Tema 3: Polinomios y Fracciones Algebraicas

Un **monomio** es el producto de un número (**coeficiente**) por unos valores desconocidos representados con letras (**parte literal**).

El **grado** de un monomio es la suma de los exponentes de la parte literal.

El **valor numérico** de un monomio es su valor cuando las letras toman valores concretos.

Se dice que dos **monomios son semejantes** cuando sus partes literales sean iguales (**exponentes incluidos**).

$3x \ , \ 4x^3$	No son semejantes	$5xy^2 \ , \ 3x^2y$	No son semejantes
$2y^2 \ , \ -\frac{1}{3}y^2$	Son semejantes	$xyz \ , \ zxy$	Semejantes

Un **polinomio** es la suma de dos o más monomios. El **grado** de un polinomio es el mayor de los grados de los monomios que lo componen.

El **valor numérico** de un polinomio es el resultado que da cuando se sustituyen las letras por unos valores determinados.

$$\boxed{5x^3 - 2xy^2 - x^2y}$$

Para $x = 1$, $y = -1 \longrightarrow 5 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1 \cdot (-1)^2 - 1^2 \cdot (-1) = 5 - 2 + 1 = 4$

Para $x = 0$, $y = 3 \longrightarrow 5 \cdot 0^3 - 2 \cdot 0 \cdot 3^2 - 0^2 \cdot 3 = 0$

Se llama **fracción algebraica** al cociente de dos polinomios.

Ejercicio 1: La base de un ortoedro es un cuadrado de lado x. Su altura es y. Expresa mediante un polinomio.

(a) El área de la base.

$\boxed{x^2}$

(b) El área de una cara lateral.

$\boxed{xy}$

(c) El perímero de la base.

$\boxed{4x}$

(d) El volumen

$\boxed{x^2 y}$

Ejercicio 2: Expresa mediante un polinomio cada uno de estos enunciados:

(a) La suma de un número más su cubo.

$\boxed{x + x^3}$

(b) La suma de dos números naturales consecutivos.

$\boxed{x + (x + 1)}$

(c) El perímetro de un triángulo isósceles (*llama x al lado desigual e y a los otros dos lados*).

$\boxed{x + 2y}$

(d) El área total de un cilindro de 4 m de altura en función del radio de la base r.

$\boxed{4\pi \cdot r^2}$

(e) El área total de un ortoedro cuya base es un cuadrado de lado l y cuya altura es 5 metros.

$\boxed{5l^2}$

Suma y resta de polinomios

- Para sumar dos polinomios, se suman los términos semejantes.
- Para restar dos polinomios, se suma el minuendo con el opuesto del sustraendo.

- $(3x^2 + 5x - 2) + (-4x^3 - 3x + 5) = \boxed{-4x^3 + 3x^2 + 2x + 3}$

- $(2x^3 - 3x + 1) - (5x^3 - 2x^2 - 3) =$

  $2x^3 - 3x + 1 - 5x^3 + 2x^2 + 3 =$

  $\boxed{-3x^3 + 2x^2 - 3x + 4}$

- $(6x^2 - 12xy + y) - (5y + 10xy - 2x^2) =$

  $6x^2 - 12xy + y - 5y - 10xy + 2x^2 =$

  $\boxed{8x^2 - 22xy - 4y}$

Producto de un polinomio por un monomio

Se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio.

- $(-x^3) \cdot (2x^2 - 5x - 1) = \boxed{-2x^5 + 5x^4 + x^3}$
- $(2x^2 - y^3 + 4xy) \cdot (-4xy) = \boxed{-8x^3y + 4xy^4 - 16x^2y^2}$
- $6a \cdot (ab^2 - 2ab + 5a^3 - b) = \boxed{6a^2b^2 - 12a^2b + 30a^4 - 6ab}$

Producto de dos polinomios

Para **multiplicar dos polinomios**:

1. Se multiplica cada monomio de uno de los polinomios por todos los monomios del otro polinomio.
2. Se suman los monomios semejantes obtenidos.

- $(2xy^2 - 3x) \cdot (2x - x^5) = \boxed{4x^2y^2 - 2x^6y^2 - 6x^2 + 3x^6}$

- $(x^3 - 2x^2 + 3x - 4) \cdot (3x^2 - 2x + 1) =$

  $3x^5 - 2x^4 + x^3 - 6x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 9x^3 - 6x^2 + 3x - 12x^2 + 8x - 4 =$

  $\boxed{3x^5 - 8x^4 + 14x^3 - 20x^2 + 11x - 4}$

Extraer factor común de un polinomio

$6x^4 - 24x^3 + 12x^2$ (*Ejemplo 1*)

1. Si hay letras que se repiten en todos los términos, tomamos las que hay con el menor exponente que tengan.

   x^2

2. Hallamos el mcd de los coeficientes de los términos.

   6

3. El factor común son las letras y números obtenidos. Multiplica a los términos restantes.

   $6x^2 \cdot (x^2 - 4x + 2)$

Extraer factor común de un polinomio

$6x^2y^2 - 3xy^2 + 30x^2y$ (*Ejemplo 2*)

1. Si hay letras que se repiten en todos los términos, tomamos las que hay con el menor exponente que tengan.

   xy

2. Hallamos el mcd de los coeficientes de los términos.

   3

3. El factor común son las letras y números obtenidos. Multiplica a los términos restantes.

   $\boxed{3xy \cdot (2xy - y + 10x)}$

Extraer factor común de un polinomio

$4xy - 6xy^2 + 8z$ (*Ejemplo 3*)

1. Si hay letras que se repiten en todos los términos, tomamos las que hay con el menor exponente que tengan.

   No hay

2. Hallamos el mcd de los coeficientes de los términos.

   2

3. El factor común son las letras y números obtenidos. Multiplica a los términos restantes.

   $\boxed{2 \cdot (2xy - 3xy^2 + 4z)}$

Ejercicio 1: Extrae factor común:

(a) $3x + 6xy - 27xz^2$

(b) $5x^3z^2 - 5xyz + 100x^2yz$

(c) $4b^2c + 8bc - 32a^2b$

(d) $9abc + 6ab - 12b^2c$

Ejercicio 2: Calcula el valor numérico del polinomio $2x^3 - x^2 - 6x$ para $x = -1$

Ejercicio 3: Halla a si el valor numérico del siguiente polinomio en $x = 2$ es 7

$$x^3 - (x^2 - ax) + a$$

$\boxed{\textbf{Regla de Ruffini:}}$ es una forma de dividir polinomios que sólo puede utilizarse cuando el divisor es del tipo $(x - a)$.

1. Escribimos los coeficientes de los términos, de mayor a menor grado, **incluyendo con ceros los que no están**.
2. Colocamos a la izquierda el término independiente del divisor CAMBIADO DE SIGNO, y bajamos el primer coeficiente del dividendo.
3. Multiplicamos el primer coeficiente del dividendo por el término independiente del divisor, y se lo sumamos al siguiente coeficiente, bajando el resultado.
4. Repetimos el proceso hasta llegar al último coeficiente.
5. El último número a la derecha es el resto. Los coeficientes a la izquierda son el cociente, de mayor a menor grado..

Resuelve las siguientes divisiones mediante la regla de Ruffini:

Ejemplo 1: $(x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 5) : (x - 2)$

Ejemplo 2: $(x^3 - 5x + 12) : (x + 3)$

$\boxed{\textbf{Valor de un polinomio para } x = a}$

El valor da un polinomio para $x = a$ coincide con el resto al dividirlo por $(x - a)$ (*ya sea por Ruffini o por el método tradicional*)

División de polinomios:

1. Dividimos el término de mayor grado del dividendo entre el término de mayor grado del divisor.
2. Multiplicamos el resultado obtenido en 1. por el divisor. Colocamos el resultado obtenido debajo del dividendo.
3. Restamos al dividendo el resultado obtenido en 2. El resultado será el resto (nuevo dividendo).
4. Repetimos los pasos 1-3 **hasta que el resto obtenido tenga menor grado que el divisor**.

División de polinomios:

$\boxed{(x^5 + 2x^3 - x - 8) : (x^2 - 2x + 1)}$ (*Ejemplo 1*)

1. Dividimos el término de mayor grado del dividendo entre el término de mayor grado del divisor.
   $x^5 : x^2 = x^3$
2. Multiplicamos el resultado obtenido en 1. por el divisor. Colocamos el resultado obtenido debajo del dividendo.
   $x^3 \cdot (x^2 - 2x + 1) = x^5 - 2x^4 + x^3$
3. Restamos al dividendo el resultado obtenido en 2. El resultado será el resto (nuevo dividendo).
   $(x^5 + 2x^3 - x - 8) - (x^5 - 2x^4 + x^3) = 2x^4 + x^3 - x - 8$
4. Repetimos los pasos 1-3 **hasta que el resto obtenido tenga menor grado que el divisor**.

División de polinomios:

$\boxed{(x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 12x + 6) : (x^2 - 3x + 3)}$ (*Ejemplo 2*)

1. Dividimos el término de mayor grado del dividendo entre el término de mayor grado del divisor.
   $x^4 : x^2 = x^2$
2. Multiplicamos el resultado obtenido en 1. por el divisor. Colocamos el resultado obtenido debajo del dividendo.
   $x^2 \cdot (x^2 - 3x + 3) = x^4 - 3x^3 + 3x^2$
3. Restamos al dividendo el resultado obtenido en 2. El resultado será el resto (nuevo dividendo).
   $(x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 12x + 6) - (x^4 - 3x^3 + 3x^2) = -2x^3 + 8x^2 - 12x + 6$
4. Repetimos los pasos 1-3 **hasta que el resto obtenido tenga menor grado que el divisor**.

Igualdades Notables

1. Cuadrado de una suma

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

2. Cuadrado de una diferencia

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

3. Suma por diferencia

$$(x+y) \cdot (x-y) = x^2 - y^2$$

Igualdades Notables

1. Cuadrado de una suma

$$\boxed{(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2}$$

$(5y+2)^2 = \qquad 25y^2 + 20y + 4$

$(xy+z)^2 = \qquad x^2y^2 + 2xyz + z^2$

También hay que saber reconocerlas...

$4 + 4x + x^2 = \qquad (2+x)^2$

$9x^2y^2 + 6xyz + z^2 = \qquad (3xy+z)^2$

Igualdades Notables

2. Cuadrado de una diferencia

$$\boxed{(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2}$$

$(3-8x)^2 =$ $\quad 9 - 48x + 64x^2$

$(5z-x)^2 =$ $\quad 25z^2 - 10xz + x^2$

También hay que saber reconocerlas. . .

$9a^2 - 6a + 1 =$ $\quad (3a-1)^2$

$16x^2 - 8xz + z^2 =$ $\quad (4x-z)^2$

Igualdades Notables

3. Suma por diferencia

$$\boxed{(x+y)\cdot(x-y)=x^2-y^2}$$

$(2x+3y)\cdot(2x-3y)=\qquad 4x^2-9y^2$

$(a^2-4)\cdot(a^2+4)=\qquad a^4-16$

También hay que saber reconocerlas...

$25x^2-y^2=\qquad (5x+y)\cdot(5x-y)$

$x^6-36=\qquad (x^3+6)\cdot(x^3-6)$

$\boxed{\textbf{Raíces de un polinomio:}}$ Un número a es una raíz (solución) del polinomio $P(x)$ si $P(a) = 0$ (*si el valor del polinomio para* $x = a$ *es cero*).

$x = 2$ **y** $x = 5$ **son soluciones del polinomio** $P(x) = x^2 - 7x + 10$ **ya que. . .**

$$x = 2 \longrightarrow P(2) = 2^2 - 7 \cdot 2 + 10 = 4 - 14 + 10 = 0$$

$$x = 5 \longrightarrow P(5) = 5^2 - 7 \cdot 5 + 10 = 25 - 35 + 10 = 0$$

$\boxed{\textbf{Raíces de un polinomio:}}$ Un número a es una raíz (solución) del polinomio $P(x)$ si $P(a) = 0$ (*si el valor del polinomio para $x = a$ es cero*).

$x = 1$ **y** $x = 3$ **NO son soluciones del polinomio** $P(x) = x^2 - 7x + 10$ **ya que...**

$$x = 1 \longrightarrow P(1) = 1^2 - 7 \cdot 1 + 10 = 1 - 7 + 10 = 4 \neq 0$$

$$x = 3 \longrightarrow P(3) = 3^2 - 7 \cdot 3 + 10 = 9 - 21 + 10 = -2 \neq 0$$

¿Cómo obtener las raíces enteras de un polinomio?

Propiedades de las raíces de un polinomio:

1. Si $P(x)$ es divisible entre $(x - a)$ $(resto = 0)$ entonces a es raíz de $P(x)$.
2. **Para que un número entero sea raíz de $P(x)$ es necesario que sea divisor de su término independiente.**
3. El número de raíces de un polinomio es menor o igual que su grado.

Ejemplo: Calcula las raíces de:

(a) $x^3 - 8x^2 + 5x + 14$ (b) $x^3 - 2x^2 + x - 12$

¿Cómo obtener las raíces enteras de un polinomio?

1. Las posibles raíces son los divisores (positivos y negativos) del término independiente.
2. Probamos si cada una de ellas es raíz, o bien dividiendo el polinomio utilizando Ruffini, o bien calculando el valor numérico del polinomio para ese valor y viendo si da cero.
3. Si se utiliza Ruffini, se sigue buscando raíces en el polinomio del cociente.
4. Para obtener las raíces de un polinomio de grado dos, basta resolver la ecuación de segundo grado resultante de igualar el polinomio a cero.

Ejemplo: Calcula las raíces de:

(a) $x^3 - 8x^2 + 5x + 14$ (b) $x^3 - 2x^2 + x - 12$

Trucos

((*ayuda en la búsqueda de raíces*)

- **Truco 1**

  Cuando todos los coeficientes del polinomio son positivos, **las raíces del polinomio** (*de haberlas*) **son negativas**.

- **Truco 2**

  Cuando los coeficientes del polinomio suman cero, $x = 1$ es raíz del polinomio. Cuando no suman cero, $x = 1$ NO es raíz del polinomio.

Ejercicio: Calcula las raíces de los siguientes polinomios y **factorízalos**:

(a) $x^3 - 3x^2 + 2$

(b) $x^2 - 2x + 1$

(c) $x^3 - 2x^2 - 5x - 6$

(d) $x^2 - 5x - 14$

Ejercicio: Calcula las raíces de los siguientes polinomios y **factorízalos**:

(a) $x^3 - 3x^2 + 2$ $\quad$ 1 , $1 + \sqrt{3}$, $1 - \sqrt{3}$

(b) $x^2 - 2x + 1$ $\quad$ 1 (doble)

(c) $x^3 - 2x^2 - 5x - 6$ $\quad$ No tiene raíces enteras

(d) $x^2 - 5x - 14$ $\quad$ 7 y -2

Ejercicio: Calcula las raíces de los siguientes polinomios y **factorízalos**:

(a) $x^3 - 3x^2 + 2$ $\quad$ $1\ ,\ 1+\sqrt{3}\ ,\ 1-\sqrt{3}$

$\boxed{(x-1)\cdot(x-(1+\sqrt{3}))\cdot(x-(1-\sqrt{3}))}$

(b) $x^2 - 2x + 1$ $\quad$ 1 (doble)

$\boxed{(x-1)^2}$

(c) $x^3 - 2x^2 - 5x - 6$ $\quad$ No tiene raíces enteras

$\boxed{\text{Las raíces no son enteras}}$

(d) $x^2 - 5x - 14$ $\quad$ 7 y -2

$\boxed{(x-7)\cdot(x+2)}$

Ejercicio 2: Escribe un polinomio cuyas raíces sean:

(a) $x = 1$, $x = 3$

El polinomio más simple con raíz $x = 1$ sería:

$$x - 1$$

El polinomio más simple con raíz $x = 3$ sería:

$$x - 3$$

Por lo tanto, el polinomio más simple con raíces $x = 1$, $x = 3$ sería:

$$(x-1)\cdot(x-3) = \boxed{x^2 - 4x + 3}$$

Ejercicio 2: Escribe un polinomio cuyas raíces sean:

(b) $x = -2$, $x = -1$, $x = 4$

Utilizando la misma lógica que antes, el polinomio más simple con estas raíces sería:

$$(x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-4)$$

Haciendo las cuentas, este polinomio queda como:

$$\boxed{x^3 - x^2 - 10x - 8}$$

Ejercicio 3: Encuentra un polinomio que cumpla:

Es de grado 2 y su única raíz es $x = -2$

El polinomio más simple con raíz $x = -2$ sería:

$$(x + 2)$$

El problema de este polinomio es que es de grado 1

Para que sea de grado 2, tan simple como elevarlo al cuadrado

$$(x + 2)^2 = \boxed{x^2 + 4x + 4}$$

$\boxed{\textbf{Factorizar un polinomio}}$ es descomponerlo en producto de polinomios del menor grado posible.

1. Se saca factor **común** (*si se puede*).

2. Se buscan las **raíces del polinomio**. Cada raíz a de un polinomio da lugar a un factor del tipo $(x - a)$.

   Mientras el polinomio es de grado 3 o mayor se utiliza Ruffini o el valor de un polinomio como método para buscar raíces.

3. Cuando el polinomio sea de grado 2, se utilizan las **igualdades notables** o se hallan las raíces mediante la fórmula de las ecuaciones de 2º grado.

Factorizar un polinomio $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ (Ejemplo 1)

1. Se saca factor **común** (*si se puede*)

   No hay factor común

2. Se buscan las **raíces del polinomio**. Cada raíz a de un polinomio da lugar a un factor del tipo $(x - a)$
   Mientras el polinomio es de grado 3 o mayor se utiliza Ruffini o el valor de un polinomio como método para buscar raíces.

   Por Ruffini, obtenemos $\boxed{x = 1}$ como raíz. Nos queda el polinomio $x^2 - x - 6$

3. Cuando el polinomio sea de grado 2, se utilizan las **igualdades notables** o se hallan las raíces mediante la fórmula de las ecuaciones de 2º grado

   Resolvemos la ecuación de 2º grado $x^2 - x - 6 = 0$ y obtenemos las raíces $x = -2$ y $x = 3$

   Factorizando nos queda $\boxed{(x-1) \cdot (x+2) \cdot (x-3)}$

Factorizar un polinomio $x^4 - 9x^3 + 21x^2 - 35x + 150$ (Ejemplo 2)

1. Se saca factor **común** (*si se puede*)

   No hay factor común

2. Se buscan las **raíces del polinomio**. Cada raíz a de un polinomio da lugar a un factor del tipo $(x - a)$

   Mientras el polinomio es de grado 3 o mayor se utiliza Ruffini o el valor de un polinomio como método para buscar raíces.

   Por Ruffini, obtenemos $\boxed{x = 5}$ como raíz doble

   Nos queda el polinomio $x^2 + x + 6$

3. Cuando el polinomio sea de grado 2, se utilizan las **igualdades notables** o se hallan las raíces mediante la fórmula de las ecuaciones de 2º grado

   Resolvemos la ecuación de 2º grado $x^2 + x + 6 = 0$ y no tiene raíces

   Factorizando nos queda $\boxed{(x - 5)^2 \cdot (x^2 + x + 6)}$

Factorizar un polinomio $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 3$ (Ejemplo 3)

1. Se saca factor **común** (*si se puede*)

   No hay factor común

2. Se buscan las **raíces del polinomio**. Cada raíz a de un polinomio da lugar a un factor del tipo $(x - a)$

   Mientras el polinomio es de grado 3 o mayor se utiliza Ruffini o el valor de un polinomio como método para buscar raíces.

   Las posibles raíces son 1 , 3 , -1 y -3

   Al hacer Ruffini, ninguna de ellas resulta ser raíz

3. Cuando el polinomio sea de grado 2, se utilizan las **igualdades notables** o se hallan las raíces mediante la fórmula de las ecuaciones de 2º grado

   No tiene raíces y, por tanto, no se puede factorizar

Factorizar un polinomio $x^4 - x^3 - 30x^2 - 76x - 56$ (Ejemplo 4)

1. Se saca factor **común** (*si se puede*)

   No hay factor común

2. Se buscan las **raíces del polinomio**. Cada raíz a de un polinomio da lugar a un factor del tipo $(x - a)$

   Mientras el polinomio es de grado 3 o mayor se utiliza Ruffini o el valor de un polinomio como método para buscar raíces.

   Por Ruffini, obtenemos $\boxed{x = -2}$ como raíz doble

   Nos queda el polinomio $x^2 - 5x - 14$

3. Cuando el polinomio sea de grado 2, se utilizan las **igualdades notables** o se hallan las raíces mediante la fórmula de las ecuaciones de 2º grado

   Resolvemos la ecuación de 2º grado $x^2 - 5x - 14 = 0$ sus raíces son $x = -2$ y $x = 7$

   Factorizando nos queda $\boxed{(x + 2)^3 \cdot (x - 7)}$

Ejercicio 1: Descompón en factores sacando factor común y utilizando los productos notables.

(a) $x^3 + 6x^2 + 9x$

Sacamos factor común:

$x \cdot (x^2 + 6x + 9)$

Aplicamos las igualdades notables:

$\boxed{x \cdot (x + 3)^2}$

Ejercicio 1: Descompón en factores sacando factor común y utilizando los productos notables.

(b) $2x^3 - 4x^2 + 2x$

Sacamos factor común:

$2x \cdot (x^2 - 2x + 1)$

Aplicamos los productos notables:

$\boxed{2x \cdot (x-1)^2}$

Ejercicio 1: Descompón en factores sacando factor común y utilizando los productos notables.

(c) $8x^5 - 24x^4 + 18x^3$

Sacamos factor común:

$2x^3 \cdot (4x^2 - 12x + 9)$

Aplicamos las igualdades notables:

$\boxed{2x^3 \cdot (2x - 3)^2}$

Igualdades notables:

1. **Cuadrado de una suma**

   $$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

2. **Cuadrado de una diferencia**

   $$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

3. **Suma por diferencia**

   $$\boxed{(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2}$$

Ejercicio 1: Factoriza los siguientes polinomios:

(a) $-x^3 + x^2 - 9x + 9$

(b) $x^4 - 4x^3 - x^2 + 6x + 18$

(c) $x^4 + 17x^3 + 101x^2 + 247x + 210$

Ejercicio 2: Realiza la siguiente división de polinomios:

$(4x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 7x + 10) : (x^2 - 2x + 5) =$

Ejercicio 3: Realiza las siguientes operaciones combinadas:

(a) $(2x^3 - 15x - 9) : (x - 3) - (x - 4) \cdot (x - 5) - 6x =$

(b) $(x^2 - 2x - 3) \cdot (x + 5) - (x + 3)^2 \cdot (2x - 1) =$