Distribución Normal

1) **En una distribución $N(110, 10)$, calcula:**

a) $P[x > 110]$ b) $P[110 < x < 120]$ c) $P[110 < x < 130]$

d) $P[120 < x < 130]$ e) $P[90 < x < 100]$ f) $P[90 < x < 120]$

g) $P[x < 100]$

2) **En una distribución $N(0, 1)$, calcula las siguientes probabilidades:**

a) $P[z = 2]$ b) $P[z \leq 2]$ c) $P[z \geq 2]$

d) $P[z \leq -2]$ e) $P[z \geq -2]$ f) $P[-2 \leq z \leq 2]$

Nota: Utiliza la tabla para la distribución $N(0, 1)$

3) **En una distribución $N(0, 1)$, calcula:**

a) $P[z \leq 1{,}83]$ b) $P[z \geq 0{,}27]$

c) $P[z \leq -0{,}78]$ d) $P[z \geq 2{,}5]$

4) **En una distribución $N(0, 1)$, calcula las siguientes probabilidades:**

a) $P[z = 1{,}6]$

b) $P[-2{,}71 \leq z \leq -1{,}83]$

c) $P[1{,}5 \leq z \leq 2{,}5]$

d) $P[-1{,}87 \leq z \leq 1{,}25]$

5) **Halla las siguientes probabilidades:**

a) $P[z \leq 0{,}84]$ b) $P[z < 1{,}5]$ c) $P[z < 2]$ d) $P[z < 1{,}87]$

e) $P[z < 2{,}35]$ f) $P[z \leq 0]$ g) $P[z < 4]$ h) $P[z = 1]$

Nota: Utiliza la tabla para la distribución $N(0, 1)$

6) **Di el valor de k en cada caso:**

a) $P[z \leq k] = 0{,}7019$ b) $P[z < k] = 0{,}8997$

c) $P[z \leq k] = 0{,}5040$ d) $P[z < k] = 0{,}7054$

Nota: Utiliza la tabla para la distribución $N(0, 1)$

7) **Halla:**

a) $P[z > 1{,}3]$ b) $P[z < -1{,}3]$ c) $P[z > -1{,}3]$

d) $P[1{,}3 < z < 1{,}96]$ e) $P[-1{,}96 < z < -1{,}3]$ f) $P[-1{,}3 < z < 1{,}96]$

g) $P[-1{,}96 < z < 1{,}96]$

8) **Halla, a partir de la tabla, las siguientes probabilidades:**

a) $P[-1 \le z \le 1]$

b) $P[-2 \le z \le 2]$

c) $P[-3 \le z \le 3]$

d) $P[-4 \le z \le 4]$

9) **En una distribución $N(173, 6)$, halla las siguientes probabilidades:**

a) $P[x \le 173]$ b) $P[x \ge 180{,}5]$ c) $P[174 \le x \le 180{,}5]$

d) $P[161 \le x \le 180{,}5]$ e) $P[161 \le x \le 170]$ f) $P[x = 174]$

g) $P[x > 191]$ h) $P[x < 155]$

Nota: Tipifica la variable y resuelve utilizando la tabla para la distribución $N(0, 1)$

10) **En una distribución $N(43, 10)$, calcula las siguientes probabilidades:**

a) $P[x \ge 43]$

b) $P[x \le 30]$

c) $P[40 \le x \le 55]$

d) $P[30 \le x \le 40]$

11) **En una distribución $N(151, 15)$, calcula:**

a) $P[x \le 136]$

b) $P[120 \le x \le 155]$

c) $P[x \ge 185]$

d) $P[140 \le x \le 160]$

12) **La talla media de los 200 alumnos de un centro escolar es de $165\ cm$, y la desviación típica de $10\ cm$.**
Si las tallas se distribuyen normalmente, calcula la probabilidad de que un alumno elegido al azar mida más de $180\ cm$.
¿Cuánto alumnos puede esperarse que midan más de $180\ cm$?

13) **Los pesos de 200 soldados presentan una distribución normal de media $65\ kg$ y desviación típica $8\ Kg$. Calcula la probabilidad de que un soldado elegido al azar pese:**

a) Más de 61 kg.

b) Entre 63 y 69 kg.

c) Menos de 70 kg.

d) Más de 75 kg.

14) **Para aprobar un examen de ingreso en una escuela, se necesita obtener 5 puntos o más. Por experiencia de otros años, sabemos que la distribución de puntos obtenidos por los alumnos es normal, con media 55 puntos y desviación típica 10.**

a) ¿Qué probabilidad hay de que un alumno apruebe?

b) Si se presentan al examen 400 alumnos, ¿cuántos cabe esperar que ingresen en esa escuela?

15) **En una ciudad, las temperaturas máximas diarias durante el mes de julio se distribuyen normalmente con una media de $26\ ^0C$ y una desviación típica de $4\ ^0C$. ¿Cuántos días se puede esperar que tengan una temperatura máxima comprendida entre $22\ ^0C$ y $28\ ^0C$?**

16) **Si X es una variable aleatoria de una distribución N(μ, σ), hallar: $p(\mu-3\sigma \le X \le \mu+3\sigma)$**

17) **En una distribución normal de media 4 y desviación típica 2, calcular el valor de a para que: $P(4-a \le x \le 4+a) = 0.5934$**

18) **En una ciudad se estima que la temperatura máxima en el mes de junio sigue una distribución normal, con media 23° y desviación típica 5°. Calcular el número de días del mes en los que se espera alcanzar máximas entre 21° y 27°.**

19) **La media de los pesos de 500 estudiantes de un colegio es 70 kg y la desviación típica 3 kg. Suponiendo que los pesos se distribuyen normalmente, hallar cuántos estudiantes pesan:**

a)Entre 60 kg y 75 kg.b)Más de 90 kg.c)Menos de 64 kg.d)64 kg.e)64 kg o menos.

20) **Se supone que los resultados de un examen siguen una distribución normal con media 78 y desviación típica 36. Se pide:**

a)¿Cuál es la probabilidad de que una persona que se presenta el examen obtenga una calificación superior a 72?

b)Calcular la proporción de estudiantes que tienen puntuaciones que exceden por lo menos en cinco puntos de la puntuación que marca la frontera entre el Apto y el No-Apto (son declarados No-Aptos el 25% de los estudiantes que obtuvieron las puntuaciones más bajas).

c)Si se sabe que la calificación de un estudiante es mayor que 72 ¿cuál es la probabilidad de que su calificación sea, de hecho, superior a 84?

21) **Tras un test de cultura general se observa que las puntuaciones obtenidas siguen una distribución una distribución N(65, 18). Se desea clasificar a los examinados en tres grupos (de baja cultura general, de cultura general aceptable, de excelente cultura general) de modo que hay en el primero un 20% la población, un 65% el segundo y un 15% en el tercero. ¿Cuáles han de ser las puntuaciones que marcan el paso de un grupo al otro?**

22) **Varios test de inteligencia dieron una puntuación que sigue una ley normal con media 100 y desviación típica 15.**

a) Determinar el porcentaje de población que obtendría un coeficiente entre 95 y 110.

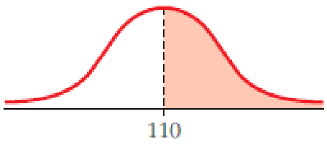
b)¿Qué intervalo centrado en 100 contiene al 50% de la población?

c)En una población de 2500 individuos ¿cuántos individuos se esperan que tengan un coeficiente superior a 125?

SOLUCIONES

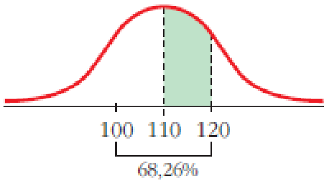
1)

a)



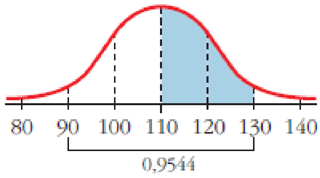
$P[x > 110] = 0,5$

b)



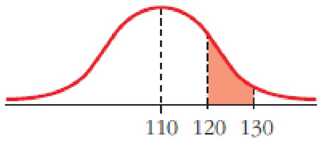
$P[110 < x < 120] = \frac{0,6826}{2} = 0,3413$

c)



$P[110 < x < 130] = \frac{0,9544}{2} = 0,4772$

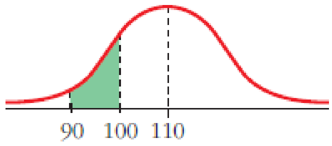
d)



$0,9544 - 0,6826 = 0,2718$

$P[120 < x < 130] = \frac{0,2718}{2} = 0,1359$

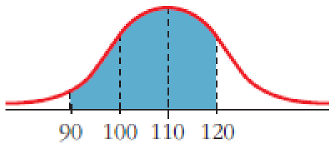
e)



Por simetría, igual que el anterior:

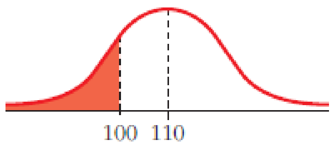
$P[90 < x < 100] = 0,1359$

f)



$P[90 < x < 120] = 0,6826 + 0,1359 = 0,8185$

g)



$P[x < 100] = \frac{1 - 0,6826}{2} = 0,1587$

2)

a) $P[z = 2] = 0$

b) $P[z \leq 2] = 0,9772$

c) $P[z \geq 2] = 1 - 0,9792 = 0,0228$

d) $P[z \leq -2] = 0,0228$

e) $P[z \geq -2] = 1 - 0,0228 = 0,9772$

f) $P[-2 \leq z \leq 2] = 2\,(P[z \leq 2] - 0,5) = 0,9544$

3)

a) $P[z \leq 1,83] = 0,9664$ b) $P[z \geq 0,27] = 0,3935$

c) $P[z \leq -0,78] = 0,2177$ d) $P[z \geq 2,5] = 0,0062$

4)

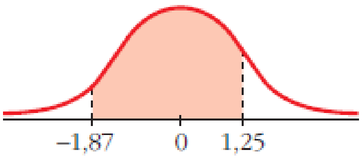
a) $P[z = 1,6] = 0$

b) $P[-2,71 \leq z \leq -1,83] = P[1,83 \leq z \leq 2,71] = P[z \leq 2,71] - P[z \leq 1,83] = 0,0302$

c) $P[1,5 \leq z \leq 2,5] = P[z \leq 2,5] - P[z \leq 1,5] = 0,0606$

d) $P[-1,87 \leq z \leq 1,25] = P[z \leq 1,25] - P[z \leq -1,87] = P[z \leq 1,25] - P[z \geq 1,87] =$

$$= P[z \leq 1,25] - (1 - P[z < 1,87]) = 0,8637$$



5)

Mirando directamente la tabla, obtenemos:

a) 0,7996 b) 0,9332 c) 0,9772 d) 0,9693

e) 0,9906 f) 0,5000 g) 1 h) 0

6)

a) $k = 0,53$ b) $k = 1,28$ c) $k = 0,01$ d) $k = 0,54$

7)

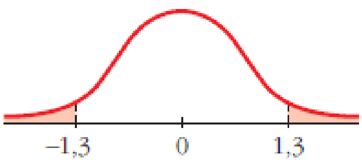
a) $P[z > 1{,}3] = 1 - P[z < 1{,}3] = 1 - 0{,}9032 = 0{,}0968$

b) $P[z < -1{,}3] = 0{,}0968$

c) $P[z > -1{,}3] = 1 - 0{,}0968 = 0{,}9032$

d) $P[1{,}3 < z < 1{,}96] = 0{,}9750 - 0{,}9032 = 0{,}0718$

e) $P[-1{,}96 < z < -1{,}3] = 0{,}0718$



f) $P[-1{,}3 < z < 1{,}96] = 0{,}9750 - (1 - 0{,}9032) = 0{,}8782$

g) $P[-1{,}96 < z < 1{,}96] = 0{,}95$

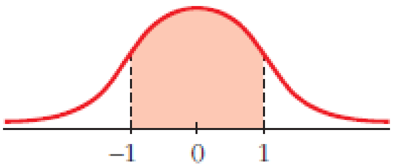
8)

a) $P[-1 \le z \le 1] = 2\,(P[z \le 1] - 0{,}5) = 0{,}6826$

b) $P[-2 \le z \le 2] = 2\,(P[z \le 2] - 0{,}5) = 0{,}9544$

c) $P[-3 \le z \le 3] = 0{,}9974$

d) $P[-4 \le z \le 4] = 1$



9)

a) $P[x \le 173] = 0{,}5$

b) $P[x \ge 180{,}5] = P\left[z \ge \dfrac{180{,}5 - 173}{6}\right] = P[z \ge 1{,}25] = 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056$

c) $P[174 \le x \le 180{,}5] = P[0{,}17 \le z \le 1{,}25] = 0{,}3269$

d) $P[161 \le x \le 180{,}5] = P[-2 \le z \le 1{,}25] = 0{,}8716$

e) $P[161 \le x \le 170] = P[-2 \le z \le -0{,}5] = 0{,}2857$

f) $P[x = 174] = P[z = 0{,}1667] = 0$

g) $P[x > 191] = P[z > 3] = 1 - \phi(3) = 1 - 0{,}9987 = 0{,}0013$

h) $P[x < 155] = P[z < -3] = 1 - \phi(3) = 0{,}0013$

10)

a) $P[x \geq 43] = 0,5$

b) $P[x \leq 30] = P\left[z \leq \dfrac{30-43}{10}\right] = P[z \leq -1,3] = 1 - 0,9032 = 0,0968$

c) $P[40 \leq x \leq 55] = P\left[\dfrac{40-43}{10} \leq z \leq \dfrac{55-43}{10}\right] = P[-0,3 \leq z \leq 1,2] = 0,5028$

d) $P[30 \leq x \leq 40] = P[-1,3 \leq z \leq -0,3] = P[0,3 \leq z \leq 1,3] = P[z \leq 1,3] - P[z \leq 0,3] =$

$= 0,9032 - 0,6179 = 0,2853$

11)

a) $P[x \leq 136] = P\left[z \leq \dfrac{136-151}{15}\right] = P[z \leq -1] = P[z \leq 1] = 1 - P[z < 1] = 0,1587$

b) $P[120 \leq x \leq 155] = P[2,07 \leq z \leq 0,27] = 0,5873$

c) $P[x \geq 185] = P[z \geq 2,27] = 0,0116$

d) $P[140 \leq x \leq 160] = P[-0,73 \leq z \leq 0,6] = 0,5149$

12)

x es $N(165, 10)$; $n = 200$ alumnos

$P[x > 180] = P\left[z > \dfrac{180-165}{10}\right] = P[z > 1,5] = 1 - 0,9332 = 0,0668$

$200 \cdot 0,0668 = 13,36 \approx 13$ alumnos

13)

x es $N(65, 8)$

a) $P[x > 61] = P\left[z > \dfrac{61-65}{8}\right] = P[z > -0,5] = P[z < 0,5] = 0,6915$

b) $P[63 < x < 69] = P[-0,25 < z < 0,5] = 0,2902$

c) $P[x < 70] = P[z < 0,625] = 0,7357$

d) $P[x > 75] = P[z > 1,25] = 1 - P[z \leq 1,25] = 0,1056$

14)

x es $N(55, 10)$

a) $P[x \geq 50] = P\left[z \geq \dfrac{50-55}{10}\right] = P[z \geq -0,5] = P[z \leq 0,5] = 0,6915$

b) $400 \cdot 0,6915 = 276,6 \approx 277$ alumnos

15)

x es $N(26,\ 4)$

$P[22 < x < 28] = P[-1 < z < 0{,}5] = 0{,}5328$

$0{,}5328 \cdot 31 = 16{,}52 \approx 17$ días

16) **Si X es una variable aleatoria de una distribución N(μ, σ), hallar: p(μ−3σ ≤ X ≤ μ+3σ)**

$$p(\mu-3\sigma \le X \le \mu+3\sigma) = p\left(\frac{(\mu-3\sigma)-\mu}{\sigma} \le z \le \frac{(\mu+3\sigma)-\mu}{\sigma}\right) =$$

$$p(-3 \le z \le 3) = p(z \le 3) - p(z \le -3) =$$

$$= p(z \le 3) - (1 - p(z \le 3)) =$$

$$= 0.9987 - 1 + 0.9987 = 0.9974$$

Es decir, que aproximadamente el 99.74% de los valores de X están a menos de tres desviaciones típicas de la media.

17) **En una distribución normal de media 4 y desviación típica 2, calcular el valor de a para que:P(4−a ≤ x ≤ 4+a) = 0.5934**

$$p\left(\frac{(4-a)-4}{2} \le z \le \frac{(4+a)-4}{2}\right) = 0.5934$$

$$p\left(\frac{-a}{2} \le z \le \frac{a}{2}\right) = p\left(z \le \frac{a}{2}\right) - p\left(z \le -\frac{a}{2}\right) =$$

$$= p\left(z \le \frac{a}{2}\right) - p\left(z \ge \frac{a}{2}\right) = p\left(z \le \frac{a}{2}\right) - p\left(1 - p\left(z \le \frac{a}{2}\right)\right)$$

$$2 \cdot p\left(z \le \frac{a}{2}\right) - 1 = 0.5934 \qquad p\left(z \le \frac{a}{2}\right) = 0.7969$$

$$\frac{a}{2} = 0.83 \qquad a = 1.66$$

18) **En una ciudad se estima que la temperatura máxima en el mes de junio sigue una distribución normal, con media 23° y desviación típica 5°. Calcular el número de días del mes en los que se espera alcanzar máximas entre 21° y 27°.**

$$p[21 < X \le 27] = p\left(\frac{21-23}{5} < Z \le \frac{27-23}{5}\right) =$$

$$= p(-0.4 < Z \le 0.8) = p(Z \le 0.8) - [1 - p(Z \le 0.4)] =$$

$$= 0.7881 - (1 - 0.6554) = 0.4425 \cdot 30 = 13$$

19) **La media de los pesos de 500 estudiantes de un colegio es 70 kg y la desviación típica 3 kg. Suponiendo que los pesos se distribuyen normalmente, hallar cuántos estudiantes pesan:**

a. Entre 60 kg y 75 kg.

$$p[60 < X \leq 75] = p\left(\frac{60-70}{3} < Z \leq \frac{75-70}{3}\right) =$$

$$= p(-3.33 < Z \leq 1.67) = p(Z \leq 1.67) - [1 - p(Z \leq 3.33)] =$$

$$= 0.9525 - (1 - 0.9996) = 0.9521 \cdot 500 = 476$$

b.Más de 90 kg.

$$p(X > 90) = p\left(Z > \frac{90-70}{3}\right) = p(Z > 6.67) =$$

$$= 1 - p(Z < 6.67) = 1 - 1 = 0 \cdot 500 = 0$$

c.Menos de 64 kg.

$$p(X < 64) = p\left(Z < \frac{64-70}{3}\right) = p(Z < -2) = 1 - p(Z \leq 2) =$$

$$= 1 - 0.7772 = 0.02128 \cdot 500 = 11$$

d.64 kg.

$$p(X = 64) = p\left(Z = \frac{64-70}{3}\right) = p(Z = -2) = 0 \cdot 500 = 0$$

e.64 kg o menos.

$$p(X \leq 64) = p(X < 64) = 11$$

20) **Se supone que los resultados de un examen siguen una distribución normal con media 78 y desviación típica 36. Se pide:**

a. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que se presenta el examen obtenga una calificación superior a 72?

$$p(X > 72) = p\left(Z > \frac{72-78}{36}\right) =$$

$$= p(Z > -0.16) = p(Z < 0.16) = 0.5636$$

b.Calcular la proporción de estudiantes que tienen puntuaciones que exceden por lo menos en cinco puntos de la puntuación que marca la frontera entre el Apto y el No-Apto (son declarados No-Aptos el 25% de los estudiantes que obtuvieron las puntuaciones más bajas).

$$p(X \leq N) = 0.25 \Rightarrow p\left(Z \leq \frac{N-78}{36}\right) = 0.25$$

$$\frac{N-78}{36} < 0 \qquad 1 - p\left(Z \leq \frac{N-78}{36}\right) = 0.25$$

$$p\left(Z \le \frac{N-78}{36}\right) = 0.75 \Rightarrow \frac{N-78}{36} = 0.68 \qquad N = 54$$

$$p(X > 54+5) = p(X > 59) = p\left(Z > \frac{59-78}{36}\right) =$$

$$p(Z > -0.53) = p(Z < 0.53) = 0.7019 = 70.19\%$$

c.Si se sabe que la calificación de un estudiante es mayor que 72 ¿cuál es la probabilidad de que su calificación sea, de hecho, superior a 84?

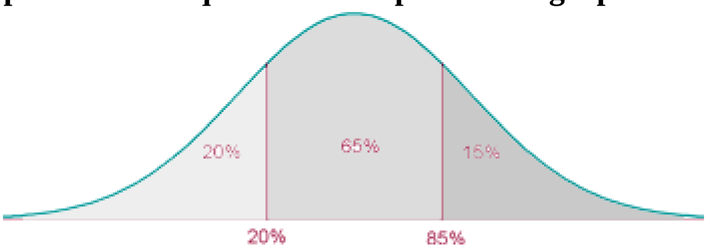
$$p(X > 84) = p\left(Z > \frac{84-78}{36}\right) = p(Z > 0.16) =$$

$$= 1 - p(Z < 0.16) = 1 - 0.5636 = 0.4364$$

$$p(x > 84 / x > 72) = \frac{p[x > 84 \cap x > 72]}{p(x > 72)} =$$

$$= \frac{p(x > 84)}{p(x > 72)} = \frac{0.4364}{0.5636} = 0.774$$

21) **Tras un test de cultura general se observa que las puntuaciones obtenidas siguen una distribución una distribución N(65, 18). Se desea clasificar a los examinados en tres grupos (de baja cultura general, de cultura general aceptable, de excelente cultura general) de modo que hay en el primero un 20% la población, un 65% el segundo y un 15% en el tercero. ¿Cuáles han de ser las puntuaciones que marcan el paso de un grupo al otro?**



$$p(Z \le z_1) = 0.2 \qquad p(Z \le -z_1) = 0.8$$

$$-z_1 = 0.84 \qquad z = -0.84$$

$$\frac{X_1 - 65}{18} = -0.84 \qquad X_1 = 49.88$$

$$p(Z \le z_2) = 0.2 \qquad z_2 = 1.04$$

$$\frac{X_2 - 65}{18} = 1.04 \qquad X_2 = 83.72$$

Baja cultura hasta 49 puntos.
Cultura aceptable entre 50 y 83.
Excelente cultura a partir de 84 puntos.

22) **Varios test de inteligencia dieron una puntuación que sigue una ley normal con media 100 y desviación típica 15.**

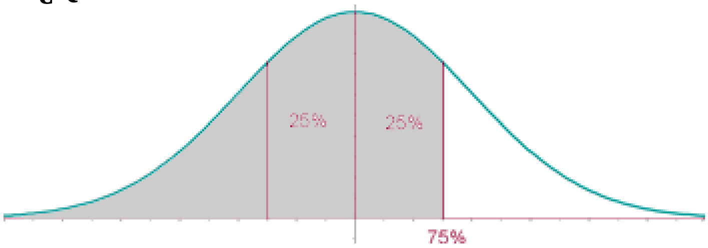
a. Determinar el porcentaje de población que obtendría un coeficiente entre 95 y 110.

$$p(95 < X \leq 110) = p\left(\frac{95-100}{15} < Z \leq \frac{110-100}{15}\right) =$$

$$= p(0.33 < Z \leq 0.67) = p(Z \leq 0.67) - [1 - p(Z \leq 0.33)] =$$

$$= 0.7486 - (1 - 0.6293) = 0.3779$$

b. ¿Qué intervalo centrado en 100 contiene al 50% de la población?



$p = 0.75 \qquad z = 0.675$

$$\frac{X-100}{15} = 0.675 \qquad X = 110$$

$(90, 110)$

c. En una población de 2500 individuos ¿cuántos individuos se esperan que tengan un coeficiente superior a 125?

$$p(X > 125) = p\left(Z > \frac{125-100}{15}\right) = p(Z > 1.67) =$$

$$= 1 - p(Z < 1.67) = 1 - 0.9525 = 0.0475 \cdot 2500 = 119$$