

Tema 2. Potencias, Radicales y Logaritmos

● 1. Potencias.

- *Potencias de exponente negativo*
- *Propiedades de las potencias*

● 2. Radicales.

- *2.1 Potencias de exponente fraccionario*
- *2.2 Extraer factores de un radical*
- *2.3 Suma y resta de radicales*
- *2.4 Reducción de radicales a índice común*
- *2.5 Multiplicación y división de radicales*
- *2.6 Potencias y raíces de radicales*

● 3. Racionalización.

● 4. Notación científica.

● 5. Logaritmos. Propiedades de los logaritmos.

Potencias con base negativa (I):

- **Exponente par**

Una potencia con base negativa y exponente par es igual a la misma potencia pero con base positiva:

$$(-2)^8 = 2^8$$

$$(-6)^2 = 6^2$$

$$(-1)^{28} = 1^{28}$$

$$7^6 = (-7)^6$$

- **Exponente impar**

Una potencia con base negativa y exponente impar es igual a la misma potencia pero con base positiva y signo negativo:

$$(-2)^7 = -2^7$$

$$(-6)^3 = -6^3$$

$$(-1)^{41} = -1^{41}$$

$$-7^5 = (-7)^5$$

Potencias con base negativa (II):

Esto puede ser útil en aquellos casos en que necesitemos cambiar el signo para operar:

Ejemplo 1

$$(-6)^4 \cdot 6^7 : \left(\frac{-1}{6}\right)^{-6} \quad \longrightarrow \quad 6^4 \cdot 6^7 : 6^6$$

Ejemplo 2

$$25^7 : (-5)^3 \quad \longrightarrow \quad [(-5)^2]^7 : (-5)^3$$

Ejemplo 3

$$\frac{(-3)^7}{3^6} \quad \longrightarrow \quad -\frac{3^7}{3^6}$$

Potencias de exponente negativo

Cuando tenemos un número real elevado a un exponente negativo, el resultado es igual al **inverso** del número elevado a exponente positivo:

$$2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^3} = \boxed{\frac{1}{8}}$$

$$(-5)^{-4} = \left(\frac{1}{-5}\right)^4 = \frac{1}{(-5)^4} = \boxed{\frac{1}{625}}$$

$$\left(\frac{-2}{3}\right)^{-1} = \left(\frac{3}{-2}\right)^1 = \boxed{\frac{-3}{2}}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5^2}{3^2} = \boxed{\frac{25}{9}}$$

Potencias de exponente negativo

(Más ejemplos)

Cuando tenemos un número real elevado a un exponente negativo, el resultado es igual al **inverso** del número elevado a exponente positivo:

$$(-7)^{-1} = \left(\frac{1}{-7}\right)^1 = \boxed{-\frac{1}{7}}$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{-4} = \left(\frac{5}{4}\right)^4 = \frac{5^4}{4^4} = \boxed{\frac{625}{256}}$$

$$3^{-5} = \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{3^5} = \boxed{\frac{1}{243}}$$

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{-3} = 6^3 = \boxed{216}$$

Propiedades de las potencias

Caso 1: Misma base Se suman los exponentes (*producto*) o se restan (*división*).

- *Producto de potencias*

$$5^3 \cdot 5^7 = 5^{10}$$

$$2^4 \cdot 2^{-7} \cdot 2^2 = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

- *División de potencias*

$$7^{10} : 7^4 = 7^6$$

$$5^9 : 5^{-3} = 5^{12}$$

Propiedades de las potencias

Caso 2: Mismo exponente Se multiplican las bases (*producto*) o se dividen (*división*).

- *Producto de potencias*

$$3^6 \cdot 5^6 = 15^6$$

$$2^{-3} \cdot 4^{-3} = 8^{-3} = \frac{1}{8^3} = \frac{1}{512}$$

- *División de potencias*

$$(-9)^{-3} : 3^{-3} = (-3)^{-3} = \left(\frac{1}{-3}\right)^3 = \frac{-1}{27}$$

$$(-28)^5 : (-7)^5 = 4^5$$

Propiedades de las potencias

Potencia de una potencia Se multiplican los exponentes.

$$(5^2)^3 = 5^6$$

$$\left[\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}\right]^5 = \left(\frac{1}{6}\right)^{-5}$$

$$[(-3)^4]^{-2} = (-3)^{-8}$$

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^{15}$$

$$\left[\left(\frac{11}{7}\right)^5\right]^5 = \left(\frac{11}{7}\right)^{25}$$

$$\left[(-2)^4\right]^3)^5 = (-2)^{60}$$

- Cualquier número **elevado a cero** es igual a uno.
- Cualquier número **elevado a uno** es igual al propio número.

Propiedades de las potencias

Caso 3: Distinta base, distinto exponente No se puede expresar como una sola potencia, salvo que una de las bases se pueda escribir como potencia de la otra:

$$\left. \begin{array}{l} 8^5 \cdot 7^3 \\ 11^4 \cdot 2^{-5} \\ 3^2 : 5^{23} \end{array} \right\}$$

$$2^4 \cdot 4^3 = 2^4 \cdot (2^2)^3 = 2^4 \cdot 2^6 = 2^{10}$$

$$3^7 : 9^2 = 3^7 : (3^2)^2 = 3^7 : 3^4 = 3^3$$

$$(-5)^{-3} \cdot 25^4 = (-5)^{-3} \cdot [(-5)^2]^4 = (-5)^{-3} \cdot (-5)^8 = (-5)^5$$

Ejercicio 1: Calcula el valor de las siguientes potencias:

(a) $(-7)^{-2} =$

(b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} =$

(c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-6} =$

Ejercicio 2: Expresa como una sola potencia (*si se puede*):

(a) $[(5^2)^3 : 5^{-5}] \cdot 5^7 =$

(b) $3^{-6} : 3^2 =$

(c) $(11^5)^3 \cdot 6^{15} : 66^4 =$

(d) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-4} =$

(e) $(10^{-5} \cdot 10 \cdot 10^8) : 10^{10} =$

(f) $2^5 \cdot 4^{-3} =$

(g) $5^{16} : 25^6 =$

(h) $28^{10} : (4^2)^5 \cdot 7^{-4} =$

Ejercicios con potencias

Ejercicio 3: Escribe como potencia de exponente negativo:

$$(a) \frac{1}{2^5} = \frac{1^5}{2^5} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \boxed{2^{-5}}$$

$$(b) -\frac{1}{3^7} = -\frac{1^7}{3^7} = -\left(\frac{1}{3}\right)^7 = \boxed{-3^{-7}}$$

$$(c) \frac{5}{5^4} = 5 : 5^4 = 5^1 : 5^4 = \boxed{5^{-3}}$$

$$(d) \frac{6}{6^2} = 6 : 6^2 = 6^1 : 6^2 = \boxed{6^{-1}}$$

Ejercicios con potencias

Ejercicio 4: Expresa como una sola potencia (si es posible):

$$(a) (-2)^3 \cdot 2^{-4} \cdot (-2)^{-1} =$$

$$(b) 7^{-3} \cdot 7^{-2} \cdot (-7)^4 =$$

$$(c) (-5)^4 \cdot 5^5 \cdot 5^{-3} =$$

$$(d) (-6)^2 : 6^{-2} \cdot (-6)^6 =$$

$$(e) 54^2 : 2^2 : 3^2 =$$

$$(f) 5^{-4} \cdot 6^{-4} : 30^{-1} =$$

$$(g) 6^{-5} : 2^{-5} \cdot 3^{-1} =$$

$$(h) (-12)^{-5} \cdot (-12)^4 : 3^{-1} =$$

Ejercicio 5: Expresa el resultado como una sola potencia:

(a) $[9^5 : (-3)^5]^{-1}$ (b) $\left(\frac{4}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{-4} : \left(\frac{5}{4}\right)^2$ (c) $(6^{-3} \cdot 8^{-3})^2$

(d) $[60^4 : (-4)^4]^{-3}$ (e) $\left(\frac{5}{6}\right)^6 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{-2} : \left(\frac{5}{6}\right)^{-4}$ (f) $[45^{-2} : (-3)^{-2}]$

(g) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-7}$ (h) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-1} : \left(\frac{1}{7}\right)^{-5} : \left(\frac{1}{7}\right)^9$

Ejercicio 6: Indica si los siguientes números son naturales, enteros, racionales o irracionales:

(a) 0'213213... (b) $\frac{15}{5}$ (c) -8

(d) $\frac{\pi}{3}$ (e) 4'178263... (f) 4'178263

Tema 2. Potencias, Radicales y Logaritmos

- 1. Potencias.

- *Potencias de exponente negativo*
- *Propiedades de las potencias*

- 2. Radicales.

- *2.1 Potencias de exponente fraccionario*
- *2.2 Extraer factores de un radical*
- *2.3 Suma y resta de radicales*
- *2.4 Reducción de radicales a índice común*
- *2.5 Multiplicación y división de radicales*
- *2.6 Potencias y raíces de radicales*

Raíz cuadrada

- La **raíz cuadrada** de un número es aquel número que, elevado al cuadrado, da lugar al número dentro de la raíz.

$$\sqrt{25} = 5 \iff 5^2 = 25$$

- Los números cuya raíz cuadrada es entera (1,4,9,16,25,...) se llaman cuadrados perfectos.
- La raíz cuadrada de un número positivo tiene dos soluciones, una positiva y otra negativa.
- Un número negativo no tiene raíz cuadrada.

Otras raíces: tercera, cuarta, . . .

- La **raíz tercera** de un número es aquel número que, elevado al cubo, da lugar al número dentro de la raíz.

$$\sqrt[3]{27} = 3 \iff 3^3 = 27$$

- La **raíz cuarta** de un número es aquel número que, elevado a la cuarta, da lugar al número dentro de la raíz.

$$\sqrt[4]{81} = 3 \iff 3^4 = 81$$

- Un número negativo no tiene raíz par (cuarta, sexta, . . .).

Raíz n-ésima

Se llama **raíz n-ésima** de un número a , a aquel número que elevado a n es igual a a .

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$$

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$

$$\sqrt[3]{-1000} = -10$$

$$\sqrt[4]{16} = 2 \text{ y } -2$$

$$\sqrt[4]{-16} = \text{No existe}$$

$$\sqrt[7]{128} = 2 \text{ y } -2$$

- Si n es par, no existe la raíz n -ésima de un número negativo.
- Si n es par, la raíz n -ésima de un número positivo tiene dos soluciones.
- Si n es impar, existe la raíz de cualquier número y es única.

Ejemplos:

$$\sqrt{64} = 8 \text{ y } -8$$

$$\sqrt{196} = 14 \text{ y } -14$$

$$\sqrt{400} = 20 \text{ y } -20$$

$$\sqrt{-64} = \text{No existe}$$

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$

$$\sqrt[4]{16} = 2$$

$$\sqrt[4]{-16} = \text{No existe}$$

$$\sqrt[10]{1024} = 2$$



Potencias de exponente fraccionario

Forma exponencial de los radicales: Una raíz o radical se puede expresar como una potencia, donde el exponente es una fracción. El denominador es el índice de la raíz. El numerador, el exponente del radicando.

$$\sqrt{3} = 3^{1/2}$$

$$\sqrt[3]{5} = 5^{1/3}$$

$$\sqrt[3]{6^2} = 6^{2/3}$$

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2^{3/2}$$

$$\sqrt[3]{625} = \sqrt[3]{5^4} = 5^{4/3}$$

(a) De radical a potencia:

- El índice de la raíz es el **denominador del exponente**.
- El exponente del número es el **numerador del exponente**.

$$\sqrt{15} \longrightarrow 15^{1/2}$$

$$\sqrt{15^7} \longrightarrow 15^{7/2}$$

$$\sqrt{3} \longrightarrow 3^{1/2}$$

$$\sqrt{3^5} \longrightarrow 3^{5/2}$$

$$\sqrt[3]{2} \longrightarrow 2^{1/3}$$

$$\sqrt[3]{2^2} \longrightarrow 2^{2/3}$$

$$\sqrt[4]{5} \longrightarrow 5^{1/4}$$

$$\sqrt[4]{5^3} \longrightarrow 5^{3/4}$$

$$\sqrt[6]{13} \longrightarrow 13^{1/6}$$

$$\sqrt[6]{13^9} \longrightarrow 13^{9/6}$$

(b) De potencia a radical:

- El denominador del exponente es el **índice de la raíz**.
- El numerador del exponente es el **exponente** del número.

$$5^{1/7} \longrightarrow \sqrt[7]{5}$$

$$5^{3/7} \longrightarrow \sqrt[7]{5^3}$$

$$3^{1/20} \longrightarrow \sqrt[20]{3}$$

$$3^{9/20} \longrightarrow \sqrt[20]{3^9}$$

$$2^{1/2} \longrightarrow \sqrt{2}$$

$$2^{5/2} \longrightarrow \sqrt{2^5}$$

$$6^{1/2} \longrightarrow \sqrt{6}$$

$$6^{3/2} \longrightarrow \sqrt{6^3}$$

$$10^{1/3} \longrightarrow \sqrt[3]{10}$$

$$10^{7/3} \longrightarrow \sqrt[3]{10^7}$$

Ejercicio 1: Transforma las siguientes potencias en radicales:

$$(a) 5^{1/6} =$$

$$(b) 3^{4/5} =$$

$$(c) 7^{2/3} =$$

$$(d) 3^{7/8} =$$

$$(e) 2^{1/5} =$$

$$(f) 8^{4/3} =$$

Ejercicio 2: Expresa en forma de potencia:

$$(a) \sqrt[3]{3^2}$$

$$(b) \sqrt[9]{(-6)^7}$$

$$(c) \sqrt[4]{3^3}$$

$$(d) \sqrt[3]{5^{-2}}$$

$$(e) \sqrt[3]{7^2}$$

2.2 Extraer factores de un radical

2.3 Suma y resta de radicales

Extraer factores de un radical

$$\sqrt[3]{3888}$$

(Ejemplo 1)

- 1 Descomponemos el número en factores primos

$$3888 = 2^4 \cdot 3^5$$

- 2 Dividimos los exponentes de cada factor entre el índice de la raíz:

- El cociente es el exponente con el que el factor sale fuera.
- El resto es el exponente con el que el factor queda dentro del radical.

Para el factor 2 $\rightarrow 4:3 \rightarrow$ Cociente 1 y resto 1

Para el factor 3 $\rightarrow 5:3 \rightarrow$ Cociente 1 y resto 2

- 3 Escribimos el resultado

$$\sqrt[3]{3888} = 2^1 \cdot 3^1 \cdot \sqrt[3]{2^1 \cdot 3^2} =$$

$$\boxed{6\sqrt[3]{18}}$$

Extraer factores de un radical

$$\sqrt[4]{3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^3}$$

(Ejemplo 2)

- 1 Descomponemos el número en factores primos
(Ya nos lo dan descompuesto) $3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^3$
- 2 Dividimos los exponentes de cada factor entre el índice de la raíz:
 - El cociente es el exponente con el que el factor sale fuera.
 - El resto es el exponente con el que el factor queda dentro del radical.

Para el factor 3 $\rightarrow 9:4 \rightarrow$ Cociente 2 y resto 1

Para el factor 5 $\rightarrow 4:4 \rightarrow$ Cociente 1 y resto 0

Para el factor 7 $\rightarrow 3:4 \rightarrow$ Cociente 0 y resto 3

- 3 Escribimos el resultado

$$\sqrt[4]{3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^3} = 3^2 \cdot 5^1 \cdot \sqrt[4]{3^1 \cdot 7^3} =$$

$$45\sqrt[4]{1029}$$

Extraer factores de un radical

$$\sqrt{1620}$$

(Ejemplo 3)

- 1 Descomponemos el número en factores primos

$$1620 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^1$$

- 2 Dividimos los exponentes de cada factor entre el índice de la raíz:

- El cociente es el exponente con el que el factor sale fuera.
- El resto es el exponente con el que el factor queda dentro del radical.

Para el factor 2 $\rightarrow 2:2 \rightarrow$ Cociente 1 y resto 0

Para el factor 3 $\rightarrow 4:2 \rightarrow$ Cociente 2 y resto 0

Para el factor 5 $\rightarrow 1:2 \rightarrow$ Cociente 0 y resto 1

- 3 Escribimos el resultado

$$\sqrt{1620} = 2^1 \cdot 3^2 \cdot \sqrt{5^1} =$$

$$18\sqrt{5}$$

Suma y resta de radicales Es necesario que sean **semejantes** (*mismo índice de la raíz y mismo radicando*).

Se suman o se restan los coeficientes y se dejan igual los radicales.

$$\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{4} + 5\sqrt[3]{4} = (1 - 3 + 5) \cdot \sqrt[3]{4} = \boxed{3\sqrt[3]{4}}$$

$$\sqrt{2} + 4\sqrt[3]{2} - 6\sqrt{2} = (1 - 6) \cdot \sqrt{2} + 4\sqrt[3]{2} = \boxed{-5\sqrt{2} + 4\sqrt[3]{2}}$$

$$2\sqrt{7} + \frac{\sqrt{7}}{3} = \left(2 + \frac{1}{3}\right) \cdot \sqrt{7} = \boxed{\frac{7}{3}\sqrt{7}}$$

Suma y resta de radicales

En ocasiones, es necesario **extraer factores** de los radicales para conseguir que los radicales sean semejantes:

$$5\sqrt{3} + \sqrt{27} - 4\sqrt{12} \quad (\text{Ejemplo 1})$$

- 1 Se extraen factores de los radicales.

$$5\sqrt{3} + \sqrt{3^3} - 4\sqrt{2^2 \cdot 3} = 5\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 4 \cdot 2\sqrt{3} =$$

$$5\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 8\sqrt{3}$$

- 2 Se suman o restan los radicales semejantes.

$$(5 + 3 - 8) \cdot \sqrt{3} = \boxed{0}$$

Suma y resta de radicales

En ocasiones, es necesario **extraer factores** de los radicales para conseguir que los radicales sean semejantes:

$$2\sqrt[3]{16} - 6\sqrt[3]{250} + 3\sqrt[3]{432}$$

(Ejemplo 2)

- 1 Se extraen factores de los radicales.

$$\begin{aligned} 2\sqrt[3]{2^4} - 6\sqrt[3]{2 \cdot 5^3} + 3\sqrt[3]{2^4 \cdot 3^3} &= 2 \cdot 2\sqrt[3]{2} - 6 \cdot 5\sqrt[3]{2} + 3 \cdot 2 \cdot 3\sqrt[3]{2} = \\ 4\sqrt[3]{2} - 30\sqrt[3]{2} + 18\sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

- 2 Se suman o restan los radicales semejantes.

$$(4 - 30 + 18) \cdot \sqrt[3]{2} = \boxed{-8\sqrt[3]{2}}$$

Suma y resta de radicales

En ocasiones, es necesario **extraer factores** de los radicales para conseguir que los radicales sean semejantes:

$$2\sqrt{216} - 5\sqrt{150} + \sqrt{96} - 3\sqrt{294} \quad (\text{Ejemplo 3})$$

- 1 Se extraen factores de los radicales.

$$2\sqrt{2^3 \cdot 3^3} - 5\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5^2} + \sqrt{2^5 \cdot 3} - 3\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7^2} =$$

$$2 \cdot 2^1 \cdot 3^1 \sqrt{2^1 \cdot 3^1} - 5 \cdot 5^1 \sqrt{2 \cdot 3} + 2^2 \sqrt{2^1 \cdot 3} - 3 \cdot 7^1 \sqrt{2 \cdot 3} =$$

$$12\sqrt{6} - 25\sqrt{6} + 4\sqrt{6} - 21\sqrt{6}$$

- 2 Se suman o restan los radicales semejantes.

$$(12 - 25 + 4 - 21) \cdot \sqrt{6} = \boxed{-30\sqrt{6}}$$

2.4 Reducción de radicales a índice común

2.5 Multiplicación y división de radicales

Reducción de radicales a índice común

Ejemplo 1: Reduce a índice común:

$$\sqrt{5} \text{ y } \sqrt[3]{7^4}$$

- 1 Expresamos como potencia

$$\sqrt{5} = 5^{1/2}$$

$$\sqrt[3]{7^4} = 7^{4/3}$$

- 2 Calculamos el mcm de los denominadores en los exponentes

$$\text{mcm}(2,3) = 6$$

- 3 Reducimos a común denominador y volvemos a forma de radical

$$\sqrt{5} = 5^{1/2} = 5^{3/6} \longrightarrow \sqrt[6]{5^3}$$

$$\sqrt[3]{7^4} = 7^{4/3} = 7^{8/6} \longrightarrow \sqrt[6]{7^8}$$

Reducción de radicales a índice común

Ejemplo 2: $\sqrt[4]{10}$ y $\sqrt[5]{3}$

- 1 Expresamos como potencia

$$\sqrt[4]{10} = 10^{1/4}$$

$$\sqrt[5]{3} = 3^{1/5}$$

- 2 Calculamos el mcm

$$\text{mcm}(4,5) = 20$$

- 3 Reducimos a común denominador y volvemos a forma de radical.

$$\sqrt[4]{10} = 10^{1/4} = 10^{5/20} \longrightarrow \sqrt[20]{10^5}$$

$$\sqrt[5]{3} = 3^{1/5} = 3^{4/20} \longrightarrow \sqrt[20]{3^4}$$

Simplificación de radicales: Expresando los radicales en forma de potencia, se pueden simplificar, igual que ocurre con las fracciones. Simplificar nos lleva a obtener la **forma exponencial irreducible**.

$$\sqrt[6]{16} = \sqrt[6]{2^4} = 2^{4/6} = 2^{2/3} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$$

$$\sqrt[9]{27} = \sqrt[9]{3^3} = 3^{3/9} = 3^{1/3} = \sqrt[3]{3}$$

$$\sqrt[16]{256} = \sqrt[16]{2^8} = 2^{8/16} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt[10]{243} = \sqrt[10]{3^5} = 3^{5/10} = 3^{1/2} = \sqrt{3}$$

Simplificación de radicales (y de potencias):

$$\sqrt[6]{8} \longrightarrow \sqrt[6]{2^3} \longrightarrow 2^{3/6} \longrightarrow \boxed{2^{1/2}}$$

$$\sqrt[4]{4} \longrightarrow \sqrt[4]{2^2} \longrightarrow 2^{2/4} \longrightarrow \boxed{2^{1/2}}$$

$$\sqrt[10]{32} \longrightarrow \sqrt[10]{2^5} \longrightarrow 2^{5/10} \longrightarrow \boxed{2^{1/2}}$$

$$\sqrt[9]{27} \longrightarrow \sqrt[9]{3^3} \longrightarrow 3^{3/9} \longrightarrow \boxed{3^{1/3}}$$

$$\sqrt[9]{125} \longrightarrow \sqrt[9]{5^3} \longrightarrow 5^{3/9} \longrightarrow \boxed{5^{1/3}}$$

$$\sqrt[6]{1000} \longrightarrow \sqrt[6]{10^3} \longrightarrow 10^{3/6} \longrightarrow \boxed{10^{1/2}}$$

Simplificación de radicales (y de potencias):

$$\sqrt[6]{8} \longrightarrow \sqrt[6]{2^3} \longrightarrow 2^{3/6} \longrightarrow 2^{1/2} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt[4]{4} \longrightarrow \sqrt[4]{2^2} \longrightarrow 2^{2/4} \longrightarrow 2^{1/2} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt[10]{32} \longrightarrow \sqrt[10]{2^5} \longrightarrow 2^{5/10} \longrightarrow 2^{1/2} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt[9]{27} \longrightarrow \sqrt[9]{3^3} \longrightarrow 3^{3/9} \longrightarrow 3^{1/3} = \sqrt[3]{3}$$

$$\sqrt[9]{125} \longrightarrow \sqrt[9]{5^3} \longrightarrow 5^{3/9} \longrightarrow 5^{1/3} = \sqrt[3]{5}$$

$$\sqrt[6]{1000} \longrightarrow \sqrt[6]{10^3} \longrightarrow 10^{3/6} \longrightarrow 10^{1/2} = \sqrt{10}$$

Ejercicio 1: Expresa en forma de potencia.

(a) $\sqrt[3]{11}$ (b) $\sqrt[7]{20^2}$ (c) $\sqrt[4]{3^3}$ (d) $\sqrt[10]{5^5}$

Ejercicio 2: Expresa en forma de raíz.

(a) $6^{7/3}$ (b) $2^{2/5}$ (c) $5^{11/14}$

Ejercicio 3: Simplifica los siguientes radicales

(a) $\sqrt[6]{121}$ (b) $\sqrt[14]{128}$ (c) $\sqrt[15]{243}$
(d) $\sqrt[9]{64}$ (e) $\sqrt[8]{64}$ (f) $\sqrt[12]{256}$

Ejercicio 4: Expresa con un solo radical

(a) $\sqrt{\sqrt{5}}$ (b) $\sqrt[3]{\sqrt{7}}$ (c) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{11}}}$ (d) $\sqrt[5]{\sqrt{\sqrt[10]{91}}}$

Multiplicación y división de radicales

Es necesario que tengan índice común.

$$\sqrt[7]{5^2} \cdot \sqrt[7]{5^3}$$

Ejemplo 1

- 1 Se reducen a índice común.

Ya tienen índice común

- 2 Se multiplican o dividen los radicandos

$$\sqrt[7]{5^2 \cdot 5^3} =$$

$$\boxed{\sqrt[7]{5^5}}$$

Multiplicación y división de radicales

Es necesario que tengan índice común.

$$\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[6]{2^3}$$

Ejemplo 2

- 1 Se reducen a índice común.

$$\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{2^4} \cdot \sqrt[6]{2^3} =$$

- 2 Se multiplican o dividen los radicandos

$$\sqrt[6]{2^4 \cdot 2^3} =$$

$$\sqrt[6]{2^7} = 2\sqrt[6]{2}$$

Multiplicación y división de radicales

Es necesario que tengan índice común.

$$\sqrt{7} : \sqrt[3]{5}$$

Ejemplo 3

- 1 Se reducen a índice común.

$$\sqrt{7} : \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{7^3} : \sqrt[6]{5^2} =$$

- 2 Se multiplican o dividen los radicandos

$$\sqrt[6]{7^3 : 5^2} = \sqrt[6]{\frac{7^3}{5^2}}$$

Ejercicio 1: Efectúa estas operaciones:

(a) $\sqrt{4} \cdot \sqrt[3]{5}$

(b) $\sqrt[3]{6} : \sqrt[4]{4}$

(c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[6]{4}$

(d) $\sqrt{5} : \sqrt[6]{9}$

Ejercicio 2: Simplifica estos radicales:

(a) $\sqrt{\sqrt[4]{8}}$

(b) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{10}}}$

(c) $\sqrt{\left(\sqrt[3]{5^2}\right)^6}$

(d) $\sqrt{\left(\sqrt[5]{3^{20}}\right)^{1/2}}$

Ejercicio 3: Simplifica estas operaciones con raíces:

(a) $-\sqrt{8} + 5\sqrt{50} - \frac{4}{5}\sqrt{18} + \sqrt{98} =$

(b) $14\sqrt[4]{48} + 3\sqrt[4]{80} - \sqrt[4]{243} - 9\sqrt[4]{5} =$

Ejercicio 1: Efectúa estas operaciones:

$$(a) \sqrt{4} \cdot \sqrt[3]{5}$$

$$\sqrt[6]{4^3} \cdot \sqrt[6]{5^2}$$

$$\sqrt[6]{4^3 : 5^2}$$

$$\sqrt[6]{\frac{4^3}{5^2}}$$

$$(b) \sqrt[3]{6} : \sqrt[4]{4}$$

$$\sqrt[12]{6^4} : \sqrt[12]{4^3}$$

$$\sqrt[12]{6^4 : 4^3}$$

$$\sqrt[12]{\frac{6^4}{4^3}}$$

Ejercicio 1: Efectúa estas operaciones:

$$(c) \sqrt{2} \cdot \sqrt[6]{4}$$

$$\sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{4}$$

$$\sqrt[6]{2^3 : 4}$$

$$\boxed{\sqrt[6]{2}}$$

$$(d) \sqrt{5} : \sqrt[6]{9}$$

$$\sqrt[6]{5^3} : \sqrt[6]{9}$$

$$\sqrt[6]{5^3 : 9}$$

$$\boxed{\sqrt[6]{\frac{5^3}{9}}}$$

Ejercicio 2: Simplifica estos radicales:

$$(a) \sqrt{\sqrt[4]{8}} = \sqrt[8]{8}$$

$$(b) \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{10}}} = \sqrt[12]{10}$$

$$(c) \sqrt{(\sqrt[3]{5^2})^6} = \sqrt[6]{5^{12}} = \boxed{5^2}$$

$$(d) \sqrt{(\sqrt[5]{3^{20}})^{1/2}} = \sqrt[10]{3^{10}} = \boxed{3}$$

Ejercicio 3: Simplifica estas operaciones con raíces:

$$(a) -\sqrt{8} + 5\sqrt{50} - \frac{4}{5}\sqrt{18} + \sqrt{98} =$$

$$-\sqrt{2^3} + 5\sqrt{2 \cdot 5^2} - \frac{4}{5}\sqrt{2 \cdot 3^2} + \sqrt{2 \cdot 7^2} =$$

$$-2 \cdot \sqrt{2} + 5 \cdot 5\sqrt{2} - \frac{4}{5} \cdot 3\sqrt{2} + 7 \cdot \sqrt{2} =$$

$$-2\sqrt{2} + 25\sqrt{2} - \frac{12}{5}\sqrt{2} + 7\sqrt{2} =$$

$$\left(-2 + 25 - \frac{12}{5} + 7\right) \cdot \sqrt{2}$$

$$\frac{138\sqrt{2}}{5}$$

Ejercicio 3: Simplifica estas operaciones con raíces:

$$(b) 14\sqrt[4]{48} + 3\sqrt[4]{80} - \sqrt[4]{243} - 9\sqrt[4]{5} =$$

$$14\sqrt[4]{2^4 \cdot 3} + 3\sqrt[4]{2^4 \cdot 5} - \sqrt[4]{3^5} - 9\sqrt[4]{5} =$$

$$14 \cdot 2\sqrt[4]{3} + 3 \cdot 2\sqrt[4]{5} - 3 \cdot \sqrt[4]{3} - 9\sqrt[4]{5} =$$

$$28\sqrt[4]{3} + 6\sqrt[4]{5} - 3 \cdot \sqrt[4]{3} - 9\sqrt[4]{5} =$$

$$25\sqrt[4]{3} - 3\sqrt[4]{5}$$

Operaciones con radicales

$$\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \quad (\text{Ejemplo 1})$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$\sqrt{6} - \sqrt{4}$$

$$\sqrt{6} - 2$$

$$\sqrt{7} \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{5}) \quad (\text{Ejemplo 2})$$

$$\sqrt{7} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{7} \cdot \sqrt{5}$$

$$\sqrt{21} + \sqrt{35}$$

Operaciones con radicales

$$-\sqrt{5} \cdot \left(2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \quad (\text{Ejemplo 3})$$

$$-2\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} + \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}}{3}$$

$$-2\sqrt{15} + \frac{\sqrt{15}}{3}$$

$$\left(-2 + \frac{1}{3} \right) \cdot \sqrt{15}$$

$$\frac{-5}{3} \cdot \sqrt{15}$$

$$\frac{-5\sqrt{15}}{3}$$

2.6 Potencias y Raíces de radicales

Potencias y raíces de radicales

$$(\sqrt{5})^3$$

(Ejemplo 1)

- 1 Se expresa en forma de potencia de exponente fraccionario.

$$(5^{1/2})^3$$

- 2 Se utilizan las propiedades de las potencias.

$$5^{3/2}$$

Potencias y raíces de radicales

$$\sqrt[4]{\sqrt{\sqrt[3]{14}}}$$

(Ejemplo 2)

- 1 Se expresa en forma de potencia de exponente fraccionario.

$$\sqrt[4]{\sqrt{\sqrt[3]{14^{1/3}}}} = \sqrt[4]{(\sqrt[3]{14^{1/3}})^{1/2}} = \left[(14^{1/3})^{1/2} \right]^{1/4} =$$

- 2 Se utilizan las propiedades de las potencias.

$$14^{1/24} = \boxed{\sqrt[24]{14}}$$

Potencias y raíces de radicales

$$\left(\sqrt{\left(\sqrt[3]{12}\right)^2}\right)^5$$

(Ejemplo 3)

- ① Se expresa en forma de potencia de exponente fraccionario.

$$\left(\sqrt{\left(12^{1/3}\right)^2}\right)^5 = \left(\left[\left(12^{1/3}\right)^2\right]^{1/2}\right)^5 =$$

- ② Se utilizan las propiedades de las potencias.

$$(12)^{10/6} = (12)^{5/3} = \boxed{\sqrt[3]{12^5}}$$

Tema 2. Potencias, Radicales y Logaritmos

- **1. Potencias.**

- *Potencias de exponente negativo*
- *Propiedades de las potencias*

- **2. Radicales.**

- *2.1 Potencias de exponente fraccionario*
- *2.2 Extraer factores de un radical*
- *2.3 Suma y resta de radicales*
- *2.4 Reducción de radicales a índice común*
- *2.5 Multiplicación y división de radicales*
- *2.6 Potencias y raíces de radicales*

- **3. Racionalización.**

Racionalización

Racionalizar una fracción con radicales en el denominador es hallar una fracción equivalente **sin radicales** en el denominador.

- ① **Caso 1:** Un solo radical en el denominador.

$$\frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{6^2}}$$

$$\frac{10}{\sqrt[8]{5^3}}$$

- ② **Caso 2:** Un binomio que incluye un radical en el denominador.

$$\frac{5}{\sqrt{2} + 4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$$

Caso 1: Un solo radical en el denominador

$$\frac{3}{\sqrt{5}}$$

(Ejemplo 1)

- 1 Multiplicamos numerador y denominador por una raíz que permita que se vaya la raíz del denominador.

$$\frac{3 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}$$

- 2 Resolvemos las operaciones.

$$\frac{3 \cdot \sqrt{5}}{5}$$

Caso 1: Un solo radical en el denominador

$$\frac{1}{\sqrt[5]{6^2}}$$

(Ejemplo 2)

- 1 Multiplicamos numerador y denominador por una raíz que permita que se vaya la raíz del denominador.

$$\frac{1 \cdot \sqrt[5]{6^3}}{\sqrt[5]{6^2} \cdot \sqrt[5]{6^3}}$$

- 2 Resolvemos las operaciones.

$$\frac{\sqrt[5]{6^3}}{\sqrt[5]{6^5}} = \boxed{\frac{\sqrt[5]{6^3}}{6}}$$

Caso 1: Un solo radical en el denominador

$$\frac{10}{\sqrt[8]{5^3}}$$

(Ejemplo 3)

- 1 Multiplicamos numerador y denominador por una raíz que permita que se vaya la raíz del denominador.

$$\frac{10 \cdot \sqrt[8]{5^5}}{\sqrt[8]{5^3} \cdot \sqrt[8]{5^5}}$$

- 2 Resolvemos las operaciones.

$$\frac{10 \cdot \sqrt[8]{5^5}}{\sqrt[8]{5^8}} = \frac{10 \cdot \sqrt[8]{5^5}}{5} = \boxed{2 \cdot \sqrt[8]{5^5}}$$

Ejercicio 1: Racionaliza las siguientes fracciones:

(a) $\frac{4}{\sqrt{7}}$

(b) $\frac{-3}{\sqrt{2}}$

(c) $\frac{6}{\sqrt[3]{2}}$

(d) $\frac{3}{2\sqrt{3}}$

(e) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3^3}}$

(f) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}}$

Ejercicio 2: Realiza las siguientes operaciones con radicales:

(a) $\sqrt[3]{135} - \sqrt[3]{625} + 3\sqrt[3]{1080}$

(b) $\sqrt[5]{7^3} \cdot \sqrt{7}$

(c) $\sqrt[4]{3^3} : \sqrt[6]{3^3}$

Conjugado de una expresión

El **conjugado** de una expresión es el resultado de cambiar el signo (*las sumas se convierten en restas; las restas se convierten en sumas*)

	Conjugado
$A + B$	$A - B$
$A - B$	$A + B$
$3 - \sqrt{2}$	$3 + \sqrt{2}$
$\sqrt{5} + \sqrt{3}$	$\sqrt{5} - \sqrt{3}$
$\sqrt{3} - 1$	$\sqrt{3} + 1$

Conjugado de una expresión

Si multiplicamos una expresión por su conjugado el resultado es el cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término.

$$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$$

$$(3 - \sqrt{2}) \cdot (3 + \sqrt{2}) = 3^2 - (\sqrt{2})^2 = 9 - 2 = 7$$

$$(\sqrt{5} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2 = 5 - 3 = 2$$

$$(\sqrt{3} - 1) \cdot (\sqrt{3} + 1) = (\sqrt{3})^2 - 1^2 = 3 - 1 = 2$$

Caso 2: Un binomio que incluye (*al menos*) un radical en el denominador

$$\frac{5}{\sqrt{2} + 4}$$

(Ejemplo 1)

- 1 Multiplicamos numerador y denominador por el **conjugado** del denominador.

$$\frac{5 \cdot (\sqrt{2} - 4)}{(\sqrt{2} + 4) \cdot (\sqrt{2} - 4)}$$

- 2 Resolvemos y simplificamos.

$$\frac{5\sqrt{2} - 20}{(\sqrt{2})^2 - 4^2} =$$

$$\frac{5\sqrt{2} - 20}{2 - 16} =$$

$$\boxed{\frac{20 - 5\sqrt{2}}{14}}$$

Caso 2: Un binomio que incluye (*al menos*) un radical en el denominador

$$\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$$

(Ejemplo 2)

- 1 Multiplicamos numerador y denominador por el **conjugado** del denominador.

$$\frac{1 \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{5})}{(\sqrt{3} + \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{5})}$$

- 2 Resolvemos y simplificamos.

$$\frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{9 - 25} = \boxed{\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{16}}$$

Caso 2: Un binomio que incluye (*al menos*) un radical en el denominador

$$\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$$

(Ejemplo 3)

- 1 Multiplicamos numerador y denominador por el **conjugado** del denominador.

$$\frac{1 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})}$$

- 2 Resolvemos y simplificamos.

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2 - 3} = \boxed{-\sqrt{2} - \sqrt{3}}$$

Ejercicio 2: Racionaliza las siguientes fracciones.

$$(a) \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

$$(b) \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

$$(c) \frac{3\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$$

$$(d) \frac{-2}{\sqrt{3} - 8}$$

$$(e) \frac{-10}{\sqrt{13} - 5}$$

$$(f) \frac{2}{\sqrt{17}}$$

$$(g) \frac{-25}{\sqrt{2}}$$

$$(h) \frac{5}{3\sqrt[7]{2^2}}$$

Tema 2. Potencias, Radicales y Logaritmos

- **1. Potencias.**

- *Potencias de exponente negativo*
- *Propiedades de las potencias*

- **2. Radicales.**

- *2.1 Potencias de exponente fraccionario*
- *2.2 Extraer factores de un radical*
- *2.3 Suma y resta de radicales*
- *2.4 Reducción de radicales a índice común*
- *2.5 Multiplicación y división de radicales*
- *2.6 Potencias y raíces de radicales*

- **3. Racionalización.**

- **4. Notación científica.**

Notación científica

Es una forma de expresar números muy grandes y muy pequeños con objeto de facilitar su escritura, su expresión y los cálculos que se realicen con el.

• Números muy grandes:

- 1 Distancia Tierra-Plutón $5\,769\,000\,000\text{ km} = 5'769 \cdot 10^6\text{ km}$
- 2 Deuda Pública España $1\,138\,899\,000\,000\text{ euros} \approx 1'1389 \cdot 10^{12}\text{ euros}$
- 3 Masa de la Luna $74\,000\,000\,000\,000\,000\,000\text{ toneladas} = 7'4 \cdot 10^{19}\text{ toneladas}$
 $= 7'4 \cdot 10^{22}\text{ kg}$

• Números muy pequeños

- 1 Un nanogramo $0'000\,000\,001\text{ gramos} = 1 \cdot 10^{-9}\text{ gramos} = 1 \cdot 10^{-12}\text{ kg}$
- 2 $0'000\,0015\text{ cm} = 1'5 \cdot 10^{-6}\text{ cm} = 1'5 \cdot 10^{-8}\text{ m}$

Notación científica

(Potencias de base 10)

Una **potencia de base 10 y exponente positivo** es igual a la unidad seguida de tantos ceros como indique el exponente:

$$10^2 = 100$$

$$10^3 = 1000$$

$$10^4 = 10\ 000$$

$$10^5 = 100\ 000$$

$$10^6 = 1\ 000\ 000$$

$$10^7 = 10\ 000\ 000$$

$$10^9 = 1\ 000\ 000\ 000 \text{ (Mil millones)}$$

$$10^{12} = 1\ 000\ 000\ 000\ 000 \text{ (Un billón)}$$

$$10^{18} = 1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000 \text{ (Un trillón)}$$

Notación científica

(Potencias de base 10)

Una **potencia de base 10 y exponente negativo** es igual a la unidad dividida entre dicha potencia con exponente positivo:

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0'1$$

$$10^{-2} = \frac{1}{100} = 0'01$$

$$10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0'001$$

$$10^{-4} = \frac{1}{10000} = 0'0001$$

$$10^{-5} = \frac{1}{100000} = 0'00001$$

$$10^{-6} = \frac{1}{1000000} = 0'000001$$

$$10^{-9} = \frac{1}{1000000000} = 0'000000001$$

$$10^{12} = \frac{1}{1000000000000} = 0'000000000001$$

Notación científica (Normas):

Un número en **notación científica** consta de dos factores: un número decimal y una potencia de base 10.

- El número decimal es mayor o igual que 1 y menor que 10.
- La potencia de base 10 tiene exponente entero.

Ejemplos:

$$① \quad 222\,000\,000 \text{ euros} = 2'22 \cdot 10^8 \text{ euros}$$

$$② \quad 0'000\,000\,000\,040\,9 = 4'09 \cdot 10^{-11}$$

$$③ \quad 0'000\,000\,987 = 9'87 \cdot 10^{-7}$$

Cómo convertir a notación científica (números grandes):

56 000 000

- 1 **(Parte entera)** Colocamos la coma decimal a la derecha de la primera cifra distinta de cero.

5'6

- 2 **(Potencia de 10)** La potencia de 10 estará elevada al número de cifras que hay desde el nuevo lugar de la coma hasta el final del número.

5'6 · 10⁷

Cómo convertir a notación científica (números pequeños):

0'000 000 07

- 1 **(Parte entera)** Colocamos la coma decimal a la derecha de la primera cifra distinta de cero.

7

- 2 **(Potencia de 10)** La potencia de 10 estará elevada en negativo al número de cifras que se ha desplazado la coma.

$7 \cdot 10^{-8}$

Notación científica: Operaciones

Suma y resta:

$$1'04 \cdot 10^{-7} + 2'6 \cdot 10^{-7}$$

Ejemplo 1

- 1 Se preparan los números, de modo que ambas cantidades tengan la misma potencia de base 10.

(Ya tienen la misma potencia de base 10)

- 2 Se saca factor común la potencia base 10.

$$(1'04 + 2'6) \cdot 10^{-7}$$

- 3 Se suman o se restan los números, manteniendo la misma potencia base 10.

$$3'64 \cdot 10^{-7}$$

Notación científica: Operaciones

Suma y resta:

$$2'1 \cdot 10^3 + 3'2 \cdot 10^2$$

Ejemplo 2

- 1 Se preparan los números, de modo que ambas cantidades tengan la misma potencia de base 10.

$$\begin{aligned} 2'1 \cdot 10^3 + 3'2 \cdot 10^2 &= 2'1 \cdot 10 \cdot 10^2 + 3'2 \cdot 10^2 = \\ 21 \cdot 10^2 + 3'2 \cdot 10^2 \end{aligned}$$

- 2 Se saca factor común la potencia base 10.

$$(21 + 3'2) \cdot 10^2$$

- 3 Se suman o se restan los números, manteniendo la misma potencia base 10.

$$24'2 \cdot 10^2 = 2'42 \cdot 10 \cdot 10^2 = \boxed{2'42 \cdot 10^3}$$

Notación científica: Operaciones

Suma y resta:

$$3'9 \cdot 10^{-3} + 1'27 \cdot 10^{-2}$$

Ejemplo 3

- 1 Se preparan los números, de modo que ambas cantidades tengan la misma potencia de base 10.

$$3'9 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-2} + 1'27 \cdot 10^{-2} = \frac{3'9}{10} \cdot 10^{-2} + 1'27 \cdot 10^{-2} =$$

$$0'39 \cdot 10^{-2} + 1'27 \cdot 10^{-2}$$

- 2 Se saca factor común la potencia base 10.

$$(0'39 + 1'27) \cdot 10^{-2}$$

- 3 Se suman o se restan los números, manteniendo la misma potencia base 10.

$$1'66 \cdot 10^{-2}$$

Ejercicio 1: Expresa los siguientes números en notación científica:

(a) 80 000 000 000 000 000 =

(b) 0'000 804 =

(c) 37 404 000 000 =

(d) 0'000 000 000 090 =

Ejercicio 2: Realiza las siguientes sumas en notación científica:

(a) $3'1 \cdot 10^6 + 2'8 \cdot 10^5 =$

(b) $5'1 \cdot 10^{-7} + 9 \cdot 10^{-8} =$

Ejercicio 3: Racionaliza las siguientes fracciones:

(a) $\frac{-3}{\sqrt{6}}$

(b) $\frac{7}{\sqrt[3]{10}}$

(c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10} + \sqrt{5}}$

(d) $\frac{\sqrt{3}}{1 - \sqrt{5}}$

Ejercicio 2: Realiza las siguientes sumas en notación científica:

$$(a) 3'1 \cdot 10^6 + 2'8 \cdot 10^5 =$$

$$3'1 \cdot 10 \cdot 10^5 + 2'8 \cdot 10^5$$

$$31 \cdot 10^5 + 2'8 \cdot 10^5$$

$$33'8 \cdot 10^5$$

$$3'38 \cdot 10 \cdot 10^5$$

$$\boxed{3'38 \cdot 10^6}$$

Ejercicio 2: Realiza las siguientes sumas en notación científica:

$$(b) 5'1 \cdot 10^{-7} + 9 \cdot 10^{-8} =$$

$$5'1 \cdot 10 \cdot 10^{-8} + 9 \cdot 10^{-8}$$

$$51 \cdot 10^{-8} + 9 \cdot 10^{-8}$$

$$60 \cdot 10^{-8}$$

$$6 \cdot 10 \cdot 10^{-8}$$

$$\boxed{6 \cdot 10^{-7}}$$

Ejercicio 3: Racionaliza las siguientes fracciones:

$$(a) \frac{-3}{\sqrt{6}} = \frac{-3 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}}$$

$$\frac{-3\sqrt{6}}{6} = \boxed{\frac{-\sqrt{6}}{2}}$$

$$(b) \frac{7}{\sqrt[3]{10}} = \frac{7 \cdot \sqrt[3]{10^2}}{\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{10^2}}$$

$$\boxed{\frac{7 \cdot \sqrt[3]{10^2}}{10}}$$

Ejercicio 3: Racionaliza las siguientes fracciones:

$$(c) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10} + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{10} - \sqrt{5})}{(\sqrt{10} + \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{10} - \sqrt{5})}$$

$$\frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{10} - \sqrt{5})}{10 - 5} = \boxed{\frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{10} - \sqrt{5})}{5}}$$

$$(d) \frac{\sqrt{3}}{1 - \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3} \cdot (1 + \sqrt{5})}{(1 - \sqrt{5}) \cdot (1 + \sqrt{5})}$$

$$\frac{\sqrt{3} \cdot (1 + \sqrt{5})}{1 - 5} = \boxed{\frac{-\sqrt{3} \cdot (1 + \sqrt{5})}{4}}$$

Notación científica: Operaciones

Multiplicación y división:

$$(5'2 \cdot 10^{-5}) \cdot 2 \cdot 10^{-3}$$

(Ejemplo 1)

- 1 Se multiplican o dividen los números (*de forma normal*).

$$5'2 \cdot 2 = 10'4$$

- 2 Se multiplican o dividen las potencias de base 10 (*producto o cociente de potencias con la misma base*).

$$10^{-5} \cdot 10^{-3} = 10^{-8}$$

$$\text{Resultado: } 10'4 \cdot 10^{-8} = 1'04 \cdot 10 \cdot 10^{-8} = \boxed{1'04 \cdot 10^{-7}}$$

Notación científica: Operaciones

Multiplicación y división:

$$(1'2 \cdot 10^6) : (2'4 \cdot 10^8)$$

(Ejemplo 2)

- 1 Se multiplican o dividen los números (*de forma normal*).

$$1'2 : 2'4 = 0'5$$

- 2 Se multiplican o dividen las potencias de base 10 (*producto o cociente de potencias con la misma base*).

$$10^6 : 10^8 = 10^{-2}$$

$$\text{Resultado: } 0'5 \cdot 10^{-2} = \frac{5}{10} \cdot 10^{-2} = 5 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-2} = \boxed{5 \cdot 10^{-3}}$$

Notación científica: Operaciones

Multiplicación y división:

$$(1'2 \cdot 10^{-2}) : (6 \cdot 10^2)$$

(Ejemplo 3)

- 1 Se multiplican o dividen los números (*de forma normal*).

$$1'2 : 6 = 0'2$$

- 2 Se multiplican o dividen las potencias de base 10 (*producto o cociente de potencias con la misma base*).

$$10^{-2} : 10^2 = 10^{-4}$$

$$\text{Resultado: } 0'2 \cdot 10^{-4} = \frac{2}{10} \cdot 10^{-4} = 2 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-4} = \boxed{2 \cdot 10^{-5}}$$

Tema 2. Potencias, Radicales y Logaritmos

- **1. Potencias.**

- *Potencias de exponente negativo*
- *Propiedades de las potencias*

- **2. Radicales.**

- *2.1 Potencias de exponente fraccionario*
- *2.2 Extraer factores de un radical*
- *2.3 Suma y resta de radicales*
- *2.4 Reducción de radicales a índice común*
- *2.5 Multiplicación y división de radicales*
- *2.6 Potencias y raíces de radicales*

- **3. Racionalización.**

- **4. Notación científica.**

- **5. Logaritmos. Propiedades de los logaritmos.**

Logaritmos:

- Descubiertos en el siglo XV, este método contribuyó al avance de la ciencia, y especialmente de la astronomía, facilitando la resolución de cálculos muy complejos. Los logaritmos fueron utilizados habitualmente en geodesia, navegación marítima y otras ramas de la matemática aplicada.
- Otras aplicaciones:
 - *Medicamentos*
 - *Terremotos (Escala de Richter)*
 - *Calculos Económicos (Interés complejo)*

Logaritmos

Dados dos números positivos a y b , con $a \neq 1$, el logaritmo en base a de b , $\log_a b$, es el exponente al que hay que elevar a para obtener b .

$$\log_a b = c \text{ si se cumple que } a^c = b$$

$$\log_2 16 =$$

$$\log_6 36 =$$

$$\log_3 \frac{1}{9} =$$

$$\log_5 125 =$$

$$\log_2 0'5 =$$

$$\log_5 \frac{1}{3125} =$$

Logaritmos

Dados dos números positivos a y b , con $a \neq 1$, el logaritmo en base a de b , $\log_a b$, es el exponente al que hay que elevar a para obtener b .

$$\log_a b = c \text{ si se cumple que } a^c = b$$

$$\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$$

$$\log_6 36 = \log_6 6^2 = 2$$

$$\log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2$$

$$\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$$

$$\log_2 0'5 = \log_2 2^{-1} = -1$$

$$\log_5 \frac{1}{3125} = \log_5 5^{-5} = -5$$

Logaritmo decimal (base 10) y neperiano (base e)

Existen dos tipos de logaritmos más utilizados:

- 1 **Logaritmo decimal:** Cuando el logaritmo tiene base 10. En ese caso la base no se escribe. Se obtiene en la calculadora pulsando *log*.
- 2 **Logaritmo neperiano:** Cuando el logaritmo tiene base el número e = 2'71828... Se representa como *ln*.

El logaritmo neperiano se utiliza, por ejemplo, para representar la **escala de Richter** que mide los terremotos:

$$\ln \text{ Fuerza terremoto} = \text{Escala Richter}$$

Si un terremoto es 4'5 en la escala Richter (*mini-terremoto*) tiene una fuerza de 90 (*aprox.*)

Si un terremoto es 9 en la escala Richter (*super-destructor*) tiene una fuerza de 8100 (*aprox.*) (Noventa veces más fuerte)

Logaritmo decimal (base 10)

Cuando el logaritmo tiene base 10. En ese caso la base no se escribe. Se obtiene en la calculadora pulsando *log*.

$$\log 10 = 1 \text{ porque } 10^1 = 10$$

$$\log 100 = 2 \text{ porque } 10^2 = 100$$

$$\log 0'1 = -1 \text{ porque } 10^{-1} = 0'1$$

$$\log 0'01 = -2 \text{ porque } 10^{-2} = 0'01$$

$$\log 10\ 000 = 4 \text{ porque } 10^4 = 10\ 000$$

$$\log 0'000\ 001 = -6 \text{ porque } 10^{-6} = 0'000\ 001$$

Para calcular el logaritmo de valores que no sean potencias de 10, será necesario utilizar la calculadora.

Logaritmo neperiano (base $e = 2'71828\dots$)

Cuando el logaritmo tiene el número $e = 2'71828\dots$. Se representa con \ln .

$$\ln e = 1 \text{ porque } e^1 = e$$

$$\ln e^5 = 5$$

$$\ln \frac{1}{e^2} = -2 \text{ porque } \frac{1}{e^2} = e^{-2}$$

$$\ln \frac{1}{e^5} = -5 \text{ porque } \frac{1}{e^5} = e^{-5}$$

Para calcular el logaritmo de valores que no sean potencias de $e = 2'71828\dots$, será necesario utilizar la calculadora.

Propiedades de los logaritmos

- Propiedad 1

$$\log_a 1 = 0 \text{ para cualquier base } a$$

- Propiedad 2

$$\log_a a = 1$$

(si la base y el número del que se calcula el logaritmo son iguales, el logaritmo vale 1)

Propiedades de los logaritmos

- **Propiedad 3:** El **logaritmo de un producto** es la suma de los logaritmos:

$$\log_a b \cdot c = \log_a b + \log_a c$$

Ejemplo 1: $\log_2 8 \cdot 4 = \log_2 8 + \log_2 4 = 3 + 2 = 5$

Ejemplo 2: $\log 25 + \log 4 = \log 25 \cdot 4 = \log 100 = 2$

Ejemplo 3:

$$\log_7 49\sqrt{7} = \log_7 49 + \log_7 \sqrt{7} = \log_7 7^2 + \log_7 7^{1/2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Propiedades de los logaritmos

- **Propiedad 4:** El **logaritmo de un cociente** es la diferencia de los logaritmos:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

Ejemplo 1: $\log_3 \frac{1}{9} = \log_3 1 - \log_3 9 = 0 - 2 = -2$

Ejemplo 2: $\log_5 10 - \log_5 2 = \log_5 \frac{10}{2} = \log_5 5 = 1$

Ejemplo 3: $\log 3000 - \log 30 = \log \frac{3000}{30} = \log 100 = 2$

Propiedades de los logaritmos

- **Propiedad 5:** El **logaritmo de una potencia** es el producto del exponente por el logaritmo de la base:

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

Ejemplo 1: $\log_2 9 = \log_2 3^2 = 2 \cdot \log_2 3$

Ejemplo 2: $7 \ln 2 = \ln 2^7 = \ln 128$

Ejemplo 3:

$$\log_4 32 = \log_4 (4^2 \cdot 2) = \log_4 4^2 + \log_4 2 = 2 + \log_4 4^{1/2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Ejercicio 1: Resuelve utilizando las propiedades de los logaritmos:

(a) $\log_5 1 + 2\log_5 5 =$

(b) $\log_2 24 - \log_2 6 =$

(c) $\log 2 + \log 25 - \log 5 =$

(d) $\log_{12} 18 + \log_{12} 4 + \log_{12} 2 =$

(e) $\log_6 150 - \log_6 25 =$

Ejercicio 2: Resuelve utilizando las propiedades de los logaritmos:

(a) $\log_{15}15 + \log 10 + \ln e =$

(b) $3\log_4 2 + \log_4 32 =$

(c) $\log_6 108 - \log_6 3 =$

(d) $\log_2 18 + 2\log_2 3 - \log_2 81$

Ejercicio 3: Expresa como un único logaritmo:

(a) $3\log_2 5 + \log_2 7 =$

(b) $2\log_5 3 + \log_5 10 =$

(c) $\log_4 9 - 2\log_4 5 =$

(d) $3\log_7 1 + \log_7 6 =$

Ejercicio 2b: Resuelve utilizando las propiedades de los logaritmos:

(a) $\log 5 + 2 \cdot \log 5 + \log 8 =$ (b) $\log_7 70 - \log_7 20 - \log_7 5 =$

(c) $\log_5 30 + \log_5 15 - \log_5 18 =$ (d) $\log_6 \frac{1}{3} + \log_6 3 - (\log_6 2 + \log_6 3) =$

Ejercicio 3b: Calcula, sin calculadora, los siguientes logaritmos:

(a) $3\log_2 5 + \log_2 7 =$ (b) $2\log_5 3 + \log_5 10 =$

(c) $\log_4 9 - 2\log_4 5 =$ (d) $3\log_7 1 + \log_7 6 =$

Ejercicio 3c: Calcula $\log 7$ sabiendo que $\log 0'7 = -0'1549$

Ejercicio 2b: Resuelve utilizando las propiedades de los logaritmos:

$$(a) \log 5 + 2 \cdot \log 5 + \log 8 =$$

$$\log 5 + \log 5^2 + \log 8$$

$$\log 5 \cdot 5^2 \cdot 8$$

$$\log 1000$$

$$\boxed{3} \text{ (ya que } 10^3 = 1000)$$

$$(b) \log_7 70 - \log_7 20 - \log_7 5 =$$

$$\log_7 \frac{70}{20} - \log_7 5$$

$$\log_7 3 \cdot 5 - \log_7 5$$

$$\log_7 \frac{3 \cdot 5}{5}$$

$$\log_7 0'7$$

Ejercicio 2b: Resuelve utilizando las propiedades de los logaritmos:

$$(c) \log_5 30 + \log_5 15 - \log_5 18 =$$

$$\log_5 30 \cdot 15 - \log_5 18$$

$$\log_5 \frac{30 \cdot 15}{18}$$

$$\log_5 25$$

$$\boxed{2} \text{ (ya que } 5^2 = 25)$$

$$(d) \log_6 \frac{1}{3} + \log_6 3 - (\log_6 2 + \log_6 3) =$$

$$\log_6 \frac{1}{3} \cdot 3 - \log_6 2 \cdot 3$$

$$\log_6 1 - \log_6 6$$

$$0 - 1$$

$$\boxed{-1}$$

Ejercicio 3c: Calcula $\log 7$ sabiendo que $\log 0'7 = -0'1549$
Tenemos que relacionar $\log 0'7$ (conocido) con $\log 7$ (desconocido)

$$-0'1549 = \log 0'7 = \log \frac{7}{10}$$

Pero utilizando la Propiedad 4 sabemos que:

$$\log \frac{7}{10} = \log 7 - \log 10 \text{ siendo } \log 10 = 1$$

Por lo tanto: $-0'1549 = \log 7 - 1$

Resolvemos la ecuación y queda:

$$1 - 0'1549 = \log 7 \quad \implies \quad \boxed{0'8451 = \log 7}$$

Ejercicio 4: Calcula x para que se resuelva la igualdad:

$$(a) \log_x \frac{4}{9} = 2$$

$$(b) \log_x \sqrt{5} = \frac{1}{2}$$

$$(c) \log_x \sqrt[3]{6} = \frac{1}{3}$$

$$(d) \log_x 32 = 10$$

Ejercicio 5: Resuelve estas ecuaciones con logaritmos:

$$(a) \log x + \log 2 = \log 20$$

$$(b) \log x + \log 2x = \log 50$$

$$(c) \log 2x - 2\log 3 = \log 2$$

$$(d) \log_2 x^2 - \log_2 x = 3$$