left.\begin{array}{l} \mu = np = 100 \cdot 0,1 = 10 \\ \sigma = \sqrt{np(1-p)} = 3 \end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B(100; 0,1) \approx N(10, 3)$$

$$P(X \geq 12) = P\left(Z \geq \frac{12 - 10}{3}\right) = P(Z \geq 0,67) = 1 - P(Z \leq 0,67) = 1 - 0,7486 = 0,2514$$

b) $P(X < 10) = P(X \leq 9) = P\left(Z \leq \frac{9 - 10}{3}\right) = P(Z \leq -0,33) = 1 - P(Z \leq 0,33) = 1 - 0,6293 = 0,3707$

109. Página 285

a) $X \equiv N(\mu, \sigma)$

$$P(Z \le z_{0,025}) = 0,975 \rightarrow P(Z \le 1,96) = 0,975 \rightarrow z_{0,025} = 1,96$$

El intervalo característico es:

$$(\mu - \sigma z_{0,025}, \mu + \sigma z_{0,025}) = (7,9; 8,5) \rightarrow \left.\begin{matrix} \mu - 1,96\sigma = 7,9 \\ \mu + 1,96\sigma = 8,5 \end{matrix}\right\} \rightarrow 2\mu = 16,4 \rightarrow \mu = 8,2$$

$$8,2 + 1,96\sigma = 8,5 \rightarrow \sigma = 0,153 \rightarrow X \equiv N(8,2; 0,153)$$

b) $P(Z > k) = 0,2 \rightarrow P(Z \le k) = 0,8 \rightarrow P(Z \le 0,84) = 0,7995 \rightarrow k = 0,84 \rightarrow \dfrac{a - 8,2}{0,153} = 0,84 \rightarrow a = 8,329$

110. Página 285

a) $X \equiv N(\mu, \sigma)$

$$P(Z \le z_{0,005}) = 0,995 \rightarrow \begin{cases} P(Z \le 2,57) = 0,9949 \\ P(Z \le 2,58) = 0,9951 \end{cases} \rightarrow z_{0,005} = 2,575$$

El intervalo característico es:

$$(\mu - \sigma z_{0,005}, \mu + \sigma z_{0,005}) = (1460, 1550) \rightarrow \left.\begin{matrix} \mu - 2,575\sigma = 1460 \\ \mu + 2,575\sigma = 1550 \end{matrix}\right\} \rightarrow 2\mu = 3\,010 \rightarrow \mu = 1505$$

$$1\,505 + 2,575\sigma = 1\,550 \rightarrow \sigma = 17,48 \rightarrow X \equiv N(1505; 17,48)$$

b) $P(Z > k) = 0,93 \rightarrow P(Z < -k) = 0,93 \rightarrow \begin{cases} P(Z \le 1,47) = 0,9292 \\ P(Z \le 1,48) = 0,9306 \end{cases} \rightarrow k = -1,475 \rightarrow \dfrac{a - 1505}{17,48} = -1,475 \rightarrow a = 1479,22$

El 93 % de los electrodomésticos tiene una duración por encima de 1 479,22 días.

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. Página 286

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Tres situaciones que corresponden a una distribución normal son el número de pie de zapato, la duración de una bombilla y el efecto de un fármaco en el tiempo.

2. Página 286

Sí, hay menos personas de que una persona tenga un coeficiente intelectual de 115 que de 110, ya que la probabilidad de que una persona tenga un coeficiente de 115 es menor que de que tenga un coeficiente intelectual de 110.

La probabilidad de que una persona tenga un coeficiente intelectual de 115 y de 85 es la misma; por lo tanto, habrá las mismas personas con coeficiente intelectual de 115 y de 85.

3. Página 286

La función puede tomar todos los valores reales, aunque sea con probabilidad muy pequeña.

4. Página 286

Si hay 46,77 millones de españoles, habrá $\frac{46,77}{2} = 23,385$ millones de españoles con inteligencia superior a la que se considera normal.