# Programación lineal

4

## ACTIVIDADES

**1. Página 86**

a) $x=1 \rightarrow \frac{1}{3}-1 \geq \frac{2}{5}-1 \rightarrow -\frac{2}{3} \geq -\frac{3}{5}$ Falso. No es solución de la inecuación.

b) $x=-2 \rightarrow -\frac{1}{2}(-2+3) \leq \frac{-2}{2}-2 \rightarrow -\frac{1}{2} \leq -3$ Falso. No es solución de la inecuación.

**2. Página 86**

a) $\frac{3x-1}{2}-\frac{x}{3} \geq 1-\frac{x-3}{4} \rightarrow \frac{3x}{2}-\frac{1}{2}-\frac{x}{3} \geq 1-\frac{x}{4}+\frac{3}{4} \rightarrow \frac{3x}{2}-\frac{x}{3}+\frac{x}{4} \geq 1+\frac{3}{4}+\frac{1}{2} \rightarrow$
$\frac{18x-4x+3x}{12} \geq \frac{4+3+2}{4} \rightarrow \frac{17x}{3} \geq 9 \rightarrow 17x \geq 27 \rightarrow x \geq \frac{27}{17}$

b) $\frac{2-x}{5}+\frac{x-3}{2} > 1 \rightarrow \frac{2}{5}-\frac{x}{5}+\frac{x}{2}-\frac{3}{2} > 1 \rightarrow -\frac{x}{5}+\frac{x}{2} > 1+\frac{3}{2}-\frac{2}{5} \rightarrow \frac{-2x+5x}{10} > \frac{10+15-4}{10} \rightarrow \; 3x > 21 \rightarrow x > 7$

**3. Página 87**

a) $x^2-6x+5=0 \rightarrow x=\frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2}=\frac{6 \pm 4}{2}=\begin{cases} x_1=5 \\ x_2=1 \end{cases}$

Las soluciones de la igualdad son $x_1=5$ y $x_2=1$, que dividen a la recta en los intervalos: $(-\infty, 1), (1, 5)$ y $(5, +\infty)$.

Para $(-\infty, 1)$: si $x=0 \rightarrow 5>0$. Estos puntos no son solución de la inecuación.

Para $(1, 5)$: si $x=2 \rightarrow 4-12+5 \leq 0$. Estos puntos son solución de la inecuación.

Para $(5, \infty)$: si $x=6 \rightarrow 36-36+5>0$. Estos puntos no son solución de la inecuación.

$x=1 \rightarrow 1-6+5 \leq 0 \rightarrow x=1$ es solución.

$x=5 \rightarrow 25-30+5 \leq 0 \rightarrow x=5$ es solución.

La solución es: $[1, 5]$.

b) $\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}=\frac{1}{6} \rightarrow 2x^2-3x+1=0 \rightarrow \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4}=\frac{3 \pm 1}{4}=\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=\frac{1}{2} \end{cases}$

Las soluciones de la igualdad son $x_1=1$ y $x_2=\frac{1}{2}$, que dividen a la recta en los intervalos: $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ y $(1, \infty)$.

Para $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$: si $x=-1 \rightarrow \frac{-1}{2}-\frac{(-1)^2}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=-\frac{5}{6}<\frac{1}{6}$. Estos puntos no son solución de la inecuación.

Para $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$: si $x=\frac{2}{3} \rightarrow \frac{2/3}{2}-\frac{(2/3)^2}{3}=\frac{1}{3}-\frac{2}{27}=\frac{7}{27} \geq \frac{1}{6}$. Estos puntos son solución de la inecuación.

Para $[1,\infty)$ : si $x=2\rightarrow\frac{2}{2}-\frac{2^2}{3}=1-\frac{4}{3}=-\frac{1}{3}<\frac{1}{6}$ . Estos puntos no son solución de la inecuación.

$x=\frac{1}{2}\rightarrow\frac{1/2}{2}-\frac{(1/2)^2}{3}=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}\geq\frac{1}{6}$ es solución.

$x=1\rightarrow\frac{1}{2}-\frac{1^2}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\geq\frac{1}{6}$ es solución.

La solución es: $\left[\frac{1}{2},1\right]$.

c) Transformamos la inecuación $x(x+5)>2x^2\rightarrow x^2+5x>2x^2\rightarrow x(5-x)>0$

$x(5-x)=0\rightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=5\end{cases}$

Las soluciones de la igualdad son $x_1=0$ y $x_2=5$ , que dividen a la recta en los intervalos: $(-\infty,0),(0,5)$ y $(5,+\infty)$.

Para $(-\infty,0)$ : si $x=-1\rightarrow-1(5-(-1))=-6<0$ . Estos puntos no son solución de la inecuación.

Para $(0,5)$ : si $x=1\rightarrow1(5-1)=4>0$ . Estos puntos son solución de la inecuación.

Para $(5,\infty)$ : si $x=6\rightarrow6(5-6)=-6<0$ . Estos puntos no son solución de la inecuación.

$x=0\rightarrow0(5-0)=0$ no es solución.

$x=5\rightarrow5(5-5)=0$ no es solución.

La solución es: $(0,5)$ .

**4. Página 87**

a) $(x+2)^2+(x-2)^2<10x\rightarrow x^2+4x+4+x^2-4x+4<10x\rightarrow2x^2-10x+8<0\rightarrow\ x^2-5x+4<0$

$x^2-5x+4=0\rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\begin{cases}x_1=4\\x_2=1\end{cases}$

Los intervalos serían: $(-\infty,1),(1,4)$ y $(4,\infty)$.

Para $(-\infty,1)$ : si $x=0\rightarrow4>0$

Para $(1,4)$ : si $x=2\rightarrow4-10+4<0$

Para $(4,+\infty)$ : si $x=5\rightarrow25-25+4>0$

$x=1\rightarrow1-5+4=0$ no es solución.

$x=4\rightarrow16-20+4=0$ no es solución.

La solución es: $(1,4)$ .

b) $\frac{(3+2x)(x-1)}{3}-1>\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{1+x}{2}\rightarrow\frac{3x+2x^2-3-2x-3}{3}>\frac{x^2-2x+1-2-2x}{4}\rightarrow$
$\frac{2x^2+x-6}{3}>\frac{x^2-4x-1}{4}\rightarrow8x^2+4x-24>3x^2-12x-3\rightarrow5x^2+16x-21>0$

$5x^2+16x-21=0\rightarrow x=\frac{-16\pm\sqrt{256+420}}{10}=\frac{-16\pm26}{10}\rightarrow\begin{cases}x_1=1\\x_2=-\frac{42}{10}=-\frac{21}{5}\end{cases}$

Los intervalos serían: $\left(-\infty,-\frac{21}{5}\right),\left(-\frac{21}{5},1\right)$ y $(1,\infty)$.

Para $\left(-\infty,-\frac{21}{5}\right)$: si $x=-5\rightarrow 125-80-21>0$

Para $\left(-\frac{21}{5},1\right)$: si $x=0\rightarrow -21<0$

Para $(1,\infty)$: si $x=2\rightarrow 20+32-21>0$

$x=-\frac{21}{5}\rightarrow \frac{441}{5}-\frac{336}{5}-21=0$ no es solución.

$x=1\rightarrow 5+16-21=0$ no es solución.

La solución es: $\left(-\infty,-\frac{21}{5}\right)\cup(1,\infty)$.

c) $\left(2+\sqrt{3}\right)x-x^2\geq 2\sqrt{3}\rightarrow x^2-(2+\sqrt{3})x+2\sqrt{3}\leq 0$

$x^2-(2+\sqrt{3})x+2\sqrt{3}=0\rightarrow x=\frac{2+\sqrt{3}\pm\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{2}=\begin{cases}x_1=2\\x_2=\sqrt{3}\end{cases}$

Los intervalos serían: $\left(-\infty,\sqrt{3}\right),\left(\sqrt{3},2\right)$ y $(2,\infty)$.

Para $\left(-\infty,\sqrt{3}\right)$: si $x=0\rightarrow 2\sqrt{3}>0$

Para $\left(\sqrt{3},2\right)$: si $x=\frac{7}{4}\rightarrow\left(\frac{7}{4}\right)^2-\left(2+\sqrt{3}\right)\frac{7}{4}+2\sqrt{3}=\frac{49}{16}-\frac{14}{4}-\frac{7\sqrt{3}}{4}+2\sqrt{3}=-\frac{7+28\sqrt{3}-16\sqrt{3}}{16}=-\frac{7+12\sqrt{3}}{16}\leq 0$

Para $(2,\infty)$: si $x=3\rightarrow 3^2+\left(2+\sqrt{3}\right)3-2\sqrt{3}>0$

$x=\sqrt{3}\rightarrow\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(2+\sqrt{3}\right)\sqrt{3}+2\sqrt{3}=0$ es solución.

$x=2\rightarrow 2^2-\left(2+\sqrt{3}\right)2+2\sqrt{3}=0$ es solución.

La solución es: $\left[\sqrt{3},2\right]$.

**5. Página 88**

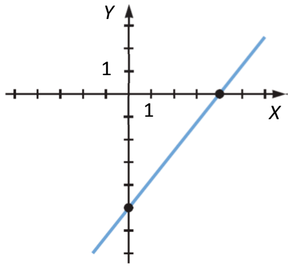
a) $4x+y-4\leq 0\xrightarrow{x=1,y=-2}4-2-4=-2\leq 0\rightarrow$ el punto *A* forma parte de la solución.

b) $-2x+y-5\geq 0\xrightarrow{x=-\frac{1}{2},y=3}1+3-5=-1<0\rightarrow$ el punto *A* no forma parte de la solución.

**6. Página 88**

a) $5x - 4y \leq 20$

$5x - 4y = 20 \xrightarrow{x=0} y = -5$
$5x - 4y = 20 \xrightarrow{y=0} x = 4$




Tomamos dos puntos, uno de cada región del plano.

El punto (0, 0) pertenece a la región superior del plano y el punto (2, –4) pertenece a la región inferior del plano.

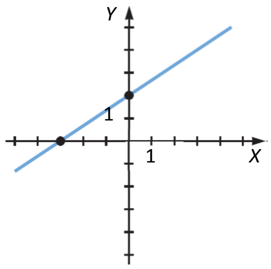
$5x - 4y \leq 20 \xrightarrow{(0,0)} 0 \leq 20 \rightarrow$ es solución
$5x - 4y \leq 20 \xrightarrow{(2,-4)} 10 + 16 > 20 \rightarrow$ no es solución

La solución de la inecuación es la región del plano formada por todos los puntos situados en la misma región que (0, 0).

Como la desigualdad contiene el signo =, la recta forma parte de la solución.

b) $3y - 2x \geq 6$

$3y - 2x = 6 \xrightarrow{x=0} y = 2$
$3y - 2x = 6 \xrightarrow{y=0} x = -3$




Tomamos dos puntos, uno de cada región del plano.

El punto (0, 0) pertenece a la región inferior del plano y el punto (–4, 4) pertenece a la región superior del plano.

$3y - 2x \geq 6 \xrightarrow{(0,0)} 0 < 6 \rightarrow$ no es solución.
$3y - 2x \geq 6 \xrightarrow{(-4,4)} 12 + 8 \geq 6 \rightarrow$ es solución.

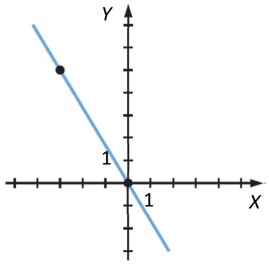
La solución de la inecuación es la región del plano formada por todos los puntos situados en la misma región que (–4, 4).

Como la desigualdad contiene el signo =, la recta forma parte de la solución.

c) $2(x+y)-3(x-y)<4(x+2y) \rightarrow 2x+2y-3x+3y<4x+8y \rightarrow -5x-3y<0$

$-5x-3y=0 \xrightarrow{x=0} y=0$

$-5x-3y=0 \xrightarrow{y=5} x=-3$




Tomamos dos puntos, uno de cada región del plano.

El punto (2, 2) pertenece a la región derecha del plano y el punto (–2, –2) pertenece a la región izquierda del plano.

$-5x-3y<0 \xrightarrow{(2,2)} -10-6<0 \rightarrow$ es solución.

$-5x-3y<0 \xrightarrow{(-2,-2)} 10+6>0 \rightarrow$ no es solución.

La solución de la inecuación es la región del plano formada por todos los puntos situados en la misma región que (2, 2).

Como la desigualdad no contiene el signo =, la recta no forma parte de la solución.

**7. Página 89**

a) $\left.\begin{matrix} 3x+y<1 \\ -2x-y\geq 3 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{(-1,-2)} \left.\begin{matrix} -3-2=-5<1 \\ 2+2=4\geq 3 \end{matrix}\right\} \rightarrow$ es solución.

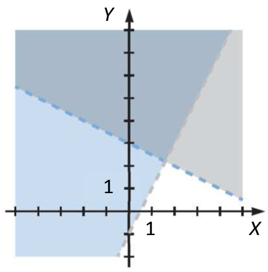
b) $\left.\begin{matrix} x-2y\leq 6 \\ -x+4y>-2 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\left(3,-\frac{1}{2}\right)} \left.\begin{matrix} 3+1=4\leq 6 \\ -3-2=-5<-2 \end{matrix}\right\} \rightarrow$ no es solución.

**8. Página 89**

a) $\left.\begin{matrix} 2x-y<1 \\ 5x+10y>30 \end{matrix}\right\} \rightarrow$ Primero resolvemos las dos inecuaciones por separado:

$\left.\begin{matrix} 2x-y=1 \xrightarrow{x=0} y=-1 \\ 2x-y=1 \xrightarrow{y=1} x=1 \end{matrix}\right\} \rightarrow 2x-y<1 \xrightarrow{x=0,y=0} 0<1 \rightarrow$ se cumple.

$\left.\begin{matrix} 5x+10y=30 \xrightarrow{x=0} y=3 \\ 5x+10y=30 \xrightarrow{y=0} x=6 \end{matrix}\right\} \rightarrow 5x+10y>30 \xrightarrow{x=0,y=0} 0<30 \rightarrow$ no se cumple la inecuación.



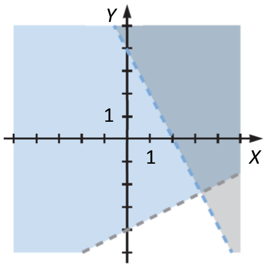

La solución es la intersección de las dos soluciones, la sombra más oscura. En este caso, los bordes de las funciones no son solución porque no contienen el signo =.

b)

$$\left.\begin{array}{l}2x+y>4\\x-2y<8\end{array}\right\}\rightarrow$$ Primero resolvemos las dos inecuaciones por separado:

$$\left.\begin{array}{l}2x+y=4\xrightarrow{x=0}y=4\\2x+y=4\xrightarrow{y=0}x=2\end{array}\right\}\rightarrow 2x+y>4\xrightarrow{x=0,y=0}0<4\rightarrow \text{no se cumple la inecuación.}$$

$$\left.\begin{array}{l}x-2y=8\xrightarrow{x=0}y=-4\\x-2y=8\xrightarrow{y=0}x=8\end{array}\right\}\rightarrow x-2y<8\xrightarrow{x=0,y=0}0<8\rightarrow \text{se cumple.}$$



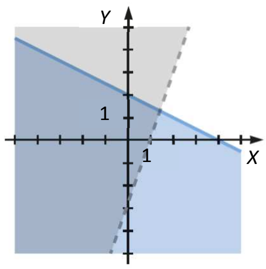

La solución es la intersección de las dos soluciones, la sombra más oscura. En este caso, los bordes de las funciones no son solución porque no contienen el signo =.

c)

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x}{2}+y\leq 2\\-x+\dfrac{y}{3}>-1\end{array}\right\}\rightarrow$$ Primero resolvemos las dos inecuaciones por separado:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x}{2}+y=2\xrightarrow{x=0}y=2\\\dfrac{x}{2}+y=2\xrightarrow{y=0}x=4\end{array}\right\}\rightarrow \dfrac{x}{2}+y\leq 2\xrightarrow{x=0,y=0}0\leq 2\rightarrow \text{se cumple.}$$

$$\left.\begin{array}{l}-x+\dfrac{y}{3}=-1\xrightarrow{x=0}y=-3\\-x+\dfrac{y}{3}=-1\xrightarrow{y=0}x=1\end{array}\right\}\rightarrow -x+\dfrac{y}{3}>-1\xrightarrow{x=0,y=0}0>-1\rightarrow \text{no se cumple la inecuación.}$$



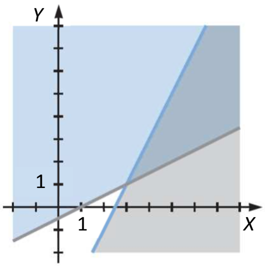

La solución es la intersección de las dos soluciones, la sombra más oscura. En este caso, el borde de la primera función pertenece a la solución porque la inecuación contiene el signo =, mientras que el borde de la segunda no es solución porque no contiene el signo =.

d)

$$\left.\begin{array}{l}2(x-1)\geq y+3\\ x-y\leq -x+3y+2\end{array}\right\}\rightarrow$$ Primero resolvemos las dos inecuaciones por separado:

$$\left.\begin{array}{l}2(x-1)=y+3\xrightarrow{x=0}y=-5\\ 2(x-1)=y+3\xrightarrow{y=0}x=\dfrac{5}{2}\end{array}\right\}\rightarrow 2(x-1)\geq y+3\xrightarrow{x=0,y=0}-2<3\rightarrow \text{no se cumple la inecuación.}$$

$$\left.\begin{array}{l}x-y=-x+3y+2\xrightarrow{x=0}y=-\dfrac{1}{2}\\ x-y=-x+3y+2\xrightarrow{y=0}x=1\end{array}\right\}\rightarrow x-y\leq -x+3y+2\xrightarrow{x=0,y=0}0\leq 2\rightarrow \text{se cumple.}$$




La solución es la intersección de las dos soluciones, la sombra más oscura. En este caso, los bordes de las funciones son solución porque contienen el signo =.

**9. Página 90**

| | Modelo A | Modelo B | Totales |
|---|---|---|---|
| Unidad | 65 | 55 | 120 |
| Beneficio | 4 | 6,50 | |

Definimos las variables:

$x\rightarrow$ número de productos *A* $\qquad$ $y\rightarrow$ número de productos *B*

Maximizar $f(x,y)=4x+6{,}5y$

Sujeto a $\left.\begin{array}{l}x+y\leq 120\\ x\leq 65\\ y\leq 55\end{array}\right\}$

**10. Página 90**

| | Modelo *A* | Modelo *B* | Totales |
|---|---|---|---|
| Superficie | 2 | 1 | 600 |
| Horas | 1 | 3 | 900 |
| Beneficio | 80 | 50 | |

Definimos las variables:

$x\rightarrow$ número de mesas tipo *A* $\qquad$ $y\rightarrow$ número de mesas tipo *B*

Maximizar $f(x,y)=80x+50y$

Sujeto a $\left.\begin{array}{l}2x+y\leq 600\\ x+3y\leq 900\end{array}\right\}$

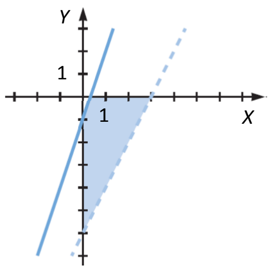
**11. Página 91**

a) Resolvemos el sistema de inecuaciones:

$f: 3x - y = 1 \rightarrow$ pasa por $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ y $(0, -1)$

$g: 2x - y = 6 \rightarrow$ pasa por $(3, 0)$ y $(0, -6)$

Como $x \geq 0, y \leq 0$, tomo la región correspondiente al cuarto cuadrante:

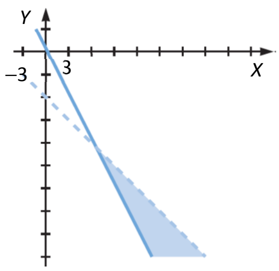



b) Resolvemos el sistema de inecuaciones:

$f: 2x + y = 1 \rightarrow$ pasa por $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y $(0, 1)$

$g: -x - y = 6 \rightarrow$ pasa por $(-6, 0)$ y $(0, -6)$

Como $x \geq 0, y \leq 0$, tomo la región correspondiente al cuarto cuadrante:




**12. Página 91**

La región factible pertenece al primer cuadrante; por tanto, dos de las restricciones son $x \geq 0, y \geq 0$.

La recta azul pasa por los puntos: $(-1, 0)$ y $(0, 2) \rightarrow -2x + y = 2 \rightarrow -2x + y \leq 2$ es una restricción.

La recta roja pasa por los puntos: $(1, 0)$ y $(0, 3) \rightarrow -3x - y = -3 \rightarrow -3x - y \leq -3$ es una restricción.

Por tanto, las restricciones son:

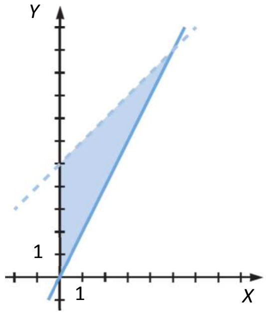
$$\left.\begin{array}{l} -2x + y \leq 2 \\ -3x - y \leq -3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

**13. Página 92**

Los vértices son *A*(3, 1), *B*(0, 4), *C*(0, 0) y *D*(7/2, 0).

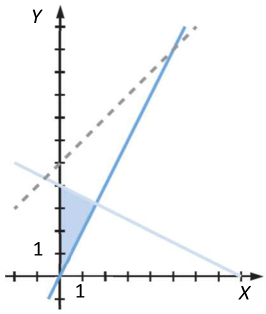
**14. Página 92**

a)




Los vértices son $A(0,0), B(0,5), C(5,10)$.

b)




Los vértices son $A(0,0), B(0,4), C\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$.

**15. Página 93**

Maximizar $f(x,y) = 2x - y$

Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{l} 5x + 3y \leq 15 \\ x - y \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Buscamos los puntos en los que $k = f(x,y)$ sea máximo. Los puntos del plano $(x,y)$ tales que $k = f(x,y)$ forman una recta.

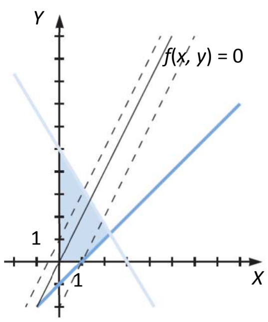
$$\left.\begin{array}{l} f(x,y) = 2x - y \\ f(x,y) = k \end{array}\right\} \rightarrow 2x - y = k \text{ es una recta.}$$

Para cada valor de *k* obtenemos rectas paralelas, que tienen la misma pendiente.

Si $k = 0 \rightarrow f(x,y) = 0 \rightarrow y = 2x$

Si $k = 2 \rightarrow f(x,y) = 2 \rightarrow y = 2x - 2$

Si $k = -2 \rightarrow f(x,y) = -2 \rightarrow y = 2x + 2$



Como la recta debe cortar a la región factible, la solución óptima se alcanza en el vértice (9/4, 5/4), y el valor de la función es:

$$f\left(\frac{9}{4},\frac{5}{4}\right)=\frac{18}{4}-\frac{5}{4}=\frac{13}{4}$$

**16. Página 93**

Maximizar $f(x,y)=x+2y$

Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{l} x+y\leq 5 \\ x-y\leq 3 \\ x\geq 0, y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Buscamos los puntos en los que $k=f(x,y)$ sea máximo. Los puntos del plano $(x,y)$ tales que $k=f(x,y)$ forman una recta.

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y)=x+2y \\ f(x,y)=k \end{array}\right\}\rightarrow x+2y=k$$ es una recta.

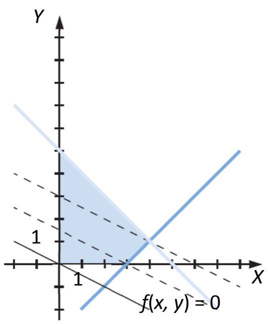
Para cada valor de *k* obtenemos rectas paralelas, que tienen la misma pendiente.

Si $k=0\rightarrow f(x,y)=0\rightarrow y=-\frac{x}{2}$

Si $k=\frac{3}{2}\rightarrow f(x,y)=\frac{3}{2}\rightarrow y=-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}$

Si $k=3\rightarrow f(x,y)=3\rightarrow y=-\frac{x}{2}+3$

Si $k=5\rightarrow f(x,y)=5\rightarrow y=-\frac{x}{2}+5$




Como la región factible está acotada, el máximo se alcanza en el punto *D*(0, 5) y vale 10.

**17. Página 94**

| | Modelo *A* | Modelo *B* | Totales |
|---|---|---|---|
| **Superficie** | 3 000 | 5 000 | 90 000 |
| **Número máx.** | 150 | 120 | |
| **Beneficio** | 10 000 | 20 000 | |

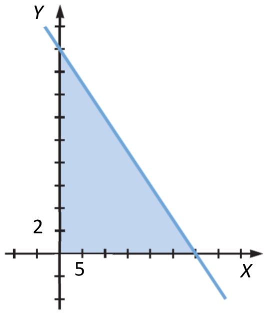
Definimos las variables:

$x\geq 0, x\rightarrow$ número de parcelas tipo *A*

$y\geq 0, y\rightarrow$ número de parcelas tipo *B*

Maximizar $f(x,y) = 10\,000x + 20\,000y$
Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{l} 3000x + 5000y \leq 90\,000 \\ x \leq 150, y \leq 120 \end{array}\right\}$$




Los vértices son (0, 0), (0, 18) y (30, 0).

$f(x,y) = 10\,000x + 20\,000y$

$A(0,0) \to f(0,0) = 0\,€$ $\quad B(0,18) \to f(0,18) = 360\,000\,€$ $\quad C(30,0) \to f(30,0) = 300\,000\,€$

El punto que maximiza la función es *B*(0, 18). La solución óptima es 0 unidades del tipo A y 18 del tipo *B*.

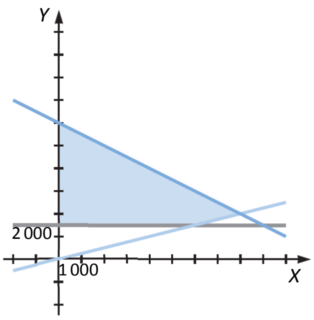
**18. Página 94**

Definimos las variables:

$x \geq 0, x \to$ inversión en producto *A* $\qquad$ $y \geq 0, y \to$ inversión en producto *B*

Maximizar $f(x,y) = 0{,}1x + 0{,}05y$
Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{l} x + y \leq 12000 \\ x \leq 2y \\ y \geq 3000 \\ x, y \geq 0 \end{array}\right\}$$




Los vértices son (0, 12 000), (8 000, 4 000), (6 000, 3 000) y (0, 3 000).

$f(x,y) = 0{,}1x + 0{,}05y$

$A(0,12000) \to f(0,12000) = 600\,€$

$B(8000,4000) \to f(8000,4000) = 1000\,€$

$C(6000,3000) \to f(6000,3000) = 750\,€$

$D(0,3000) \to f(0,3000) = 150\,€$

El punto que maximiza la función es *B*(8 000,4 000). La solución óptima es invertir 8 000 € en el producto *A* y 4 000 € en el producto *B*. Con esta inversión el beneficio será de 1 000 €.

**19. Página 95**

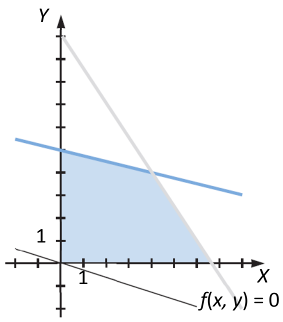
Definimos las variables:

$x \geq 0, x \rightarrow$ aparatos modelo *A* $\qquad$ $y \geq 0, y \rightarrow$ aparatos modelo *B*

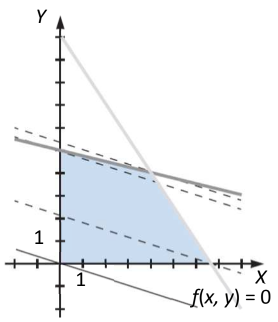
Maximizar $f(x,y) = 100x + 150y$
Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + y \leq 100 \\ x + 2y \leq 100 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos la región factible y la recta *f*(*x*, *y*) = 0, que representa la función objetivo igualada a cero.




Trazamos rectas paralelas a la recta *f*(*x*, *y*) = 0 que pasen por cada vértice.




La recta con mayor ordenada es la que pasa por el vértice (20, 40) luego: $f(20,40) = 8000$ €

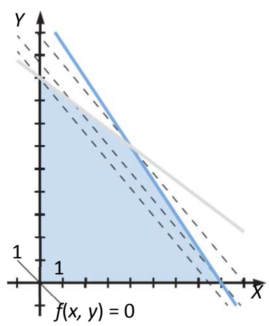
**20. Página 95**

Definimos las variables:

$x \geq 0, x \rightarrow$ paquetes tipo *A* $\qquad$ $y \geq 0, y \rightarrow$ paquetes tipo *B*

Maximizar $f(x,y) = 6x + 5y$

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 2y \leq 120 \\ 3x + 4y \leq 180 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\}$$



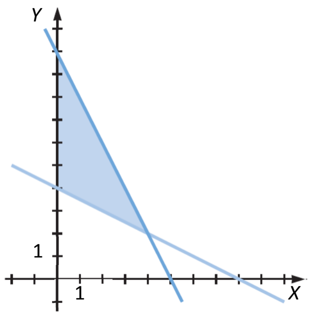

Dibujamos la región factible y la recta *f*(*x*, *y*) = 0, que representa la función objetivo, igualada a cero.

También trazamos rectas paralelas a la recta *f*(*x*, *y*) = 0 que pasen por cada vértice.

La recta con mayor ordenada es la que pasa por el vértice (20, 30), es decir, 20 paquetes tipo *A* y 30 paquetes tipo *B*. Obteniendo un beneficio máximo de 270 €.

**21. Página 96**

La región factible es:




Los vértices de la región factible son: $A(0,10), B(4,2), C(0,4)$.

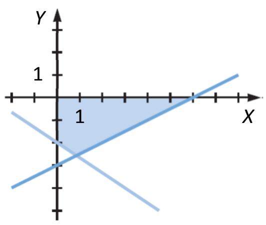
Sustituimos en la función objetivo:

$$f(x,y) = x - 2y$$
$$A(0,10) \rightarrow 0 - 20 = -20$$
$$B(4,2) \rightarrow 4 - 4 = 0 \rightarrow \text{Máximo}$$
$$C(0,4) \rightarrow 0 - 8 = -8$$

Existe una única solución óptima: $x = 4$, $y = 2$.

**22. Página 96**

La región factible es:



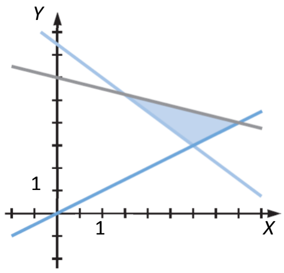

Los vértices de la región factible son: $A(0,0), B(6,0), C\left(\frac{6}{7}, -\frac{18}{7}\right), D(0,-2)$.

Sustituimos en la función objetivo:

$$f(x,y) = x + y$$
$$A(0,0) \rightarrow 0$$
$$B(6,0) \rightarrow 6 \rightarrow \text{Máximo}$$
$$C\left(\frac{6}{7}, -\frac{18}{7}\right) \rightarrow \frac{-12}{7}$$
$$D(0,-2) \rightarrow -2$$

**23. Página 97**

La región factible es:




Los vértices de la región factible son: $A\left(\frac{3}{2},\frac{21}{4}\right), B(4,4), C(3,3)$.

Sustituimos en la función objetivo:

$f(x,y) = 2x + 4y$

$A\left(\frac{3}{2},\frac{21}{4}\right) \rightarrow 3 + 21 = 24 \rightarrow \text{Máximo}$

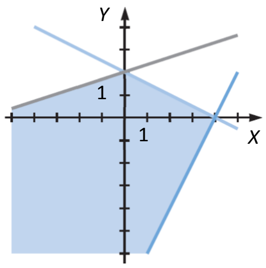
$B(4,4) \rightarrow 8 + 16 = 24 \rightarrow \text{Máximo}$

$C(3,3) \rightarrow 6 + 12 = 18$

La función objetivo alcanza el valor máximo en los vértices *A* y *B*; por tanto, en todos los puntos del segmento *AB*. La solución es múltiple.

**24. Página 97**

La región factible es:




La región factible no está acotada. Tiene dos vértices de la región factible, que son: $A(0,2), B(4,0)$.

Sustituimos en la función objetivo:

$f(x,y) = 3x + 6y$

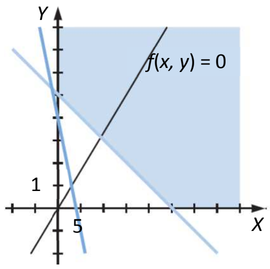
$A(0,2) \rightarrow 12 \rightarrow \text{Máximo}$

$B(4,0) \rightarrow 12 \rightarrow \text{Máximo}$

La función objetivo alcanza el valor máximo en los vértices *A* y *B*; por tanto, en todos los puntos del segmento *AB*. La solución es múltiple.

**25. Página 98**

La región factible es:



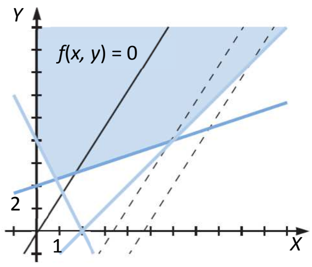

La región factible no está acotada. Tiene dos vértices de la región factible, que son: $A(0,5), B(25,0)$ .

La función objetivo crece indefinidamente para valores crecientes de *x* e *y*. Trazando rectas paralelas a la función objetivo podemos ver que siempre existe una recta paralela por encima de la anterior que sigue cortando a la región factible.

En este caso no existe un valor que haga máxima la función objetivo, es decir, el problema carece de solución.

**26. Página 98**

La región factible es:




La región factible no está acotada. Tiene tres vértices de la región factible, que son:
$A(0,8), B\left(\frac{12}{7},\frac{32}{7}\right), C(12,8)$ .

Sustituimos en la función objetivo:

$$f(x,y) = 3x - 2y$$
$$A(0,8) \rightarrow -16$$
$$B\left(\frac{12}{7},\frac{32}{7}\right) \rightarrow -4$$
$$C(12,8) \rightarrow 20$$

La función objetivo crece indefinidamente para valores crecientes de *x* e *y*. Trazando rectas paralelas a la función objetivo podemos ver que siempre existe una recta paralela por encima de la anterior que sigue cortando a la región factible.

En este caso no existe un valor que haga máxima la función objetivo, es decir, el problema carece de solución.

**27. Página 99**

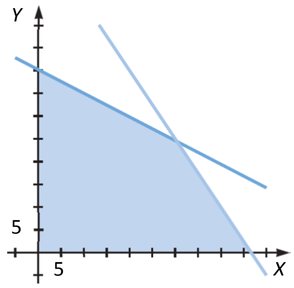
| | Trajes | Vestidos | Total |
|---|---|---|---|
| Lana | 3 | 2 | 140 |
| Algodón | 1 | 2 | 80 |
| Beneficio | 50 | 50 | |

Definimos las variables:

$x \geq 0, x \rightarrow$ número de trajes $\quad$ $y \geq 0, y \rightarrow$ número de vestidos

Maximizar $f(x,y) = 50x + 50y$
Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 2y \leq 140 \\ x + 2y \leq 80 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\}$$




Los vértices de la región factible son: $A(0,40), B(30,25), C(47,0), D(0,0)$ .

Sustituimos en la función objetivo:

$f(x,y) = 50x + 50y$
Sujeto a:
$A(0,40) \rightarrow 2000$
$B(30,25) \rightarrow 2750 \rightarrow$ Máximo
$C(47,0) \rightarrow 2350$
$D(0,0) \rightarrow 0$

El beneficio será 2 750 € con 30 trajes y 25 vestidos.

**28. Página 99**

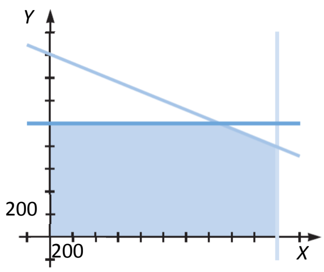
| | Pequeñas | Grandes | Total |
|---|---|---|---|
| Guisantes | 0,2 | 0,5 | 800 |
| Latas | 2 000 | 1 000 | |
| Beneficio | 0,1 | 0,3 | |

Definimos las variables:

$x \geq 0, x \rightarrow$ número de latas pequeñas $\quad$ $y \geq 0, y \rightarrow$ número de latas grandes

Maximizar $f(x,y) = 0,1x + 0,3y$
Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{l} 0,2x + 0,5y \leq 800 \\ 0 \leq x \leq 2000 \\ 0 \leq y \leq 1000 \end{array}\right\}$$



Los vértices de la región factible son: $A(0,0), B(2000,0), C(0,1000), D(1500,1000), E(2000,800)$.

Sustituimos en la función objetivo:

$$
\begin{aligned}
&f(x,y) = 0{,}1x + 0{,}3y \\
&A(0,0) \rightarrow 0 \\
&B(2000,0) \rightarrow 200 \\
&C(0,1000) \rightarrow 300 \\
&D(1500,1000) \rightarrow 450 \rightarrow \textit{Máximo} \\
&E(2000,800) \rightarrow 440
\end{aligned}
$$

El beneficio será 450 € con 1 500 latas pequeñas y 1 000 latas grandes.

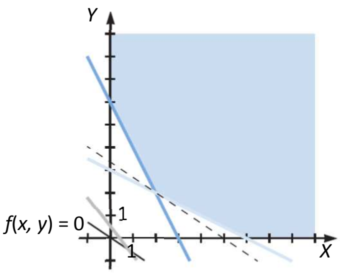
**29. Página 100**

| | **Cápsula *A*** | **Cápsula *B*** | **Total** |
|---|---|---|---|
| **Sustancia *M*** | 6 | 3 | 36 |
| **Sustancia *N*** | 2 | 4 | 24 |
| **Sustancia *P*** | 18 | 18 | 8 |
| **Coste** | 3 | 4,5 | |

Definimos las variables:

$x \geq 0, x \rightarrow$ número de cápsulas *A* $\qquad$ $y \geq 0, y \rightarrow$ número de cápsulas *B*

$$
\begin{aligned}
&\text{Minimizar } f(x,y) = 3x + 4{,}5y \\
&\text{Sujeto a:} \\
&\left.\begin{array}{l} 6x + 3y \geq 36 \\ 2x + 4y \geq 24 \\ 18x + 18y \geq 8 \\ 0 \leq x, 0 \leq y \end{array}\right\}
\end{aligned}
$$




La región factible no está acotada superiormente y tiene tres vértices: $A(4,4), B(0,12), C(12,0)$. Trazando paralelas a la función objetivo obtenemos que se alcanza el mínimo en el punto $A(4,4)$. Por tanto, un deportista necesita 4 cápsulas de cada tipo, siendo el coste 30 céntimos.

**30. Página 100**

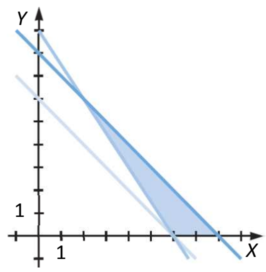
| | **Compuesto *X*** | **Compuesto *Y*** | **Total** |
|---|---|---|---|
| **Vitamina A** | 10 | 10 | 60 |
| **Vitamina B** | 15 | 10 | 90 |
| **Coste** | 0,5 | 0,3 | |

Definimos las variables:

$x \geq 0, x \rightarrow$ número de dosis de compuesto *X* $y \geq 0, y \rightarrow$ número de dosis de compuesto *Y*

Mínimo $f(x,y) = 0{,}5x + 0{,}3y$
Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{l} x + y \leq 8 \\ 10x + 10y \geq 60 \\ 15x + 10y \geq 90 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\}$$




Los vértices de la región factible son: $A(6,0), B(8,0), C(2,6)$.

Sustituimos en la función objetivo:

$f(x,y) = 0{,}5x + 0{,}3y$
$A(6,0) \rightarrow 3$ €
$B(8,0) \rightarrow 4$ €
$C(2,6) \rightarrow 2{,}80$ € $\rightarrow$ Mínimo

El coste mínimo sería 2,80 € con 2 dosis del compuesto *X* y 6 del compuesto *Y*.

**31. Página 101**

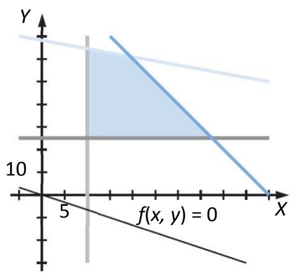
| | Lote *A* | Lote *B* | Total |
|---|---|---|---|
| **Queso** | 1 | 3 | 200 |
| **Vino** | 2 | 1 | 100 |
| **Coste** | 0,9 | 1,5 | |

Definimos las variables:

$x \geq 0, x \rightarrow$ número de lotes *A* $y \geq 0, y \rightarrow$ número de lote *B*

Minimizar $f(x,y) = 0{,}9x + 1{,}5y$
Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{l} x + 3y \leq 200 \\ 2x + y \leq 100 \\ x \geq 10, y \geq 25 \end{array}\right\}$$




Los vértices de la región factible son: $A(10,25), B\left(\frac{75}{2}, 25\right), C\left(10, \frac{190}{3}\right), D(20,60)$.

Trazando paralelas a la función objetivo obtenemos que se alcanza el mínimo en el punto $A(10,25)$. Por tanto, es necesario elaborar 10 lotes tipo *A* y 25 tipo *B*, siendo el gasto 46,50 €.

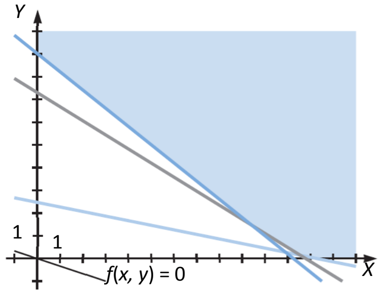
**32. Página 101**

Definimos las variables:

$x \geq 0, x \rightarrow$ número de artículos *A* $\qquad$ $y \geq 0, y \rightarrow$ número de artículos *B*

Minimizar $f(x, y) = 50x + 60y$
Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y \geq 45 \\ 3x + 2y \geq 71 \\ x + 2y \geq 25 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\}$$

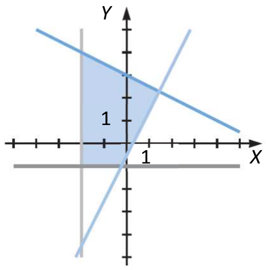



La región factible no está acotada. Los vértices de la región factible son: $A(25,0), B(23,1), C(19,7), D(0,45)$.

Trazando paralelas a la función objetivo obtenemos que se alcanza el mínimo en el punto, $B(23,1)$. Por tanto, hay que elaborar 23 artículos *A* y 1 tipo *B*. El coste será de 1 200 €.

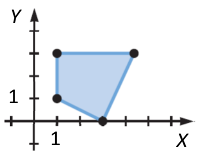
## SABER HACER

**33. Página 102**




**34. Página 102**

Dibujamos gráficamente el recinto.




Las rectas que limitan la región factible son:

$AB: -x - 2y = -3 \qquad BC: x = 1 \qquad CD: y = 3 \qquad DA: 3x - \frac{3}{2}y = 9$

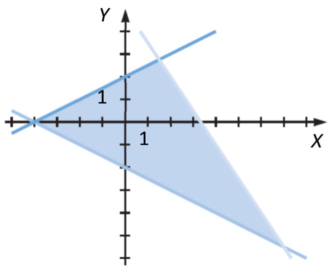
El punto $(2, 2)$ pertenece a la región factible, entonces:

$$-2 - 4 < -3 \rightarrow -x - 2y \leq -3$$
$$2 > 1 \rightarrow x \geq 1$$
$$2 < 3 \rightarrow y \leq 3$$
$$6 - 3 < 9 \rightarrow 3x - \frac{3}{2}y \leq 9$$

Las restricciones son: $\left.\begin{array}{l} -x-2y\le -3 \\ 3x-\dfrac{3}{2}y\le 9 \\ x\ge 1, y\le 3 \end{array}\right\}$

**35. Página 103**

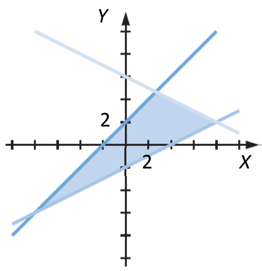
La región factible:




Los vértices son: $A\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{11}{4}\right), B(-4,0), C\left(7,-\dfrac{11}{2}\right)$

**36. Página 103**

Representa la región factible.



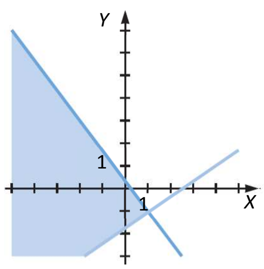

Los vértices de la región factible son: $A\left(\dfrac{8}{3},\dfrac{14}{3}\right), B(8,2), C(-8,-6)$.

Sustituimos en la función objetivo:

$$f(x,y)=2x+3y$$
$$A\left(\frac{8}{3},\frac{14}{3}\right)\to f(A)=\frac{16}{3}+14=\frac{58}{3}$$
$$B(8,2)\to f(B)=16+6=22\to \text{Máximo}$$
$$C(-8,-6)\to f(C)=-16-18=-34\to \text{Mínimo}$$

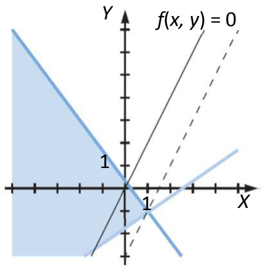
**37. Página 103**

Se representa la región factible:




La región no está acotada, el vértice es $A(1,-1)$ .

Se determinan las rectas de la función objetivo que pasa por los vértices, la recta que pasa por el vértice es: $2x - y = 3$




El coeficiente de *y* es negativo; por tanto, A es mínimo. No existe máximo, se pueden trazar rectas con cortan a la región factible con mayor ordenada cada vez.

**38. Página 104**

Definimos las variables:

$x \geq 0, x \rightarrow$ cantidad de dinero invertido en acciones de tipo *A*

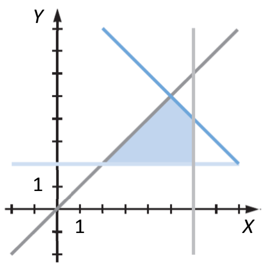
$y \geq 0, y \rightarrow$ cantidad de dinero invertido en acciones de tipo *B*

Maximizar $f(x,y) = 0,1x + 0,07y$

Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{l} x + y \leq 10 \\ x \geq y \\ 0 \leq x \leq 6 \\ y \geq 2 \end{array}\right\}$$

La región factible es:




Los vértices de la región factible son: $A(5,5), B(6,4), C(6,2), D(2,2)$.

Sustituimos en la función objetivo:

$f(x,y) = 0,1x + 0,07y$

$A(5,5) \rightarrow f(A) = 0,85$ millones de €

$B(6,4) \rightarrow f(B) = 0,88$ millones de € $\rightarrow$ Máximo

$C(6,2) \rightarrow f(C) = 0,74$ millones de €

$D(2,2) \rightarrow f(D) = 0,34$ millones de €

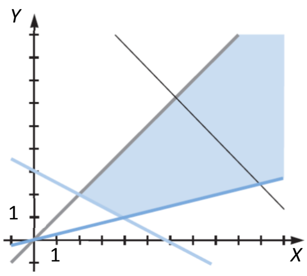
Invirtiendo 6 millones de € en acciones de tipo *A* y 4 en acciones de tipo *B* obtendrá 0,88 millones de € de beneficio.

**39. Página 104**

Definimos las variables:

$x \geq 0, x \rightarrow$ cantidad de aceite *C* $\quad$ $y \geq 0, y \rightarrow$ cantidad de aceite *D*

$$\left.\begin{array}{l} x+y \geq 6 \\ \dfrac{y}{2} \leq x \leq 2y \\ 2{,}5x+1{,}25y=31{,}25 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\}$$




Los vértices de la región factible son: $A\left(\frac{25}{4},\frac{25}{2}\right), B(10,5), C(4,2), D(2,4)$ .

La cantidad mínima de aceite tipo *D* es 5 litros y la máxima es 12,5 litros, ya que deben pertenecer a la recta $2{,}5x+1{,}25y=31{,}25$ .

**40. Página 105**

| | Taller *A* | Taller *B* | Total |
|---|---|---|---|
| Carrera | 3 | 2 | 350 |
| Montaña | 2 | 5 | 500 |
| Coste | 900 | 1 200 | |

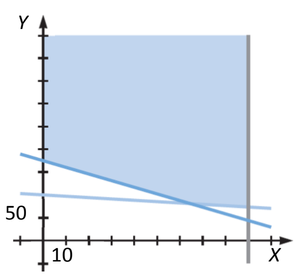
Definimos las variables:

$x \geq 0, x \rightarrow$ número de días taller *A* $\quad$ $y \geq 0, y \rightarrow$ número de días taller *B*

Miminizar $f(x,y)=900x+1200y$

Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+2y \geq 350 \\ 2x+5y \geq 500 \\ 0 \leq x \leq 90 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$




Los vértices de la región factible son: $A(0,175), B(90,64), C\left(\frac{750}{11},\frac{800}{11}\right)$.

Sustituimos en la función objetivo:

$f(x,y)=900x+1200y$

$A(0,175)\to 210000$ $B(90,64)\to 157800$ $C\left(\frac{750}{11},\frac{800}{11}\right)\to 148636,36\to$ Mínimo

**41. Página 105**

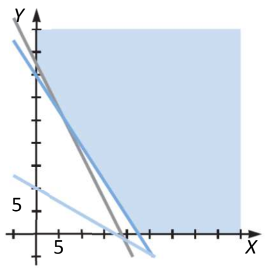
Definimos las variables:

$x\geq 0, x\to$ número de lotes de Bulbshop $y\geq 0, y\to$ número de lotes de Light

Miminizar $f(x,y)=405x+210y$

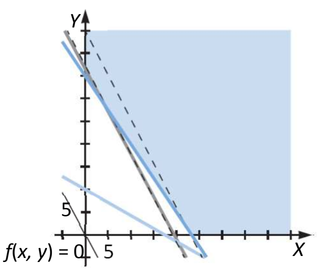
Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{l}20x+10y\geq 375\\15x+10y\geq 350\\12x+20y\geq 200\\x\geq 0, y\geq 0\end{array}\right\}$$




Los vértices de la región factible son: $A\left(0,\frac{75}{2}\right),B\left(5,\frac{55}{2}\right),C\left(\frac{70}{3},0\right)$

Trazando rectas paralelas a la función objetivo, tenemos que se obtiene un mínimo en el punto *B*.




Observa que para tomar la decisión la condición de las bombillas halógenas no se ha utilizado, pues las otras restringen mucho más.

## ACTIVIDADES FINALES

**42. Página 106**

a) $\frac{4-2x}{5}+\frac{x-2}{6}\leq -6\to\frac{24-12x+5x-10}{30}\leq\frac{-180}{30}\to 14-7x\leq -180\to\ x\geq\frac{194}{7}$

b) $\frac{3(2-x)}{2}-x\leq\frac{16}{5}-\frac{x+1}{5}\to\frac{30-15x-10x}{10}\leq\frac{32-2x-2}{10}\to 30-25x\leq 30-2x\to\ x\geq 0$

c) $8x-6+4x^2-3x>9-12x+4x^2\to 17x>15\to x>\frac{15}{17}$

**43. Página 106**

a) $x^2-3x-4\le 0 \to \frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{3\pm 5}{2}=\begin{cases}x_1=4\\ x_2=-1\end{cases}$

Los intervalos serían: $(-\infty,-1),(-1,4)$ y $(4,\infty)$ .

Para $(-\infty,-1)$ : si $x=-2\to 4+6-4>0$ . No es solución.

Para $(-1,4)$ : si $x=0\to -4\le 0$ . Es solución.

Para $(4,\infty)$ : si $x=6\to 36-18-4>0$ . No es solución.

$x=-1\to 1-3-4\le 0\to x=-1$ es solución.

$x=4\to 16-12-4\le 0\to x=4$ es solución.

La solución es: $[-1,4]$.

b) $-x^2+5x+14\le 0\to \frac{-5\pm\sqrt{25+56}}{-2}=\frac{-5\pm 9}{-2}\to\begin{cases}x_1=-2\\ x_2=7\end{cases}$

Los intervalos serían: $(-\infty,-2),(-2,7)$ y $(7,\infty)$.

Para $(-\infty,-2)$ : si $x=-3\to -9-15+14\le 0$ . Es solución.

Para $(-2,7)$ : si $x=0\to 14>0$ . No es solución.

Para $(7,\infty)$ : si $x=8\to -64+40+14\le 0$ . Es solución.

$x=-2\to -4-10-14\le 0\to x=-2$ es solución.

$x=7\to -49+35+14\le 0\to x=7$ es solución.

La solución es: $(-\infty,-2]\cup[7,\infty)$ .

c) $2x^2-3x+1>0\to \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\frac{3\pm 1}{4}\to\begin{cases}x_1=1\\ x_2=\frac{1}{2}\end{cases}$

Los intervalos serían: $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},1\right),(1,\infty)$.

Para $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ : si $x=0\to 1>0$ . Es solución.

Para $\left(\frac{1}{2},1\right)$ : si $x=\frac{3}{4}\to\frac{18}{16}-\frac{9}{4}+1<0$ . No es solución.

Para $(1,\infty)$ : si $x=2\to 8-6+1>0$ . Es solución.

$x=\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+1=0\to x=\frac{1}{2}$ no es solución.

$x=1\to 2-3+1=0\to x=1$ no es solución.

La solución es: $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup(1,\infty)$ .

d) $x^2+\frac{3}{2}x-1\geq 0\rightarrow\dfrac{-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+4}}{2}=\dfrac{-3\pm 5}{4}\rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}\\ x_2=-2\end{cases}$

Los intervalos serían: $(-\infty,-2),\left(-2,\frac{1}{2}\right)$ y $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$.

Para $(-\infty,-2)$: si $x=-3\rightarrow 9-\frac{9}{2}-1\geq 0$. Es solución.

Para $\left(-2,\frac{1}{2}\right)$: si $x=0\rightarrow -1<0$. No es solución.

Para $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$: si $x=1\rightarrow 1+\frac{3}{2}-1\geq 0$. Es solución.

$x=-2\rightarrow 4-3-1\geq 0\rightarrow x=-2$ es solución.

$x=\frac{1}{2}\rightarrow\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-1\geq 0\rightarrow x=\frac{1}{2}$ es solución.

La solución es: $(-\infty,-2]\cup\left[\frac{1}{2},\infty\right)$.

**44. Página 106**

a)

$$\left.\begin{array}{l}2x+3(x-1)<x+1\\ 2(x+3)>x+2\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}4x<4\rightarrow x<1\\ x>-4\end{array}\right\}$$

Por tanto, la solución es $(-4,1)$.

b)

$$\left.\begin{array}{l}\frac{3(2-x)}{2}-x<\frac{16}{5}-\frac{x+1}{5}\\ \frac{x+4}{3}-\frac{x-5}{6}>3-\frac{2x-3}{18}\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{30-15x-10x}{10}<\frac{32-2x-2}{10}\\ \frac{6x+24-3x+15}{18}>\frac{54-2x+3}{18}\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}0<23x\rightarrow x>0\\ 5x>18\rightarrow x>\frac{18}{5}\end{array}\right\}$$

Por tanto, la solución es $\left(\frac{18}{5},\infty\right)$.

c)

$$\left.\begin{array}{l}3x-\frac{x}{2}+5<0\\ \frac{1}{2}(x+1)+\frac{x-1}{3}-\frac{x}{5}\geq 0\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{5x}{2}<-\frac{10}{2}\\ \frac{15x+15+10x-10-6x}{30}\geq 0\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x<-2\\ 19x\geq -5\rightarrow x\geq\frac{-5}{19}\end{array}\right\}$$

Por tanto, no tiene solución.

d)

$$\left.\begin{array}{l}x^2-x-2>0\\ 12+x-x^2\geq 0\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\begin{cases}x_1=2\\ x_2=-1\end{cases}\\ \frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{-2}=\begin{cases}x_1=-3\\ x_2=4\end{cases}\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}(-\infty,-1)\cup(2,\infty)\\ [-3,4]\end{array}\right\}$$

Por tanto, la solución es $(2,4]$.

**45. Página 106**

a) $P(1, -2)$; $3x - y \geq 2$

El punto (1, –2) pertenece al semiplano determinado por $3x - y \geq 2$ porque $3 + 2 \geq 2$.

b) $P(-1, 3)$; $x + 2y \leq 3$

El punto (–1, 3) no pertenece al semiplano determinado por $x + 2y \leq 3$ porque $-1 + 6 > 3$.

c) $P(0, 5)$; $-4x + y \geq 5$

El punto (0, 5) pertenece al semiplano determinado por $-4x + y \geq 5$ porque $5 \geq 5$.

d) $P(1, 3)$; $x - 3y + 8 < 0$

El punto (1, 3) no pertenece al semiplano determinado por $x - 3y + 8 < 0$ porque $1 - 9 + 8 = 0$.

e) $P\left(\frac{1}{2}, 1\right)$; $-2x + 3y > 0$

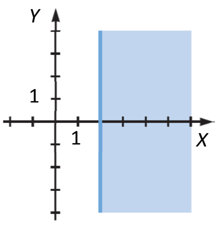
El punto (1/2, 1) pertenece al semiplano determinado por $-2x + 3y > 0$ porque $-1 + 3 > 0$.

f) $P\left(2, -\frac{1}{3}\right)$; $x + 3y < \frac{7}{3}$

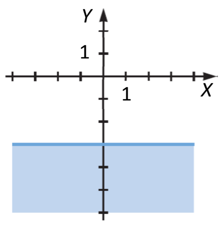
El punto (2, –1/3) pertenece al semiplano determinado por $x + 3y < \frac{7}{3}$ porque $2 - 1 < \frac{7}{3}$.

**46. Página 106**

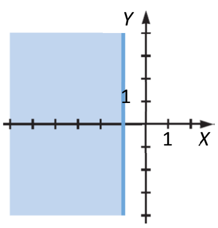
a)



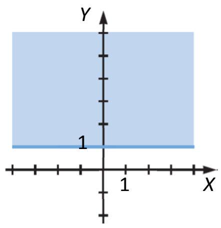

d)



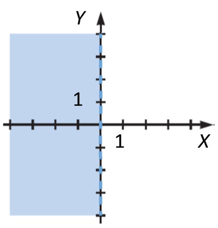

b)



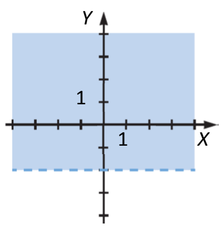

e)




c)

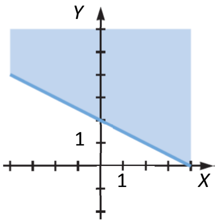



f)

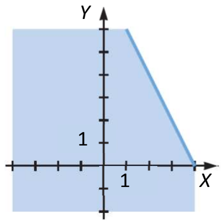


**47. Página 106**

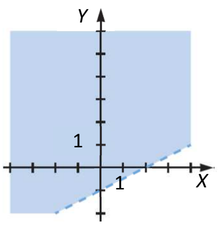
a)



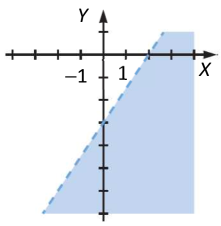

c)




b)



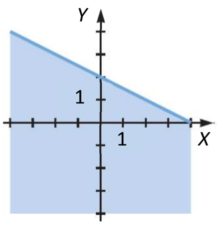

d)



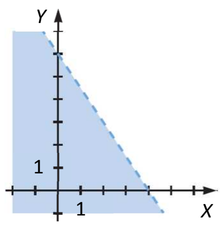

**48. Página 106**

Las soluciones son las siguientes regiones del plano.

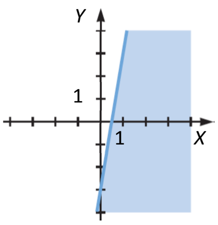
a)



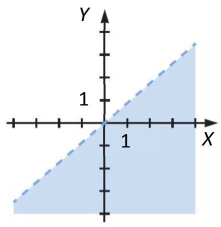

c)




b)




d)




**49. Página 106**

a) Recta que pasa por $(4,0)$ y $(0,6) \rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 6$ . La región de puntos no contiene el punto $(0,0)$ , por lo que la inecuación es $y \geq -\frac{3}{2}x + 6$

b) Recta que pasa por $(0,0)$ y $(4,1) \rightarrow y = \frac{1}{4}x$ . La región de puntos contiene el punto $(0,-1)$ , por lo que la inecuación es $x \geq 4y$

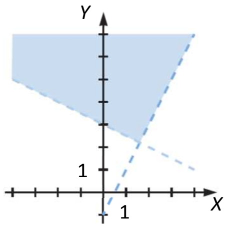
c) Recta que pasa por $(0,2)$ y $(-4,0) \rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$ . La región de puntos contiene el punto $(0,0)$ , por lo que la inecuación es $2y \leq x + 4$

d) Recta que pasa por $(1,1)$ y $(0,-1) \rightarrow y = 2x - 1$. La región de puntos no contiene el punto $(0,0)$ , por lo que la inecuación es $y \leq 2x - 1$

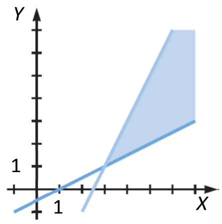
**50. Página 106**

Las soluciones son las siguientes regiones del plano.

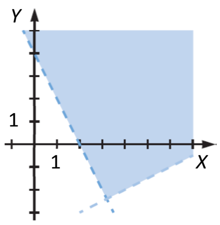
a)



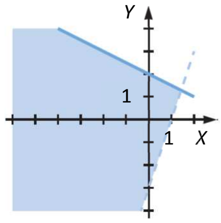

c)




b)



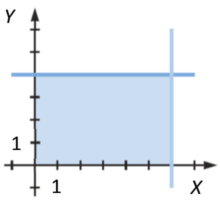

d)



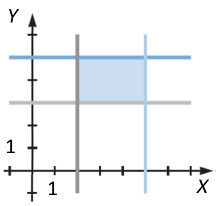

**51. Página 106**

Las soluciones son las siguientes regiones del plano.

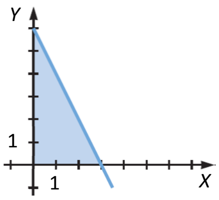
a)




b)

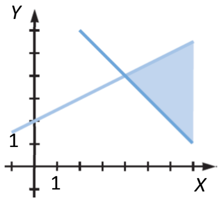



c)

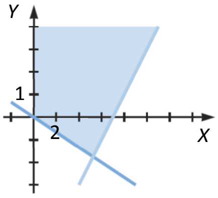



d) No tiene solución, porque las regiones solución de cada una de las rectas no se intersecan en el segundo cuadrante.

e)

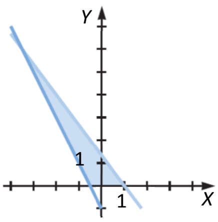



f)



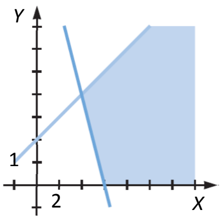

**52. Página 106**

a) La región es:



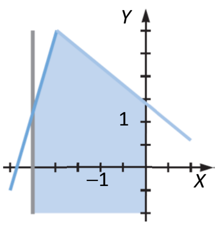

Los vértices son $A(-7,6), B(2,0), C(-1,0)$. Está acotada.

b) La región es:



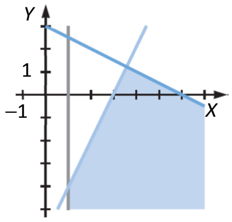

Los vértices son $A(4,4), B(6,0)$. No está acotada.

c) La región es:




Los vértices son $A(-2,3), B\left(-\frac{5}{2},\frac{5}{4}\right), C\left(0,\frac{7}{5}\right)$. No está acotada.

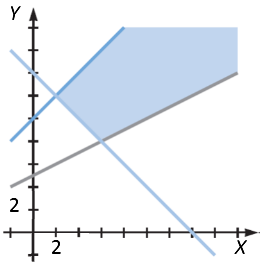
d) La región es:




Los vértices son $A\left(\frac{18}{5},\frac{6}{5}\right), B(1,-4)$ . No está acotada.

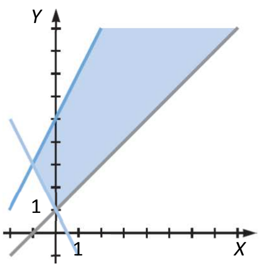
**53. Página 107**

a) La región es:



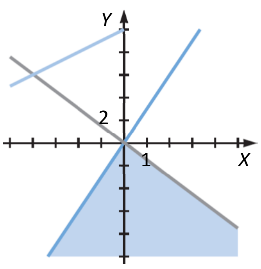

La región no está acotada, los vértices son $A(2,12), B(6,8)$ .

b) La región es:



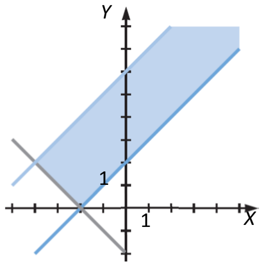

La región no está acotada, los vértices son $A(-1,3), B(0,1)$ .

c) La región es:




La región no está acotada, el vértice es $A(0,0)$ .

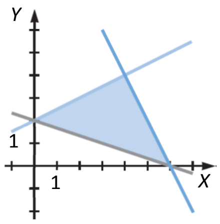
d) La región es:




La región no está acotada, los vértices son $A(-4,2), B(-2,0)$.

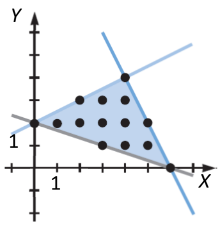
**54. Página 107**

a)



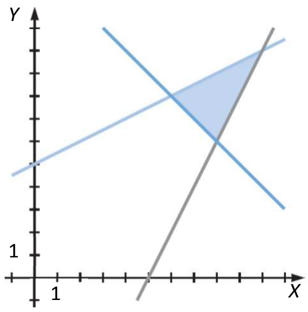

b) Los vértices son $A(4,4), B(0,2), C(6,0)$.

c) Las soluciones enteras son las marcadas con puntos en la siguiente imagen:



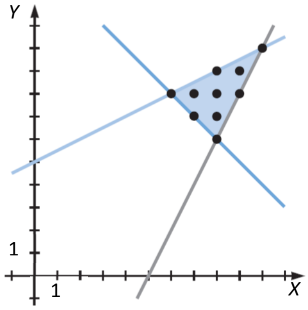

**55. Página 107**

a)



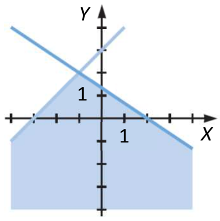

b) Los vértices son $A(6,8), B(8,6), C(10,10)$.

c) Las soluciones enteras son las marcadas con puntos en la siguiente imagen:




**56. Página 107**

$$2x+my-4=0 \xrightarrow{A(-1,2)} -2+2m-4=0 \rightarrow m=3 \rightarrow 2x+3y-4\leq 0$$




**57. Página 107**

a) Las ecuaciones de las rectas son $x+y=6, x+2y=10$. El sistema de inecuaciones que da lugar a la región es:

$$\left.\begin{array}{l} x+y\leq 6 \\ x+2y\leq 10 \\ x\geq 0, y\geq 0 \end{array}\right\}$$

b) Las ecuaciones de las rectas son $x=4, x+4y=12, 2x+3y=12, y=0$. El sistema de inecuaciones que da lugar a la región es:

$$\left.\begin{array}{l} x+4y\leq 12 \\ 2x+3y\leq 12 \\ 0\leq x\leq 4 \\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

c) Las ecuaciones de las rectas son $x=3, 3x=-2y, x-2y=6, y=2$. El sistema de inecuaciones que da lugar a la región es:

$$\left.\begin{array}{l} 3x\geq -2y \\ x-2y\leq 6 \\ 0\leq x\leq 3 \\ 2\geq y \end{array}\right\}$$

d) Las ecuaciones de las rectas son $3x+y=9, x+2y=10$. El sistema de inecuaciones que da lugar a la región es:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+y\geq 9 \\ x+2y\geq 10 \end{array}\right\}$$

**58. Página 107**

Las rectas que unen los vértices son:

$AB: -x + y = 1$
$BC: 4x - y = 14$
$CA: x + y = 1$

El sistema de ecuaciones será:

$$\left.\begin{array}{l} -x + y \leq 1 \\ 4x - y \leq 14 \\ x + y \geq 1 \end{array}\right\}$$

**59. Página 107**

La región factible está acotada, y tiene como vértices $A(0,0), B(4,0), C(2,3), D(0,5)$.

a) $f(x,y) = 3x + y$, como $f(A) = 0, f(B) = 12, f(C) = 9, f(D) = 5$, el máximo se alcanza en el punto *B* y vale 12.

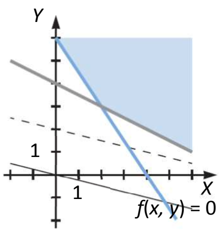
b) $f(x,y) = x + 2y - 1$, como $f(A) = -1, f(B) = 3, f(C) = 7, f(D) = 9$, el máximo se alcanza en el punto *D* y vale 9.

c) $f(x,y) = 3x + 2y - 1$, como $f(A) = -1, f(B) = 11, f(C) = 11, f(D) = 9$, el máximo se alcanza en el punto *B* y *C*, y en todos los puntos del segmento *BC* y vale 11.

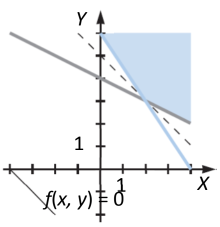
**60. Página 107**

La región factible no está acotada y tiene como vértices $A(8,0), B(2,3), C(0,6)$ .

a) Al trazar rectas paralelas a la función objetivo $f(x,y) = x + 4y$ que pasen por los vértices, se observa que el mínimo se alcanza en *A*(8, 0) y vale 8.




b) Al trazar rectas paralelas a la función objetivo $f(x,y) = x + y + 4$ que pasen por los vértices, se observa que el mínimo se alcanza en *B*(2,3) y vale 9.



**61. Página 107**

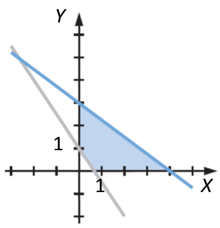
La región factible está acotada y tiene como vértices $A\left(\frac{3}{2},\frac{3}{4}\right),B\left(3,\frac{3}{2}\right),C(3,4),D(0,4),E(0,3)$.

a) Sustituyendo los vértices en la función objetivo, obtenemos que $f(A)=\frac{15}{4},f(B)=\frac{15}{2},f(C)=10,f(D)=4,$ $f(E)=3$, por lo que el máximo se alcanza en *C* y vale 10 y el mínimo se alcanza en *E* y vale 3.

b) Sustituyendo los vértices en la función objetivo, obtenemos que $f(A)=3,f(B)=9,f(C)=14,f(D)=5,f(E)=3$, por lo que el máximo se alcanza en *C* y vale 14, y el mínimo se alcanza en *A* y *E*, y por tanto en todos los puntos del segmento *AE* y vale 3.

**62. Página 107**

La región factible es:



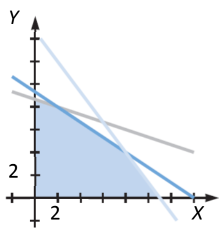

$A(0,3),B(0,1),C\left(\frac{2}{3},0\right),D(4,0)$ son los vértices.

$f(x,y)=3x+2y$
$f(A)=6 \quad f(B)=2 \quad f(C)=2 \quad f(D)=12$

El mínimo está en los puntos *B, C* y en la recta *BC*.

**63. Página 107**

La región factible es:




Los vértices de la región factible son: $A\left(0,\frac{26}{3}\right),B(2,8),C(8,4),D(11,0),E(0,0)$.

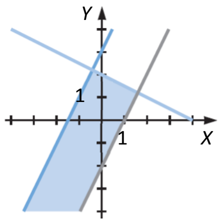
Sustituimos en la función objetivo: $f(x,y)=x+y$

$A\left(0,\frac{26}{3}\right)\rightarrow f(A)=\frac{26}{3}$
$B(2,8)\rightarrow f(B)=10$
$C(8,4)\rightarrow f(C)=12\rightarrow$ Máximo
$D(11,0)\rightarrow f(D)=11$
$E(0,0)\rightarrow f(E)=0$

En el punto (8, 4) se alcanza el máximo.

**64. Página 107**

La región factible es:



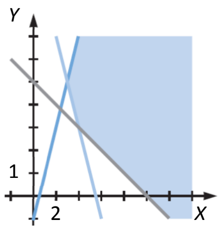

$A\left(-\frac{2}{5},\frac{11}{5}\right), B\left(\frac{8}{5},\frac{6}{5}\right)$ son los vértices de la región factible.

$f(x,y)=4y-x$

$A\left(-\frac{2}{5},\frac{11}{5}\right)\to f(A)=\frac{44}{5}+\frac{2}{5}=\frac{46}{5}\to \text{Máximo}$ $\qquad B\left(\frac{8}{5},\frac{6}{5}\right)\to f(B)=\frac{24}{5}-\frac{8}{5}=\frac{16}{5}$

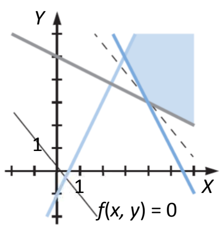
**65. Página 107**

a) La región factible es:



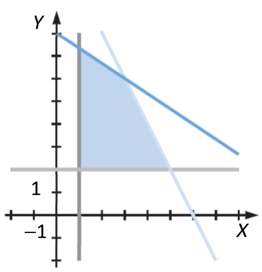

b) La región no está acotada y los vértices de la región factible son: $A(3,5), B(4,3)$.

Gráficamente trazando rectas paralelas a la función objetivo obtenemos que el mínimo está en el punto $B(4,3)$ y su valor es $f(B)=24+15-\frac{1}{2}=\frac{77}{2}$.




**66. Página 108**

La región factible es:

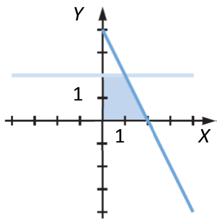


Los vértices de la región son: $A(1,2), B(5,2), C(3,6), D\left(1,\frac{22}{3}\right)$.

$f(x,y) = 3x + 2y$
$A(1,2) \rightarrow f(A) = 3 + 4 = 7$
$B(5,2) \rightarrow f(B) = 15 + 4 = 19$
$C(3,6) \rightarrow f(C) = 9 + 12 = 21 \rightarrow$ Máximo
$D\left(1,\frac{22}{3}\right) \rightarrow f(D) = 3 + \frac{44}{3} = \frac{53}{3}$

**67. Página 108**

La región factible es:

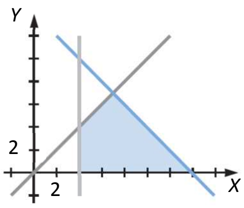



Los vértices de la región son: $A(0,2), B(1,2), C(2,0), D(0,0)$.

$f(x,y) = y + x$
$A(0,2) \rightarrow f(A) = 2$
$B(1,2) \rightarrow f(B) = 3 \rightarrow$ Máximo
$C(2,0) \rightarrow f(C) = 2$
$D(0,0) \rightarrow f(D) = 0$

**68. Página 108**

La región factible es:

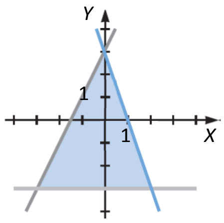



Los vértices de la región son: $A(7,7), B(14,0), C(4,0), D(4,4)$.

$f(x,y) = 2x + 3y$
$A(7,7) \rightarrow f(A) = 35 \rightarrow$ Máximo
$B(14,0) \rightarrow f(B) = 28$
$C(4,0) \rightarrow f(C) = 8$
$D(4,4) \rightarrow f(D) = 20$

**69. Página 108**

La región factible es:

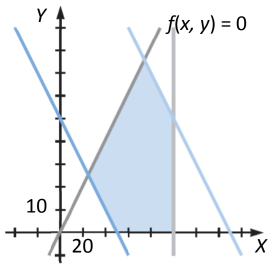



Los vértices de la región factible son $A(0,3), B(2,-3), C(-3,-3)$.

$f(x,y) = 3x - y$
$A(0,3) \to f(A) = -3$
$B(2,-3) \to f(B) = 9 \to$ Máximo
$C(-3,-3) \to f(C) = -6 \to$ Mínimo

**70. Página 108**

La región factible es:

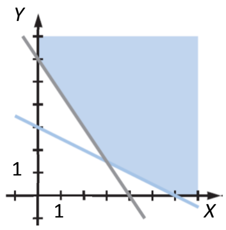



Los vértices de la región factible son $A(25,25), B(50,0), C(100,0), D(100,50), E(75,75)$.

$f(x,y) = 3x + 2y + 1$
$A(25,25) \to f(A) = 126$
$B(50,0) \to f(B) = 151$
$C(100,0) \to f(C) = 301$
$D(100,50) \to f(D) = 401 \to$ Máximo
$E(75,75) \to f(E) = 376$

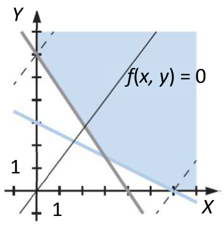
**71. Página 108**

La región factible es:



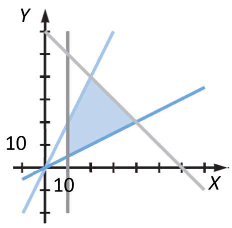

Los vértices de la región factible son $A(0,6), B\left(3,\frac{3}{2}\right), C(6,0)$.

La región no está acotada, trazando rectas paralelas a $4x-3y=0$ vemos que siempre se puede trazar una recta paralela por encima de la anterior que corte la región factible; por tanto, no es posible maximizar o minimizar la función objetivo:




**72. Página 108**

La región factible es:

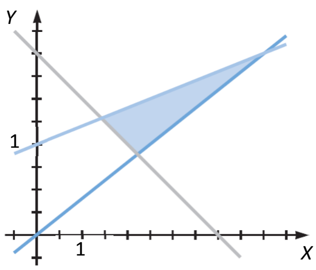



Los vértices son $A(10,5), B(40,20), C(20,40), D(10,20)$.

$f(x,y)=4x+9y+3$
$A(10,5)\rightarrow f(A)=88\rightarrow \text{Mínimo}$
$B(40,20)\rightarrow f(B)=343$
$C(20,40)\rightarrow f(C)=443\rightarrow \text{Máximo}$
$D(10,20)\rightarrow f(D)=223$

**73. Página 108**

La región factible es:

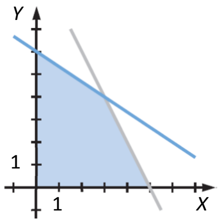



Los vértices de la región factible $A\left(\frac{10}{7},\frac{9}{7}\right), B\left(\frac{20}{9},\frac{8}{9}\right), C(5,2)$.

$f(x,y)=2x+8y-1$
$A\left(\frac{10}{7},\frac{9}{7}\right)\rightarrow f(A)=\frac{20}{7}+\frac{72}{7}-1=\frac{85}{7}$
$B\left(\frac{20}{9},\frac{8}{9}\right)\rightarrow f(B)=\frac{40}{9}+\frac{64}{9}-1=\frac{95}{9}\rightarrow \text{Mínimo}$
$C(5,2)\rightarrow f(C)=25\rightarrow \text{Máximo}$

**74. Página 108**

La región factible es:




La región factible tiene como vértices $A(0,0), B(5,0), C(3,4), D(0,6)$.

$f(x,y) = ax + by$

$A(0,0) \to f(A) = 0 \qquad B(5,0) \to f(B) = 5a \qquad C(3,4) \to f(C) = 3a + 4b \qquad D(0,6) \to f(D) = 6b$

Situamos el máximo en *C.*

Los siguientes casos no se pueden producir:

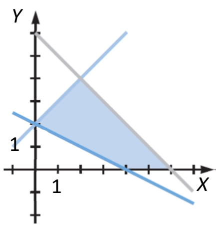
- *a* y *b* no pueden ser nulos, ya que no obtendríamos una función de la forma $ax + by$.
- *a* y *b* no pueden tener signos opuestos porque la función objetivo no alcanzaría su máximo en *C*.
- *a* y *b* no pueden ser negativos, pues no se cumpliría la primera de las restricciones.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} 3a+4b \geq 0 \\ 3a+4b \geq 5a \\ 3a+4b \geq 6b \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 3a \geq -4b \\ 4b \geq 2a \\ 3a \geq 2b \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 2b \geq a \\ 3a \geq 2b \end{array}\right\} \leftarrow 3a \geq 2b \geq a$$

**75. Página 108**

a) La región factible es:




Los vértices de la región factible son $A(2,4), B(0,2), C(4,0), D(6,0)$.

$f(x,y) = 2x + my + 5$

$A(2,4) \to f(A) = 9 + 4m$

$B(0,2) \to f(B) = 2m + 5$

$C(4,0) \to f(C) = 13$

$D(6,0) \to f(D) = 17$

Para que el mínimo no sea único tiene que darse uno de estos casos:

- $9 + 4m = 2m + 5 \to 2m = -4 \to m = -2$. Este resultado no es válido porque *m* tiene que ser natural.
- $2m + 5 = 13 \to m = 4$; por tanto, *B* y *C* son dos mínimos con coordenadas enteras (comprobamos que es mínimo viendo que 9 + 4*m* es mayor que 13, esto sería 9 + 4 · 4 = 25).
- $9 + 4m = 13 \to m = 1$. Este resultado no es válido porque $2m + 5 = 7 < 13$

b) El mínimo se encuentra en la recta *BC* y vale 13 en toda la recta.

c) El máximo es el punto *A*, $f(A) = 9 + 16 = 25$.

**76. Página 108**

La región factible está definida por las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} x-2y\le -2 \\ x+y\le 10 \\ x-y\ge -2 \end{array}\right\}$$

Como *a*, *b* y *c* son naturales: $a,b,c\ge 0$

$$\left.\begin{array}{l} f(3,4)=3a-4b-c \\ f(4,4)=4a-4b-c \end{array}\right\}\rightarrow f(3,4)<f(4,4)$$

**77. Página 108**

a) Definimos las variables:

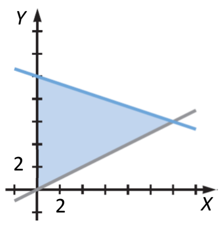
$x\ge 0, x\rightarrow$ número de libros $\qquad$ $y\ge 0, y\rightarrow$ número de juegos

| | Libros | Juegos | Total |
|---|---|---|---|
| Coste (€) | 8 | 24 | 240 |

El sistema de inecuaciones que hay que resolver es:

$$\left.\begin{array}{l} 8x+24y\le 240 \\ x\le 2y \\ x\ge 0, y\ge 0 \end{array}\right\}$$

La región factible está acotada y sus vértices son $A(0,0), B(12,6), C(0,10)$.




b) Los vértices pertenecen a la región factible porque las inecuaciones incluyen la igualdad. El punto *B* representa 12 libros y 6 juegos, por lo que el ganador sí los podrá comprar.

c) Sí podrá comprar 7 libros y 7 juegos, porque el punto (7, 7) pertenece a la región factible. El coste será 224 € y le sobrarán 16 €.

**78. Página 108**

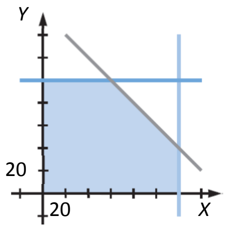
| | Empresa A | Empresa B | Total |
|---|---|---|---|
| Paquetes | 1 | 1 | 160 |
| Folletos/bolsa | 120 | 100 | |
| Beneficio | 0,1 | 0,15 | |

Definimos las variables:

$x \geq 0, x \rightarrow$ número de paquetes de la empresa *A* $y \geq 0, y \rightarrow$ número de paquetes de la empresa *B*

Maximizar $f(x,y) = 0{,}10x + 0{,}15y$

$$\left.\begin{array}{l} x + y \leq 160 \\ 0 \leq x \leq 120 \\ 0 \leq y \leq 100 \end{array}\right\}$$




Los vértices de la región factible son: $A(0,100), B(60,100), C(120,40), D(120,0), E(0,0)$.

Sustituimos en la función objetivo:

$f(x,y) = 0{,}10x + 0{,}15y$
$A(0,100) \rightarrow 15$
$B(60,100) \rightarrow 6 + 15 = 21 \rightarrow \text{Máximo}$
$C(120,40) \rightarrow 12 + 6 = 18$
$D(120,0) \rightarrow 12$
$E(0,0) \rightarrow 0$

Le conviene repartir 60 paquetes de la empresa *A* y 100 de la *B*, obteniendo un beneficio de 21 €.

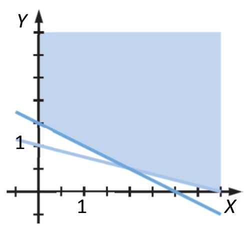
**79. Página 109**

$x \geq 0, x \rightarrow$ cantidad de alimentos *A* $y \geq 0, y \rightarrow$ cantidad de alimentos *B*

Minimizar $f(x,y) = x + 3y$

$$\left.\begin{array}{l} 1000x + 2000y \geq 3000 \\ 25x + 100y \geq 100 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\}$$

La región factible es:




Los vértices de la región factible son $A\left(0,\frac{3}{2}\right), B\left(2,\frac{1}{2}\right), C(4,0)$.

$f(x,y) = x + 3y$

$A\left(0,\frac{3}{2}\right) \rightarrow 4{,}5$ $B\left(2,\frac{1}{2}\right) \rightarrow 2 + \frac{3}{2} = 3{,}5 \rightarrow \text{Mínimo}$ $C(4,0) \rightarrow 4$

El coste mínimo es de 3,50 €.

**80. Página 109**

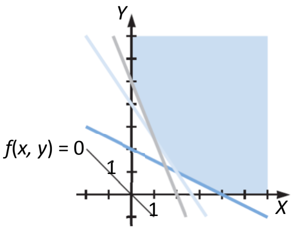
$x \geq 0, x \rightarrow$ número de días que debe reciclar el centro de producción *A*
$y \geq 0, y \rightarrow$ número de días que debe reciclar el centro de producción *B*

| | Centro *A* | Centro *B* | Total |
|---|---|---|---|
| Radiación alta | 1 | 2 | 80 |
| Radiación media | 3 | 2 | 160 |
| Radiación baja | 5 | 2 | 200 |
| Coste | 20 000 | 20 000 | |

Minimizar $f(x, y) = 20000x + 20000y$

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y \geq 80 \\ 3x + 2y \geq 160 \\ 5x + 2y \geq 200 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\}$$

La región factible es:




Los vértices de la región factible son $A(0,100), B(20,50), C(40,20), D(80,0)$. Trazando paralelas a la función objetivo que pasen por los vértices, observamos que el mínimo se alcanza en *C*, y vale 1 200 000 €. Para que el coste del reciclaje sea el menor posible, el primer centro debe trabajar 40 días y el segundo 20 días.

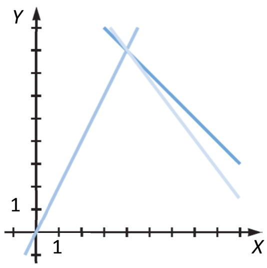
**81. Página 109**

$x \geq 0, x \rightarrow$ número de microbuses *A* $\qquad$ $y \geq 0, y \rightarrow$ número de microbuses *B*

| | Microbús A | Microbús B | Total |
|---|---|---|---|
| Plazas | 16 | 12 | 160 |
| Coste | 110 | 96 | |

Minimizar $f(x, y) = 110x + 96y$

$$\left.\begin{array}{l} 16x + 12y \geq 160 \\ x + y \leq 12 \\ x \leq \dfrac{y}{2} \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\}$$




El único valor que cumple las restricciones es el punto *A*(4, 8), 4 microbuses de 16 plazas y 8 de 12 plazas. El coste será 1 208 €.

**82. Página 109**

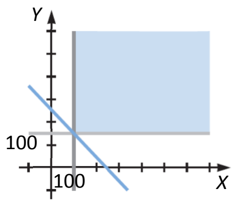
$x \geq 0, x \rightarrow$ número de botellas A $\qquad$ $y \geq 0, y \rightarrow$ número de botellas B

| | Botellas A | Botellas B | Total |
|---|---|---|---|
| Botellas | 1 | 1 | 250 |
| Coste | 0,40 € | 0,60 € | |

Minimizar $f(x,y) = 0{,}4x + 0{,}6y$

$$\left.\begin{array}{l} x+y \geq 250 \\ x \geq 100 \\ y \geq 150 \end{array}\right\}$$

La región factible es:




La región no está acotada, $A(100,150)$ es un vértice de la región. Trazando rectas paralelas de la función objetivo, vemos que el mínimo es el vértice $A(100,150)$ y, por tanto, el mínimo coste es 130 € con 100 botellas tipo A y 150 tipo B.

**83. Página 109**

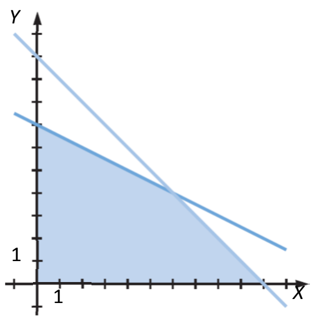
$x \geq 0, x \rightarrow$ joyas *A* $\qquad$ $y \geq 0, y \rightarrow$ joyas *B*

| | Joyas A | Joyas B | Total |
|---|---|---|---|
| Oro | 1 | 2 | 70 |
| Plata | 2 | 2 | 100 |
| Coste | 50 € | 80 € | |

Maximizar $f(x,y) = 50x + 80y$

$$\left.\begin{array}{l} x+2y \leq 70 \\ 2x+2y \leq 100 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\}$$

La región factible es:




Los vértices de la región son $A(0,35), B(30,20), C(50,0), D(0,0)$.

$f(x,y) = 50x + 80y$

$A(0,35) \rightarrow f(A) = 2800$

$B(30,20) \rightarrow f(B) = 3100 \rightarrow \textit{Máximo}$

$C(50,0) \rightarrow f(C) = 2500$

$D(0,0) \rightarrow f(D) = 0$

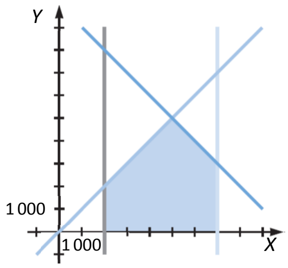
El beneficio máximo se obtiene con 30 joyas tipo *A* y 20 tipo *B*, obteniendo un beneficio de 3 100 €.

**84. Página 109**

a) $x \geq 0, x \rightarrow$ inversión *A* $\qquad$ $y \geq 0, y \rightarrow$ inversión *B*

$$\left.\begin{array}{l} x+y \leq 10000 \\ 2000 \leq x \leq 7000 \\ x \geq y \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

La región factible es:




Los vértices de la región son $A(5000,5000), B(2000,2000), C(2000,0), D(7000,0), E(7000,3000)$.

Las posibilidades de inversión según las condiciones planteadas vienen determinadas por el área marcada.

b) La función objetivo en este caso sería:

$$f(x,y) = 0{,}09x + 0{,}12y$$
$$A(5000,5000) \rightarrow f(A) = 1050 \rightarrow \text{Máximo}$$
$$B(2000,2000) \rightarrow f(B) = 420$$
$$C(2000,0) \rightarrow f(C) = 180$$
$$D(7000,0) \rightarrow f(D) = 630$$
$$E(7000,3000) \rightarrow f(B) = 990$$

Debería invertir 5 000 € en cada tipo de inversiones para optimar el rendimiento global. De esta manera el rendimiento serán 1 050 €.

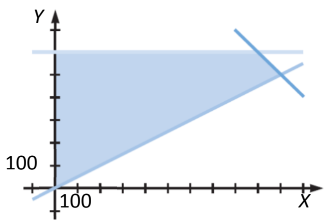
**85. Página 109**

$x \geq 0, x \rightarrow$ número de entradas de adulto $\qquad$ $y \geq 0, y \rightarrow$ número de entradas de niño

Maximizar $f(x,y) = 8x + 4{,}8y$

$$\left.\begin{array}{l} x+y \leq 1500 \\ 0 \leq x \leq 2y \\ 0 \leq y \leq 600 \end{array}\right\}$$

La región factible:




Está acotada por los vértices $A(0,0), B(1000,500), C(900,600), D(0,600)$.

$$f(x,y) = 8x + 4{,}8y$$
$$A(0,0) \rightarrow f(A) = 0$$
$$B(1000,500) \rightarrow f(B) = 10400 \rightarrow \textit{Máximo}$$
$$C(900,600) \rightarrow f(C) = 10080$$
$$D(0,600) \rightarrow f(D) = 2880$$

Para maximizar el dinero, se deben vender 1 000 entradas de adulto y 500 entradas de niño, obteniéndose 10 400 €.

**86. Página 109**

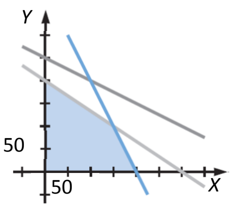
| | Lote A | Lote B | Total |
|---|---|---|---|
| **Cuadernos** | 2 | 3 | 600 |
| **Carpetas** | 1 | 2 | 500 |
| **Bolígrafos** | 2 | 1 | 400 |
| **Coste** | 7 | 10 | |

$x \geq 0, x \rightarrow$ número de lotes *A* $\qquad$ $y \geq 0, y \rightarrow$ número de lotes *B*

Maximizar $f(x,y) = 7x + 10y$

$$\left.\begin{array}{l} 2x+3y \leq 600 \\ x+2y \leq 500 \\ 2x+y \leq 400 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\}$$

La región factible es:




Los vértices de la región factible son: $A(0,0), B(200,0), C(150,100), D(0,200)$ .

Sustituimos en la función objetivo:

$f(x,y) = 7x + 10y$
$A(0,0) \rightarrow 0$
$B(200,0) \rightarrow 1400$
$C(150,100) \rightarrow 2050 \rightarrow$ Máximo
$D(0,200) \rightarrow 2000$
$E(0,0) \rightarrow 0$

La solución óptima son 150 lotes *A* y 100 lotes *B*, obteniendo 2 050 €.

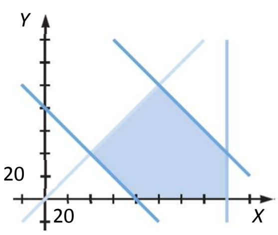
**87. Página 109**

$x \geq 0, x \rightarrow$ número de vuelos T1 $\qquad$ $y \geq 0, y \rightarrow$ número de vuelos T2

Minimizar $f(x,y) = 2800x + 2400y$

$$\left.\begin{array}{l} y \leq x \leq 160 \\ 80 \leq x+y \leq 200 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{array}\right\}$$

La región factible es:




Los vértices de la región factible son:
$A(100,100), B(160,40), C(160,0), D(80,0), E(40,40)$ .

Sustituimos en la función objetivo:

$f(x,y) = 2800x + 2400y$
$A(100,100) \rightarrow 520000$
$B(160,40) \rightarrow 544000$
$C(160,0) \rightarrow 448000$
$D(80,0) \rightarrow 224000$
$E(40,40) \rightarrow 208000 \rightarrow$ Mínimo

Para que el gasto de combustible sea mínimo cada avión debe hacer 40 vuelos y el gasto será de 208 000 €.

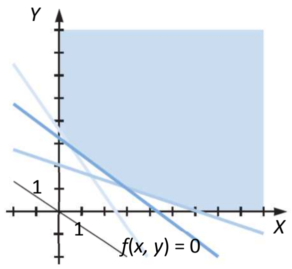
**88. Página 109**

$x \geq 0, x \rightarrow$ cantidad de alimentos *A*  $y \geq 0, y \rightarrow$ cantidad de alimentos *B*

Minimizar $f(x,y) = 2x + 3y$

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 2y \geq 7 \\ 6x + 8y \geq 26 \\ x + 3y \geq 6 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\}$$

La región factible es:




Los vértices de la región factible son $A\left(0,\frac{7}{2}\right), B\left(\frac{1}{3},3\right), C(3,1), D(6,0)$.

Trazando rectas paralelas a la función objetivo, vemos que se obtiene un mínimo en el punto *C.* Esto quiere decir que la combinación óptima es de 3 latas de la marca *A* y 1 de la marca *B*, siendo el coste de 9 €.

**89. Página 110**

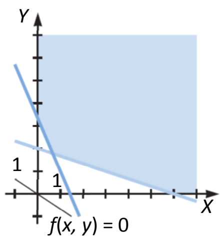
$x \geq 0, x \rightarrow$ pienso tipo I  $y \geq 0, y \rightarrow$ pienso tipo II

| | Tipo I | Tipo II | Total |
|---|---|---|---|
| **Sustancia *A*** | 2 | 6 | 24 |
| **Sustancia *B*** | 7 | 3 | 21 |
| **Coste** | 16 € | 20 € | |

Minimizar $f(x,y) = 16x + 20y$

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 6y \geq 24 \\ 7x + 3y \geq 21 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\}$$

La región factible es:




Los vértices de la región son $A(0,7), B\left(\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right), C(12,0)$. Trazando rectas paralelas de la función objetivo, vemos que alcanza el mínimo en el punto *B*, lo que supone 94 € de coste.

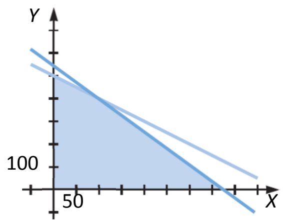
**90. Página 110**

$x \geq 0, x \rightarrow$ plazas tarifa preferente $\qquad$ $y \geq 0, y \rightarrow$ plazas tarifa turista

| | Preferente | Turista | Total |
|---|---|---|---|
| Peso | 50 | 35 | 18400 |
| Plazas | 1 | 1 | 500 |
| Coste | 80 € | 50 € | |

Maximizar $f(x,y) = 80x + 50y$

$$\left.\begin{array}{l} 50x + 35y \leq 18400 \\ x + y \leq 500 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\}$$




Los vértices de la región acotada son $A(0,500), B(60,440), C(368,0), D(0,0)$.

$f(x,y) = 80x + 50y$
$A(0,50) \rightarrow 25000$
$B(60,440) \rightarrow 26800$
$C(368,0) \rightarrow 29440 \rightarrow$ Máximo
$D(0,0) \rightarrow 0$

Se obtendrá el mayor beneficio si ofrecen 368 plazas en preferente.

**91. Página 110**

| | Surtido A | Surtido B | Total |
|---|---|---|---|
| Polvorones | 0,15 | 0,2 | 200 |
| Mantecados | 0,1 | 0,15 | 138 |
| Mazapanes | 0,08 | 0,1 | 100 |
| Beneficio | 3 | 4 | |

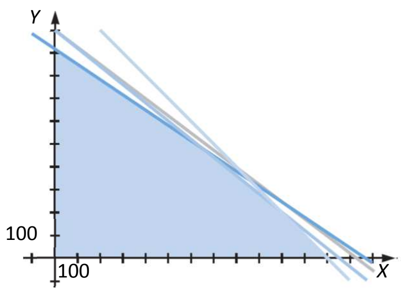
Definimos las variables:

$x \geq 0, x \rightarrow$ cajas de surtido $A$ $\qquad$ $y \geq 0, y \rightarrow$ cajas de surtido $B$

Maximizar $f(x,y) = 3x + 4y$

$$\left.\begin{array}{l} x + y \leq 1200 \\ 0{,}15x + 0{,}2y \leq 200 \\ 0{,}1x + 0{,}15y \leq 138 \\ 0{,}08x + 0{,}1y \leq 100 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\}$$

La región factible es:




Los vértices de la región acotada son $A(0,0), B(0,920), C(600,520), D(1000,200), E(1200,0)$.

$f(x,y) = 3x + 4y$
$A(0,0) \to 0$
$B(0,920) \to 3680$
$C(600,520) \to 3880 \to Máximo$
$D(1000,200) \to 3800$
$E(1200,0) \to 3600$

Para que el beneficio sea máximo, que será de 3 880 €, habría que hacer 600 surtidos tipo A y 520 surtidos tipo B.

**92. Página 110**

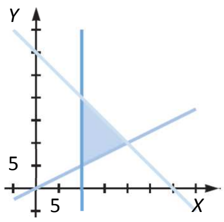
Definimos las variables:

$x \geq 0, x \to$ vagones dedicados a coches $\quad y \geq 0, y \to$ vagones dedicados a motocicletas

Maximizar $f(x,y) = 670x + 360y$

$$\left.\begin{array}{l} x + y \leq 30 \\ x \geq 10 \\ y \geq \dfrac{x}{2} \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\}$$

La región factible es:




Los vértices de la región factible son: $A(10,20), B(20,10), C(10,5)$.

Sustituimos en la función objetivo:

$f(x,y) = 670x + 360y$
$A(10,20) \to 13900$
$B(20,10) \to 17000 \to \text{Máximo}$
$C(10,5) \to 8500$

Debe haber 20 vagones dedicados a coches y 10 a motocicletas.

**93. Página 110**

| | $E_1$ | $E_2$ | Total |
|---|---|---|---|
| $I_1$ | 1 | 5 | 150 |
| $I_2$ | 1 | 2 | 90 |
| $I_3$ | 2 | 1 | 150 |
| Coste | 10 | 23 | |

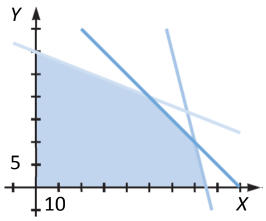
Definimos las variables:

$x \geq 0, x \rightarrow$ número de $E_1$ $\qquad$ $y \geq 0, y \rightarrow$ número de $E_2$

Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{l} x+5y \leq 150 \\ x+2y \leq 90 \\ 2x+y \leq 150 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\}$$

La región factible es:




Los vértices de la región factible son: $A(0,0), B(0,30), C(50,20), D(70,10), E(75,0)$.

a) Queremos maximizar $f(x,y) = 10x + 23y$.

$A(0,0) \rightarrow 0$
$B(0,30) \rightarrow 690$
$C(50,20) \rightarrow 960 \rightarrow \text{Máximo}$
$D(70,10) \rightarrow 930$
$E(75,0) \rightarrow 750$

Para maximizar el beneficio se necesitan 50 empanadas tipo 1 y 20 empanadas tipo 2, obteniendo un beneficio de 960 €.

b) Fijando el precio de la empanada del tipo 1 por 15 €: $960 = 15 \cdot 60 + C_2 \cdot 15 \rightarrow C_2 = 4\,€$

**94. Página 110**

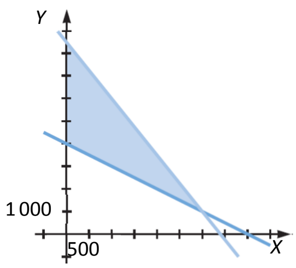
Definimos las variables:

$x \geq 0, x \rightarrow$ yogures de maracuyá $\qquad$ $y \geq 0, y \rightarrow$ yogures de chirimoya

Minimizar $f(x,y) = x + 2y$

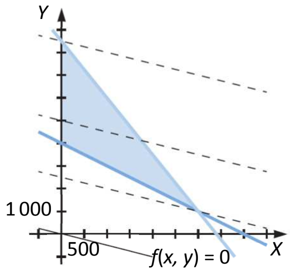
$$\left.\begin{array}{l} x+y \geq 4000 \\ 0{,}5x+0{,}2y \leq 1700 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\}$$

La región factible es:




Los vértices de la región factible no acotada son $A(3000, 1000), B(0, 4000)$ y $C(0, 8500)$.

Trazando rectas paralelas de la función objetivo para tener el menor coste, vemos que se deben producir 3 000 yogures de maracuyá y 1 000 de chirimoya.




**95. Página 110**

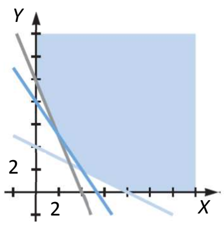
$x \geq 0, x \rightarrow$ meses de actividad del avión *A* $\qquad$ $y \geq 0, y \rightarrow$ meses de actividad del avión *B*

| | Tipo A | Tipo B | Total |
|---|---|---|---|
| Trayecto T1 | 10 | 20 | 80 |
| Trayecto T2 | 30 | 20 | 160 |
| Trayecto T3 | 50 | 20 | 200 |
| Coste | 200 000 | 200 000 | |

Minimizar $f(x,y) = 200000x + 200000y$

$$\left.\begin{array}{l} 10x + 20y \geq 80 \\ 30x + 20y \geq 160 \\ 50x + 20y \geq 200 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\}$$

La región factible es:




Los vértices de la región son $A(0,10), B(2,5), C(4,2), D(8,0)$. Trazando rectas paralelas de la función objetivo, obtenemos que se alcanza el mínimo en el punto *C*. Es decir, que el modelo *A* vuela 4 meses y el modelo *B*, 2. El coste de combustible ascenderá a 1 200 000 €.

**96. Página 110**

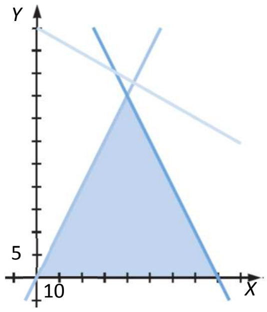
| | Turismo | Camión | Total |
|---|---|---|---|
| Nave A | 2 | 7 | 385 |
| Nave B | 3 | 3 | 240 |
| Coste | 3 000 | 6 000 | |

Definimos las variables:

$x \geq 0, x \rightarrow$ número de turismos $\quad\quad$ $y \geq 0, y \rightarrow$ número de camiones

$$\text{Maximizar } f(x,y) = 3000x + 6000y$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 7y \leq 385 \\ 3x + 3y \leq 240 \\ x \geq y \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\}$$




Los vértices de la región factible son $A(0,0), B(40,40), C(80,0)$.

$f(x,y) = 3000x + 6000y$

$A(0,0) \rightarrow 0$

$B(40,40) \rightarrow 360\,000 \rightarrow \text{Máximo}$

$C(80,0) \rightarrow 240\,000$

Se deben producir 40 camiones y 40 turismos y las ganancias serán de 360 000 €.

**97. Página 110**

| | Lote *A* | Lote *B* | Total |
|---|---|---|---|
| **Tenedor** | 1 | 2 | 40 |
| **Cuchara** | 2 | 1 | 40 |
| **Sacacorchos** | 1 | 1 | 24 |
| **Beneficio** | 2 | 1,5 | |

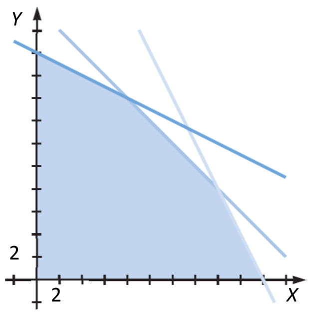
Definimos las variables:

$x \geq 0, x \rightarrow$ número de lotes *A* $\quad\quad$ $y \geq 0, y \rightarrow$ número de lotes *B*

$$\text{Maximizar } f(x,y) = 2x + 1{,}5y$$

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y \leq 40 \\ 2x + y \leq 40 \\ x + y \leq 24 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\}$$

La región factible es:




Los vértices de la región acotada son $A(0,0), B(20,0), C(16,8), D(8,16), E(0,20)$.

$f(x,y) = 2x + 1{,}5y$

$A(0,0) \rightarrow 0$

$B(20,0) \rightarrow 40$

$C(16,8) \rightarrow 44 \rightarrow \text{Máximo}$

$D(8,16) \rightarrow 40$

$E(0,20) \rightarrow 30$

Para obtener el beneficio sea máxima debe vender 16 del lote *A* y 8 del lote *B*.

**98. Página 111**

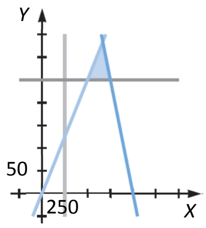
Definimos las variables:

$x \geq 0, x \to$ periódicos $\qquad y \geq 0, y \to$ radio

$$\text{Maximizar } f(x,y) = 50x + 80y$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y \leq 1000 \\ x \geq 2y \\ x \geq 250 \\ y \geq 250 \end{array}\right\}$$

La región factible es:




Los vértices de la región acotada son $A(500,250), B\left(\frac{2000}{3}, \frac{1000}{3}\right), C(750,250)$.

$$f(x,y) = 50x + 80y$$
$$A(500,250) \to 45\,000$$
$$B\left(\frac{2000}{3}, \frac{1000}{3}\right) \to 60\,000 \to \text{Máximo}$$
$$C(750,250) \to 57\,500$$

Debería asignar un presupuesto de 666,67 € a periódicos y uno de 333,33 € a radio.

**99. Página 111**

| | Jersey | Pantalones | Total |
|---|---|---|---|
| Cortar | 1 | 1 | 7 |
| Coser | 3 | 1 | 11 |
| Teñir | 1 | 0 | 3 |
| Beneficio | 8 | 5 | |

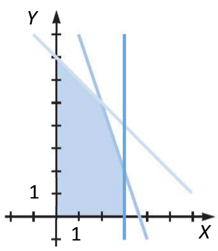
Definimos las variables:

$x \geq 0, x \to$ número de jerséis $\qquad y \geq 0, y \to$ número de pantalones

$$\text{Maximizar } f(x,y) = 8x + 5y$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y \leq 7 \\ 3x + y \leq 11 \\ x \leq 3 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\}$$

La región factible es:




Los vértices de la región acotada son $A(0,0), B(3,0), C(3,2), D(2,5), E(0,7)$.

$f(x,y) = 8x + 5y$
$A(0,0) \to 0$
$B(3,0) \to 24$
$C(3,2) \to 34$
$D(2,5) \to 41 \to \text{Máximo}$
$E(0,7) \to 35$

Para conseguir el beneficio máximo, se deben producir 2 jerséis y 5 pantalones, con un beneficio de 41 €.

**100. Página 111**

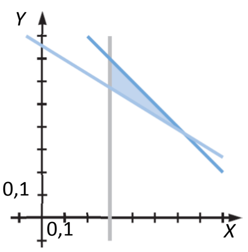
Definimos las variables:

$x \geq 0, x \to$ bonos $\qquad$ $y \geq 0, y \to$ acciones

Maximizar $f(x,y) = x + y$

$$\left.\begin{array}{l} x + y \leq 1 \\ x \geq 0,30 \\ 0,06x + 0,10y \geq 0,075 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\}$$

La región factible es:




Los vértices de la región acotada son $A(0,63;0,38), B(0,3;0,7), C(0,3;0,57)$.

$f(x,y) = x + y$
$A(0,62;0,37) \to 0,99$
$B(0,3;0,7) \to 1 \to \text{Máximo}$
$C(0,3;0,57) \to 0,87$

Se debe asignar un 30 % a los bonos y un 70 % a las acciones

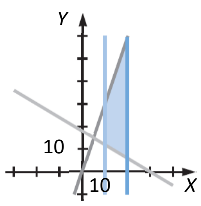
**101. Página 111**

$x \geq 0, x \to$ trajes de nacionales $\qquad$ $y \geq 0, y \to$ trajes de importación

Minimizar $f(x,y) = x + y$

$$\left.\begin{array}{l} 10 \leq x \leq 20 \\ x \geq \dfrac{y}{3} \\ 120x + 200y \geq 3600 \end{array}\right\}$$

La región factible es:




Los vértices de la región son $A(10,12), B(20,6), C(20,60), D(10,30)$.

$f(x,y) = x + y$
$A(10,12) \to 22 \to \text{Mínimo}$
$B(20,6) \to 26$
$C(20,60) \to 80$
$D(10,30) \to 40$

Por tanto, la tienda deberá pedir 10 trajes naciones y 12 de importación. De esta manera, el beneficio obtenido con venta será 3 600 € ( $120 \cdot 10 + 200 \cdot 12 = 3600$ ).

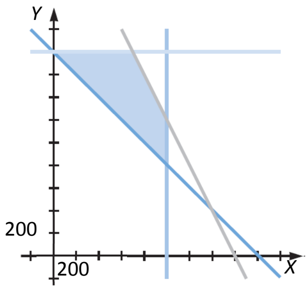
**102. Página 111**

$x \geq 0, x \rightarrow$ páginas de Lola $\qquad$ $y \geq 0, y \rightarrow$ páginas de Manuel

Maximizar $f(x,y) = 9x + 6y$

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 1{,}5y \leq 4800 \\ x + y \geq 1800 \\ 0 \leq x \leq 1000 \\ 0 \leq y \leq 1800 \end{array}\right\}$$

La región factible es:




Los vértices de la región son $A(0,1800), B(700,1800), C(1000,1200), E(1000,800)$.

$f(x,y) = 9x + 6y$

$A(0,1800) \rightarrow 10\,800$

$B(700,1800) \rightarrow 17\,100 \rightarrow$ *Máximo*

$C(1000,1200) \rightarrow 16\,200$

$E(1000,800) \rightarrow 13\,800$

Se deben asignar 700 páginas a Lola y 1 800 a Manuel.

**103. Página 111**

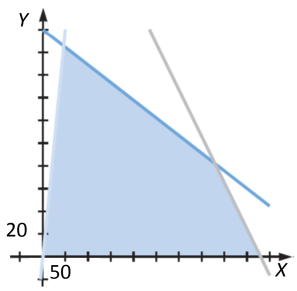
$x \geq 0, x \rightarrow$ tamaño estándar $\qquad$ $y \geq 0, y \rightarrow$ tamaño extra grande

| | Estándar | Grande | Total |
|---|---|---|---|
| Aleación | 0,125 | 0,4 | 80 |
| Tiempo | 10 | 12 | 4800 |
| Beneficio | 10 | 15 | |

Maximizar $f(x,y) = 10x + 15y$

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}125x + 0{,}4y \leq 80 \\ 10x + 12y \leq 4800 \\ x \geq 0{,}2(x + y) \end{array}\right\}$$

La región factible es:




Los vértices de la región son $A(0,0), B(480,0), C(384,80), D(46{,}38;185{,}51)$.

$f(x,y) = 10x + 15y$

$A(0,0) \rightarrow 0 \qquad B(480,0) \rightarrow 4800 \qquad C(384,80) \rightarrow 5040 \rightarrow$ *Máximo* $\qquad D(46{,}38;185{,}51) \rightarrow 3246{,}45$

Para maximizar los beneficios se deben vender 384 raquetas estándar y 80 raquetas grandes.

## MATEMÁTICAS EN TU VIDA

**1. Página 112**

Usar los recursos que se tienen de la forma más eficiente posible.

**2. Página 112**

Un algoritmo es un proceso sistemático y ordenado por el que se realizan una serie de instrucciones con el fin de lograr un objetivo o resolver un problema.

**3. Página 112**

Bombardeando pocos puntos, pero que fuesen claves para la economía del país al que se enfrentaban en la guerra.

**4. Página 112**

Fabricación ropa militar, distribución de elementos, uso de la munición...

**5. Página 112**

Respuesta abierta.

En una compañía aérea se podría usar para buscar el modo más eficiente de entrar los pasajeros en un avión o a la oferta de precios especiales sin que suponga pérdidas a la compañía.

En una fábrica textil podría ser para desperdiciar la menor cantidad de tela posible.

**6. Página 112**

Respuesta abierta.

Sean $x$ la cantidad de horas al día que estoy en clase, $y$ la cantidad de horas que duermo, $z$ horas de estudio y $t$ horas de ocio, para comer y otros quehaceres diarios.

$x + y + z + t = 24$

$x = 6,\ 6 \le y \le 10,\ 1 \le z \le 3,\ 5 \le t \le 11$