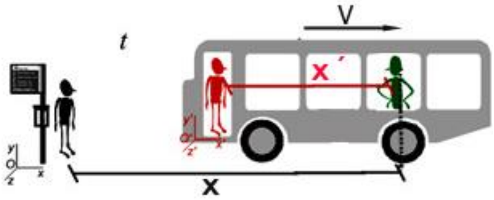
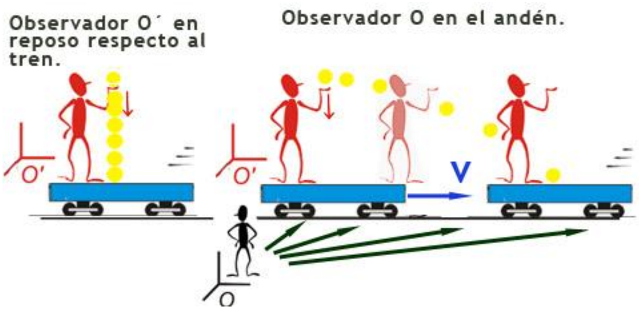
L1 .Cinemática.

1- Movimiento. Sistema de Referencia



El ***movimiento*** es el cambio de posición de un punto respecto a otro que se tiene como referencia.

El ***movimiento es relativo***, depende del ***sistema de referencia***. En la imagen el pasajero (verde) que está en la parte delantera de un bus que se mueve a una velocidad v, está en reposo respecto al pasajero (rojo) del bus -sistema referencia O´- pero en movimiento respecto al peatón que espera en la parada (negro) -sistema de referencia O.

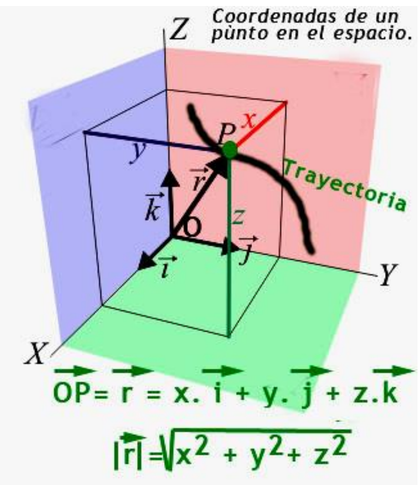


Un sistema de ***referencia inercial (SRI)*** es aquel que cumple la ***ley de inercia***- todo cuerpo mantiene su estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme- a menos que actúe una fuerza exterior. En la imagen el vagón que se aleja con velocidad v uniforme y rectilínea respecto al sistema de referencia del observador del andén es un ejemplo de SRI.

Ejercicio 1: Indica si se trata de sistema referencia inercial respecto a la Tierra: a) Coche que se aleja en un tramo de autopista recta a 105 km/h. b) Niños que van en una cesta de una noria recreativa. c) Coche apartado a) que está frenando respecto asientos.

a) Los ejes fijos del coche son un SRI porque se mueve en línea recta y a v uniforme respecto Tierra.
b) Los ejes coordenadas de la noria es un sistema de referencia no inercial pues no siguen un movimiento rectilíneo uniforme respecto Tierra sino que describen circunferencias.
c) Respecto al sistema de referencia fijo de los asientos, los pasajeros se mueven hacia adelante sin que actúe una fuerza. Es un sistema de referencia no inercial.

El ***principio de relatividad de Galileo*** dice que ***en todos SRI se cumplen las mismas leyes de la mecánica***. Fíjate en la figura del vagón. La persona en el andén (O) no ve caer el objeto con en línea recta pues además de caer se mueve con el tren. Los dos observadores miden valores de la velocidad y posición de la pelota amarilla diferentes, pero ambos sistema de referencia inerciales miden la misma aceleración de caída de la pelota.



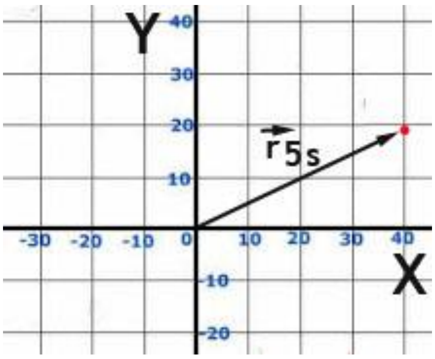
Para determinar la posición de un punto P en un instante utilizamos un ***sistema cartesiano de referencia***. Puede tratarse:

a) Movimiento una dimensión. Línea recta eje OX.
b) Movimiento dos dimensiones. Plano con ejes OX (horizontal) , OY (vertical)
c) Movimiento tres dimensiones. Sistema de tres ejes OX, OY , OZ (figura).

Trayectoria: Conjunto de puntos por donde pasa el objeto (P) a lo largo del tiempo. Según la trayectoria: movimientos rectilíneos y curvilíneos.

Vector de posición $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ es el vector con origen en O y extremo en punto P. Se tendrá: $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$; x,y,z –proyecciones del vector sobre cada eje ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ - vectores unitarios. Para el módulo del vector de posición $|\vec{r}|$se aplica Pitágoras.(fig)

Ejercicio 2: Se trata de un movimiento en dos dimensiones: plano XY, cuya ecuación de movimiento de la partícula está dada por las ecuaciones: x= 8t ; y = 4t-2 (x,y en m; t en s)



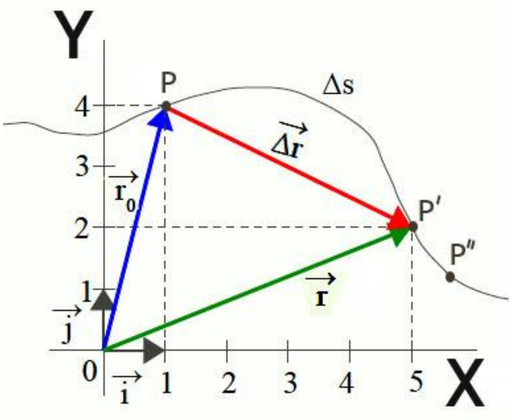
Se pide: a) La posición de la partícula en cualquier instante. b) ¿Dónde se encuentra a los 5 s?. c) Distancia al origen a los 5 s.

a) $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = 8t\vec{\imath} + (4t-2)\vec{\jmath}$

b) $\vec{r}_{5\,s} = 8t\vec{\imath} + (4t-2)\vec{\jmath} = 40\vec{\imath} + 18\vec{\jmath}$ *(ver fig. vector posición a 5 s)*

c) $|\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{40^2+18^2}$= 43,86 m *(distancia O al punto P a los 5 s)*

Desplazamiento: Fíjate en la figura inferior. El móvil sigue una trayectoria curva y a lo largo del tiempo ocupa las posiciones P, P´, P´´ . Si en un instante el móvil se encuentra en P (x_o,y_o) y al cabo de un tiempo t se encuentra en P´(x,y), diremos que el móvil se ha desplazado desde P a P´ y definimos:



vector desplazamiento= $\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r} - \vec{r}_o = (x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}) - (x_o\vec{\imath}+y_o\vec{\jmath})$
distancia recorrida sobre la trayectoria =Δs

El módulo del vector desplazamiento: $|\overrightarrow{\Delta r}| = \sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}$

Ejercicio 3: Con los datos de la figura de la izquierda en SI el punto P realiza una trayectoria de 6,4 metros y al cabo de 5 segundos se halla en la posición P´. Hallar: a) El vector desplazamiento. b) Módulo del vector desplazamiento. c) Distancia recorrida.

a) $\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r} - \vec{r}_o = (5\vec{\imath}+2\vec{\jmath}) - (\vec{\imath}+4\vec{\jmath}) = 4\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$

b) $|\overrightarrow{\Delta r}| = \sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2} = \sqrt{(4)^2+(-2)^2} = 4{,}48\ m$; c) Δs= 6,4 m

2 - <u>Velocidad: media e instantánea</u>

La velocidad es una magnitud vectorial, viene dada por el módulo, dirección y sentido. Distinguimos:

Velocidad media $\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{m}} = \frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta\mathbf{t}}$ - es cociente entre el vector desplazamiento $\overrightarrow{\Delta r}$ y el tiempo transcurrido Δt.

Rapidez media $\boldsymbol{v_m} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ - Cociente entre distancia sobre trayectoria recorrida Δs y tiempo Δt.

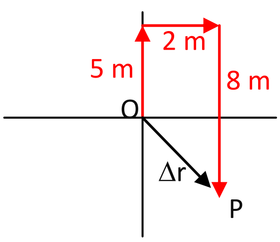
Ejercicio 4: Con los datos del ejercicio 3 halla la velocidad media y rapidez media.

La velocidad media : $\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{m}} = \frac{4\vec{\imath}-2\vec{\jmath}}{5} = 0{,}8\vec{\imath} - 0{,}4\vec{\jmath}$; en módulo : $|\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{m}}| = \sqrt{(0{,}8)^2+(-0{,}4)^2} = 0{,}89\ m/s$

La rapidez media: $\boldsymbol{v_m} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{6{,}4}{5\ s} = 1{,}28\ m/s$

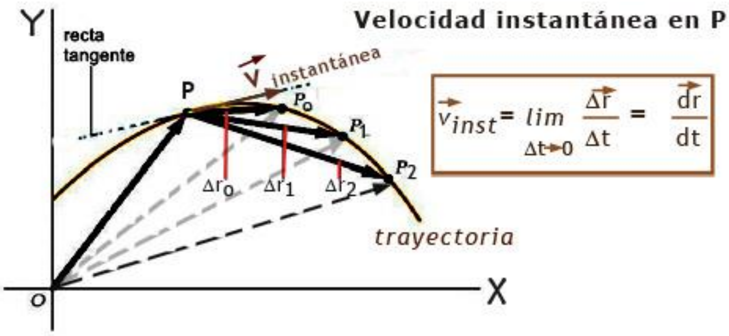
Ejercicio 5: Una persona recorre 5 m hacia el norte, luego 2 m al este, después 8 m al sur en 20 segundos. Halla: a) ¿Cuánto se ha desplazado. b) ¿Cuánto ha recorrido? . c) velocidad y rapidez media.

(Sol: a) dada. b) Δs= 15 m. c) ($2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$) /20 ; módulo 3,61/20 y rapidez= 0,75 m/s)



a) $\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r} - \vec{r}_o = \overrightarrow{OP} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$; $|\overrightarrow{\Delta r}| = \sqrt{(2)^2+(-3)^2} = 3{,}61\ m$

Velocidad instantánea $\vec{\mathbf{v}}$ es la que tiene un móvil en un instante determinado, en un punto determinado de la trayectoria.



Fíjate en la figura, para hallar la ***velocidad instantánea en P*** calcularía la velocidad media entre P y P_2 y tendría la dirección de la cuerda P-P_2. Si me quiero acercar más a la velocidad instantánea tomaría un intervalo más pequeño y sería entre P-P_1. Para acercarme aún más entre P-P_o. Y así sucesivamente, sería su dirección pues ***tangente a la trayectoria*** en P.

La velocidad instantánea es el cociente entre el vector desplazamiento y el intervalo de tiempo cuando éste se hace muy pequeño. Matemáticamente sería el valor al que tiende ese cociente en el límite cuando el intervalo del tiempo tiende a cero.

Ejercicio 6: La ecuación de movimiento de un móvil es $\vec{r} = 10\,t\vec{\imath} + (90 - 3t^2)\vec{\jmath}$ en el SI. Halla la velocidad instantánea a los 2 s y su módulo tomando intervalos de tiempo cada vez más pequeños.

$$\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{2-4\,s}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{(10\,.4\,\vec{\imath} + (90-3.4^2)\vec{\jmath} - (10\,.2{,}0\,\vec{\imath} + (90-3.2{,}0^2)\vec{\jmath}}{\mathbf{4-2}} = \mathbf{10}\,\vec{\imath} - \mathbf{18}\,\vec{\jmath}$$

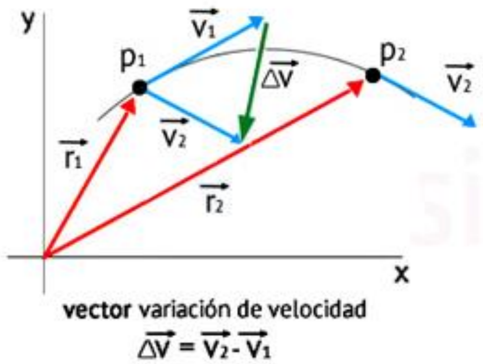
$$\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{2-2{,}1\,s}} = \frac{\Delta\vec{\boldsymbol{r}}}{\Delta \boldsymbol{t}} = \frac{(10\,.2{,}1\,\vec{\imath} + (90 - 3.\,2{,}1^2)\vec{\jmath} - (10\,.2{,}0\,\vec{\imath} + (90 - 3.\,2{,}0^2)\vec{\jmath}}{\mathbf{2{,}1-2}} = \mathbf{10}\,\vec{\imath} - \mathbf{12{,}3}\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{2-2{,}01\,s}} = \frac{\Delta\vec{\boldsymbol{r}}}{\Delta \boldsymbol{t}} = \frac{(10\,.2{,}01\,\vec{\imath} + (90 - 3.\,2{,}01^2)\vec{\jmath} - (10\,.2{,}0\,\vec{\imath} + (90 - 3.\,2{,}0^2)\vec{\jmath}}{\mathbf{2{,}01-2}} = \mathbf{10}\,\vec{\imath} - \mathbf{12{,}03}\,\vec{\jmath}$$

En el límite, vemos que la velocidad instantánea será: $\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{2s}} = \mathbf{10}\,\vec{\imath} - \mathbf{12}\,\vec{\jmath}$ **m/s** *tg a trayectoria*

El módulo de la velocidad instantánea será: $|\,\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{2s}}| = \sqrt{(10)^2 + (-12)^2} = 15{,}62\ m/s$

3 - Aceleración: media e instantánea. Componentes aceleración



La aceleración es la variación de la velocidad en un intervalo de tiempo. Es una magnitud vectorial que tendrá la dirección del $\Delta\vec{v}$. Para que exista aceleración basta que varíe la velocidad en módulo o dirección.

Aceleración media: $\vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{m}} = \frac{\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta \mathbf{t}}$ - es cociente entre el cambio en el vector velocidad $\Delta\vec{v}$ y el tiempo transcurrido Δt. Fíjate en la figura, en un intervalos de tiempo Δt el móvil pasa de p_1 a p_2. Representamos las velocidades instantáneas en esos puntos (tangentes a la trayectoria) y representamos $\Delta\vec{v}$ que será la dirección y sentido que lleve la aceleración media trasladando el vector $\vec{v}_2$ al punto p_1 y restando gráficamente.

Ejercicio 7: Con la ecuación de movimiento del ejercicio 6: $\vec{r} = 10\,t\vec{\imath} + (90 - 3t^2)\vec{\jmath}$ en el SI, ¿cuál será la aceleración media entre los 2 s y 3 s?

$\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{2s}} = \mathbf{10}\,\vec{\imath} - \mathbf{12}\,\vec{\jmath}$; determinamos $\vec{v}_{3s}$ como hicimos en ejerc.6: $\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{3s}} = \mathbf{10}\,\vec{\imath} - \mathbf{18}\,\vec{\jmath}$

$$\vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{m}} = \frac{\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta \mathbf{t}} = \frac{(\mathbf{10}\,\vec{\imath} - \mathbf{18}\,\vec{\jmath}) - (\mathbf{10}\,\vec{\imath} - \mathbf{12}\,\vec{\jmath})}{\mathbf{3-2}} = -\mathbf{6}\,\vec{\jmath}\ \mathbf{m/s^2}$$

Aceleración instantánea: Es la que tiene el movil en un instante determinado. Para calcularla se procede igual que se hizo para la velocidad instantánea:

$$\vec{\mathbf{a}} = \boldsymbol{lim}_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathrm{v}}}{\Delta \mathrm{t}}$$

Ejercicio 8: La velocidad de un coche de carreras en un tramo recto cambia según: $\vec{v} = 2\,t\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$. Se pide: a) aceleración instantánea para un tiempo cualquiera. b) Aceleración instantánea a los 4 s.

a) Calculamos la aceleración instantánea entre un tiempo cualquiera **t** y **t+Δt** :

$$\vec{\mathbf{a}} = lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathrm{v}}}{\Delta \mathrm{t}} = lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left(2\,(t+\Delta t)\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}\,\right) - (2\,t\vec{\imath} + 3\vec{\jmath})}{\Delta \mathrm{t}} = lim_{\Delta t \to 0} \frac{2.\Delta \mathrm{t}.\vec{\imath}}{\Delta \mathrm{t}} = 2\vec{\imath}$$

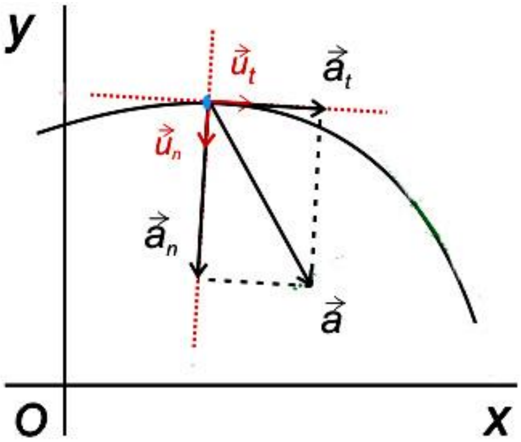
b) La aceleración será constante en la dirección del eje X y valdrá siempre 2 m/s^2 .

• Componentes de la aceleración

La velocidad de un móvil puede cambiar en… :

a) módulo→ **Aceleración tangencial** $\vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{t}}$

b) Dirección→ **Aceleración normal o centrípeta** $\vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{n}}$



En cualquier punto de la trayectoria definimos dos vectores unitarios:

$\vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{t}}$ tangente a la trayectoria en el punto.

$\vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}}$ perpendicular a la trayectoria en el punto.

Así la aceleración será: $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{t}} + \vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{n}}$; en módulo: $|\,\vec{\mathbf{a}}| = \sqrt{\vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{t}}{}^{2} + \vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{n}}{}^{2}}$

+ ***Aceleración tangencial***: Recoge el cambio en el módulo de la velocidad: $\vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{t}} = \mathbf{a}_{\mathbf{t}}.\vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{t}} = lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathrm{v}}{\Delta \mathrm{t}}.\vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{t}}$

+ ***Aceleración normal o centrípeta***: Recoge el cambio en la dirección de la velocidad: $\vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{n}} = \mathbf{a}_{\mathbf{n}}.\vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}} = \frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{R}}.\vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}}$

v- módulo de la velocidad ; R- radio curvatura de la trayectoria

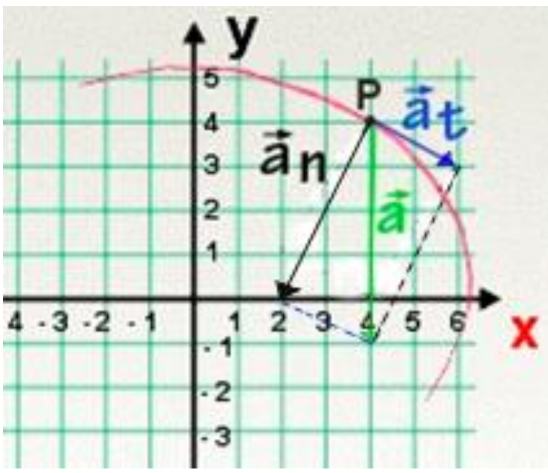
Ejercicio 9: Un coche acelera uniformemente en una pista de 64 m de radio. Calcula su aceleración tangencial, normal y total cuando lleva una velocidad de 20 m/s, si se sabe que ha pasado de 19 m/s a 20 m/s en 0,2 segundos.

$$\mathbf{a}_{\mathbf{n}} = \frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{R}} = \frac{20^2}{40} = 6{,}25\ \mathrm{m/s^2}\ \ ;\ \mathbf{a}_{\mathbf{t}} = \frac{\Delta \mathrm{v}}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{20-19}{0{,}2} = 5\ \mathrm{m/s^2}$$

El módulo de la aceleración total será: $|\,\vec{\mathbf{a}}| = \sqrt{\vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{t}}{}^{2} + \vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{n}}{}^{2}} = \sqrt{\mathbf{6{,}25^2 + 5^2}}$ = 8 m/s^2

Ejercicio 10: Un ciclista describe una curva de 48 m de radio a una velocidad constante de 12 m/s. Halla su aceleración.

Como el módulo de la velocidad es constante su aceleración será únicamente normal o centrípeta.



$$\mathbf{a}_{\mathbf{n}} = \frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{R}} = \frac{12^2}{48} = 3\ \mathrm{m/s^2}$$

Ejercicio 11: Determina gráficamente en el punto P el valor de $\vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{t}}$, $\vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{n}}$, $\vec{\mathbf{a}}$

El vector $\vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{t}} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) - (\mathbf{x_o}, \mathbf{y_o}) = (\mathbf{6}, \mathbf{3}) - (\mathbf{4}, \mathbf{4}) = \mathbf{2}\vec{\imath} - \vec{\jmath}$

El vector $\vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{n}} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) - (\mathbf{x_o}, \mathbf{y_o}) = (\mathbf{2}, \mathbf{0}) - (\mathbf{4}, \mathbf{4}) = -\mathbf{2}\vec{\imath} - 4\,\vec{\jmath}$

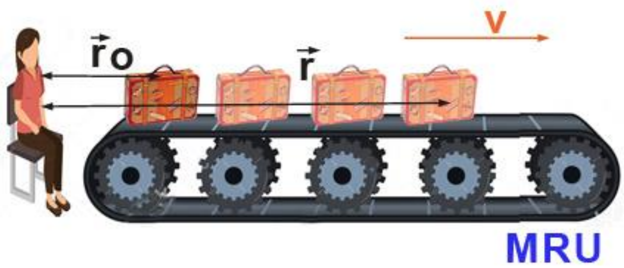
Con lo que la aceleración total será:

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{t}} + \vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{n}} = \mathbf{2}\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \left(-\mathbf{2}\vec{\imath} - 4\,\vec{\jmath}\,\right) = -5\,\vec{\jmath}$$

Su módulo :$|\,\vec{\mathbf{a}}| = \sqrt{\mathbf{0^2 + (-5)^2}} = 5\ unidades$

4 - Movimiento rectilíneo uniforme (MRU)

Es el movimiento que tiene como trayectoria una línea recta y cuya velocidad es constante en módulo, dirección y sentido.



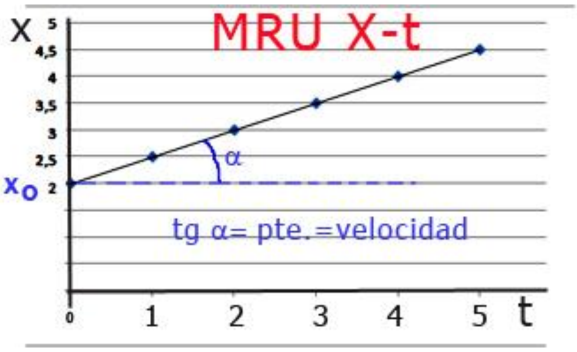
En la imagen ves un ejemplo de MRU. Inicialmente para tiempo= t_o la maleta está a una distancia $\vec{r}_o$ de la observadora. Al cabo de un tiempo= t está a una distancia $\vec{r}$.

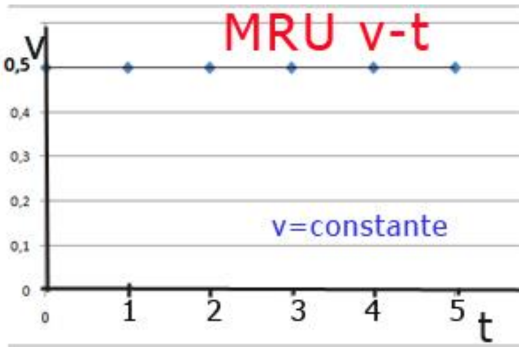
$$\vec{v} = \vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}-\vec{r}_o}{t-t_o} \rightarrow \vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}.t$$

En la dirección eje X : $\boxed{x = x_o + v.t}$

Ejercicio 12: La cinta transportadora de la figura superior se mueve a una velocidad de 0,5 m/s. Si inicialmente una maleta se encuentra a 2 metros de un observador, halla la distancia a la que se encontrará al cabo de 5 segundos. Dibuja las gráficas x-t , v-t.

$x = x_o + v.t$	t=0	t=1	t=2	t=3	t=4	**t=5**
	2	2,5	3,0	3,5	4,0	**4,5**





Observa que la gráfica X-t tiene pendiente positiva pues la velocidad va en la dirección + eje X.

5 - Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA)

5.1.*Ecuaciones y gráficas del MRUA*

El movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA) es el que tiene trayectoria rectilínea y su ***aceleración es constante***, es decir, la velocidad aumenta/disminuye lo mismo en iguales intervalos de tiempo. Un ejemplo es la caída libre de los objetos bajo la aceleración de la gravedad $\vec{g}$.

$$\vec{a} = \vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}-\vec{v}_o}{t-t_o} \rightarrow \vec{v} = \vec{v}_o + \vec{a}.t$$

En la *dirección eje X* : **a=constante** ; $\boxed{v = v_o + a.t}$ **(1)** ; pasado tiempo Δt la $v_m = \frac{v+v_o}{2}$

Entonces en un Δt que llamaremos **t** el espacio x recorrido será:

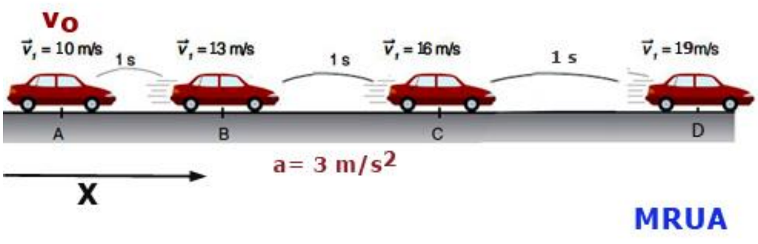
$$x = x_o + v_m.t = x_o + \frac{v+v_o}{2}.t = x_o + \frac{(v_o+at)+v_o}{2}.t = x_o + \frac{2v_o+at}{2}.t = x_o + v_o.t + \frac{at^2}{2}$$

Así queda: $\boxed{x = x_o + v_o.t + \frac{at^2}{2}}$ **(2)** ; combinando (1) y (2) fórmula sin tiempo: $\boxed{v^2 = v_o^2 + 2ax}$

Ejercicio 12: Un prototipo de coche pasa de 36 km/h (10 m/s) a 108 km/h (30 m/s) de modo uniforme en 5 s. Halla aceleración y espacio recorrido. Comprueba el resultado de ***x*** utilizando fórmula sin tiempo.

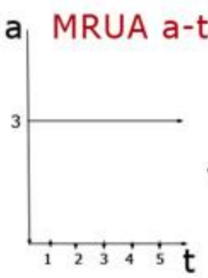
$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{30-10}{5} = 4\ m/s^2$; espacio recorrido: $x = x_o + v_o.t + \frac{at^2}{2} = 0 + 10.5 + \frac{4.5^2}{2} = 100\ m$

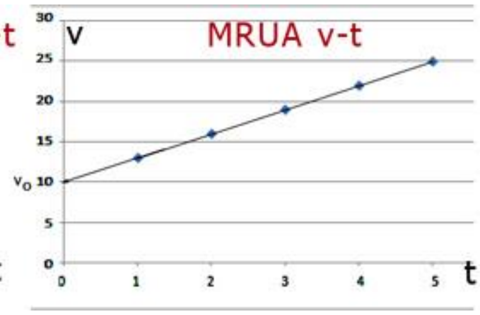
$v^2 = v_o^2 + 2ax \rightarrow 30^2 = 10^2 + 2.4.x \rightarrow 800 = 8.x \rightarrow x = 100\ m$

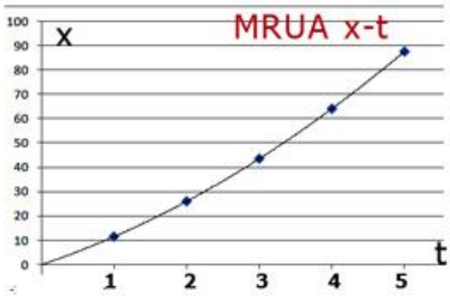


Ejercicio 13. La imagen recoge un MRUA con $\boldsymbol{v_o}$**= *10*** m/s y aceleración uniforme de ***a=3*** m/s^2. Realiza las gráficas **a-t** ; **v-t** ; **x-t**. (supón x_o= 0)

t	0	1	2	3	4	5
v $= v_o + at$	10	13	16	19	22	25
x $= v_o.t + \frac{at^2}{2}$	0	11,5	26	43,5	64	87,5





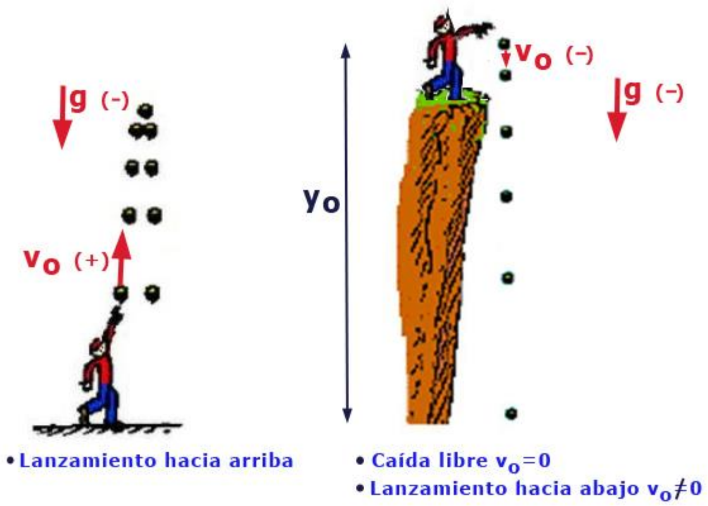


Gráfica **a-t** : Línea recta paralela al eje de las abscisas.

Gráfica **v-t** : Línea recta de pendiente = aceleración; corta al eje de ordenadas Y en el valor v_o.

Gráfica **x-t** : Curva parabólica; corta al eje Y en el valor x_o.

5.2.*Caída libre y lanzamiento vertical*



En el movimiento vertical de los cuerpos –caída libre y lanzamiento vertical- los cuerpos están sometidos a la aceleración de la gravedad **g=- 9,8 m/s^2** que va dirigida hacia el centro de la Tierra.

A considerar:

aceleración: **g** = -9,8 m/s^2 siempre negativa.

velocidad: **v**, $\mathbf{v_o}$ es + si dirigida hacia arriba y negativa si dirigida hacia abajo.

Fórmulas del MRUA:

$$\left.\begin{aligned} & \mathbf{v = v_o - g.t} \\ & \mathbf{y = y_o + v_o.t - \frac{gt^2}{2}} \\ & \mathbf{v^2 = {v_o}^2 - 2.g.y} \end{aligned}\right\}$$

Ejercicio 14. Un mozo lanza verticalmente hacia arriba una piedra con una velocidad de 24 m/s. Halla lo siguiente: a) velocidad y altura que alcanza al cabo de 1,5 segundos. b) altura máxima. c) velocidad cuando está a una altura de 15 m.

a) $\mathbf{v}_{\mathbf{1,5\,s}}$= v_o – g.t= 24-9,8.1,5= **9,3 m/s** *subiendo* ; $\mathbf{y}_{\mathbf{1,5\,s}} = \mathbf{24.1,5 - \frac{g.1{,}5^2}{2} = 24,98\ m}$

b) Al llegar a la altura máxima la velocidad v=0 . Así: $0^2 = {v_o}^2 - 2.g.y_{max} \rightarrow y_{max} = \frac{vo^2}{2g} = \frac{24^2}{2g} = \mathbf{29,39\ m}$

c) $v^2 = {v_o}^2 - 2.g.y = 24^2 - 2.g.15 = 282 \rightarrow \boldsymbol{v} = \sqrt{282} = \mathbf{16,8}\ \boldsymbol{m/s}$

Ejercicio 15. Se deja caer desde un precipicio de 74 m de altura una piedra. Hallar: a) tiempo de caída. b) altura y velocidad al cabo de 2 s.

a) Aquí la v_o=0 . Llega al suelo cuando y=0 , entonces tendremos:

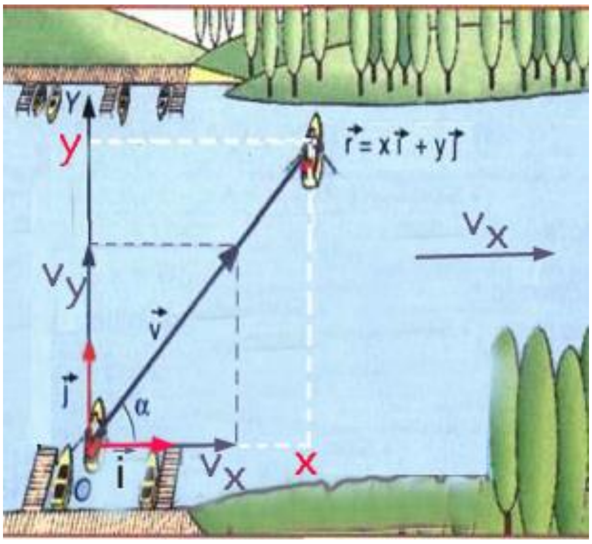
$$y = y_o + v_o.t - \frac{gt^2}{2} \rightarrow \mathbf{0} = y_o + 0.t - \frac{{gt_{caída}}^2}{2} \rightarrow -y_o = -\frac{{gt_{caída}}^2}{2} \rightarrow \mathbf{t_{caída}} = \sqrt{\frac{2.y_o}{g}} = \sqrt{\frac{2.74}{g}} = \mathbf{3,89\ s}$$

b) $\mathbf{y}_{\mathbf{2\,s}} = y_o + v_o.t - \frac{gt^2}{2} = 74 - \frac{9{,}8.2^2}{2} = \mathbf{54,4\ m}$; $\mathbf{v}_{\mathbf{2\,s}}$ = v_o – g.t = 0- g.2= **-19,6 m/s** *bajando*

6 - Composición de movimientos

6.1. *Composición 2 MRU perpendiculares*

Un ejemplo sería un barco con la proa en dirección a la orilla opuesta a velocidad constante $\mathbf{v_y}$. El rio baja con una velocidad $\mathbf{v_x}$. ¿Hacia dónde se dirigirá la barca? Se trata de un problema de composición de 2 movimientos rectilíneos uniformes perpendiculares.



$$\left.\begin{array}{l} x = v_x .\, t \\ y = v_y .\, t \end{array}\right\} \frac{x}{v_x} = \frac{y}{v_y} \rightarrow \quad \mathbf{y = \frac{v_y}{v_x}.x} \qquad \textbf{ec. trayectoria}$$

Ec. posición: $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$; $\vec{v} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath}$

módulo: $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$; $|\vec{v}| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$

<u>Principio superposición</u>: Si una partícula está sometida de modo simultáneo a 2 movimientos independientes, la resultante es la suma vectorial de dichos movimientos parciales

Ejercicio 16. Una barca a 5 m/s cruza un río de 80 m de ancho con la proa en dirección a un muelle, que está perpendicular en la orilla opuesta. Si la velocidad de la corriente del río es de 1,2 m/s. Hallar: a) Ecuación de la posición al cabo de 10 s. Ecuación de la velocidad b) ¿A qué velocidad se mueve la barca?. c) ¿Cuánto tiempo tardará en cruzar el río y cuántos metros más abajo del muelle aparecerá?

$\boldsymbol{a})\ \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = v_x.t\,\vec{\imath} + v_y.t\,\vec{\jmath} = 12\,\vec{\imath} + \ 50\ \vec{\jmath}$; $\vec{v} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} = \ 1{,}2\,\vec{\imath} + 5\,\vec{\jmath}$

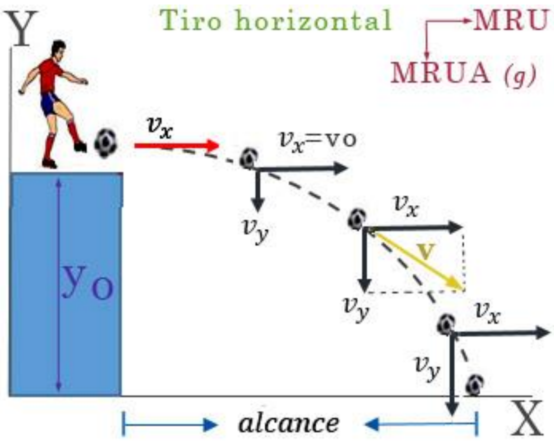
b) $|\vec{v}| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{1{,}2^2 + 5^2} = 5{,}14\ m/s$

c) $y = v_y .\, t \rightarrow t_{\text{cruzar río}} = y/\,v_y = 80/5 = 16$ s por lo tanto : $x = v_x .\, t = 1{,}2.16 = 19{,}2$ m más abajo del muelle.

6.2. *Composición MRU con MRUA perpendiculares*

6.2.a. Tiro horizontal

Si se lanza un objeto horizontalmente con una velocidad inicial $\mathbf{v_x = v_o}$, el objeto conservará esa velocidad, no variará a lo largo del tiempo. Simultáneamente, su velocidad vertical $\mathbf{v_y}$ aumenta con el tiempo debido a la gravedad. Con lo cual:



+ **Eje X**: movimiento horizontal uniforme
  - -Velocidad en cualquier instante: $\mathbf{v_x = v_o}$
  - -Posición en cualquier instante: $\mathbf{x = v_x.t}$

+ **Eje Y**: movimiento vertical de caída libre
  - -Velocidad en cualquier instante: $\mathbf{v_y = -g.t}$
  - -Posición en cualquier instante: $\mathbf{y = y_o - \frac{gt^2}{2}}$

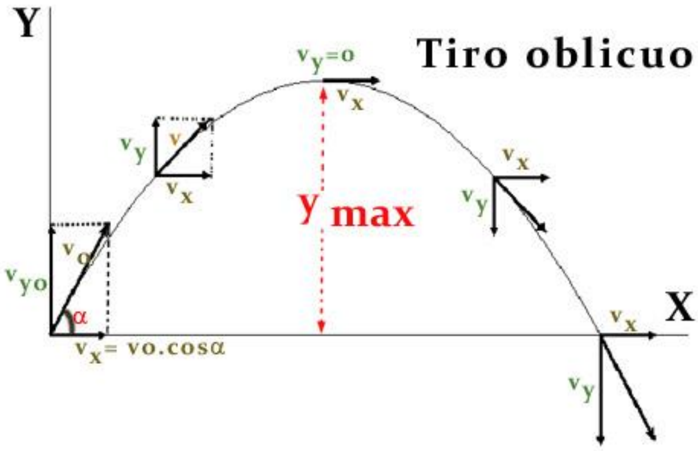
Tiempo de caída: Cuando toca el suelo y= 0= $y_o - \frac{g.{t_{\text{caída}}}^2}{2} \rightarrow$

$$\mathbf{t_{\text{caída}}} = \sqrt{\frac{2.\,y_o}{g}} \rightarrow \quad \textbf{Alcance} = X_{max} = v_x.t_{\text{caída}} = v_o.\sqrt{\frac{2.\,y_o}{g}}$$

Ejercicio 17. Si un futbolista desde una planicie elevada 50 m da un chute horizontal a un balón con una velocidad de 20 m/s. Halla: a) Velocidad del balón a los 3 segundos. b) Tiempo de caída y alcance

$v_x = 20$;$v_y = -g.t = -9{,}8.3 = -29{,}4$; $\mathbf{v} = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{20^2 + 29{,}4^2} = \mathbf{36\ m/s}$; $\mathbf{X_{max}} = v_o.\sqrt{\frac{2.\,y_o}{g}} = 20.\sqrt{\frac{2.50}{9{,}8}} = \mathbf{64\ m}$

6.2.b. Tiro oblicuo



En el tiro oblicuo la velocidad inicial v_o del lanzamiento forma un ángulo α con la horizontal.

+ **Eje X**: movimiento horizontal uniforme
  - -Velocidad en cualquier instante: $\mathbf{v_x = v_o . cos}\ \alpha$
  - -Posición en cualquier instante: $\mathbf{x = v_x . t = v_o . cos}\ \alpha . t$

+ **Eje Y**: movimiento vertical de caída libre
  - -Velocidad en cualquier instante: $\mathbf{v_y = v_o . sen}\ \alpha\mathbf{-g.t}$
  - -Posición cualquier instante: $\mathbf{y} = \mathbf{y_o} + \mathbf{vo.sen}\ \alpha . t - \frac{\mathbf{gt^2}}{\mathbf{2}}$

Altura máxima: Se produce cuando v_y=0= v_o.sen α-g.t $\rightarrow$ $\mathbf{t}_{\mathbf{h\ max}} = \frac{\text{vo.sen}\ \alpha}{g}$ **;** $\mathbf{t}_{\mathbf{vuelo}}$ = 2.$t_{h\ max}$= $\frac{2.\text{vo.sen}\ \alpha}{g}$

Por lo tanto altura máxima: Sustituir $\mathbf{t}_{\mathbf{h\ max}}$ en ec posición vertical **y**.

Alcance: Es la distancia horizontal punto lanzamiento-punto caída. Se sustituye $\mathbf{t}_{\mathbf{vuelo}}$ en ec. de **x**.

Ejercicio 18. Un jugador de golf lanza una pelota desde el suelo con un ángulo de 60º con respecto a la horizontal y con una velocidad de 50 m/s. Calcula: a) tiempo de vuelo. b) Altura máxima. c) alcance. d) velocidad de la bola a los 5 s del lanzamiento.

a) $\mathbf{t}_{\mathbf{vuelo}} = \frac{2.\text{vo.sen}\ \alpha}{g} = \frac{2.50.\text{sen}\ 60}{9,8} = 8,84\ \text{s}$ **;** b) $\mathbf{t}_{\mathbf{y\ max}}$= t_{vuelo}/2= 4,42 s $\rightarrow$ sustituir en ec de y:

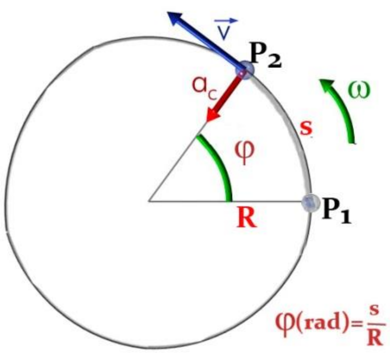
$$\mathbf{y_{max}} = \text{vo. sen}\ \alpha . t - \frac{gt^2}{2} = 50.\text{sen}\ 60.4{,}42 - \frac{9{,}8.4{,}42^2}{2} = 95{,}7\ \text{m}$$

c) Para el alcance sustituimos t vuelo en X: $\mathbf{x_{max}}$ = v_o.cos α.t=50. cos 60.8,84= **221 m**

d) Velocidad a los 5 s : v_x= v_o.cos α= 50.cos60= 25 m/s
v_y= v_o.sen α-g.t=50.sen60-9,8.5= -5,7 m/s *(bajando)*

$$\text{v}= \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{25^2 + 5{,}7^2} = \mathbf{25,6\ m/s}$$

7 - Movimiento circular. Magnitudes angulares



En un movimiento circular definimos un ángulo denominado ***radián*** (rad). Diremos que el ángulo φ= 1 radián si el arco recorrido s coincide con el radio.

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{rad}) = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{R}}$$

(Así 360 º en radianes será: = $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{circ}) = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{2\pi R}}{\mathbf{R}} = \mathbf{2\pi\ rad}$)

En movimiento circular aparece una nueva velocidad: ***velocidad angular*** $\boldsymbol{\omega}$.
La velocidad angular es el angulo φ (rad) recorrido por unidad de tiempo.

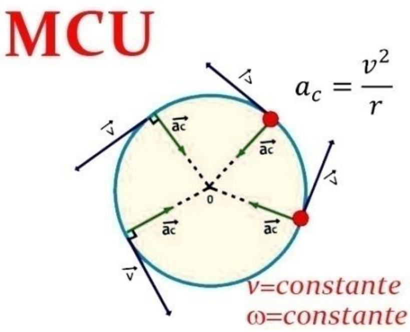
$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{t}}\ \mathbf{rad/s}$$

¿Qué relación hay entre la velocidad lineal **v** y la velocidad angular ω?

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{t}} = \frac{\boldsymbol{\varphi}.\mathbf{R}}{\mathbf{t}} = \boldsymbol{\omega}.\mathbf{R}$$

Ejercicio 19. La periferia de una rueda R=60 cm se mueve a 2,5 rad/s. Halla su velocidad lineal.
v=ω.R= 2,5 rad/s. 0,6 m = 1,5 m/s

7.1. Movimiento circular uniforme (MCU)



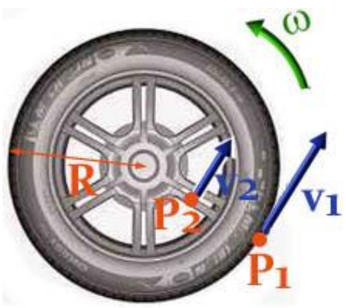
Se caracteriza por ser un movimiento circular en el que el móvil tiene una velocidad v lineal constante . Ejemplos: rueda de una noria, rueda de un coche que se desplaza a velocidad uniforme, etc.

T- período o tiempo en dar una vuelta . En el S.I. se da en segundos.
f- frecuencia o número de vueltas por unidad de tiempo. S.I. en s^{-1} o Hz

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{f}}$$

Este movimiento tiene aceleración normal o centrípeta $\mathbf{a_c}$ porque la velocidad aunque no varía en módulo cambia en dirección.

Ejercicio 20. Una rueda de 40 cm de diámetro gira a razón de 45 rpm (revoluciones por minuto). Halla: a) la frecuencia y el período. b) la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. c) la velocidad tangencial de un punto de la rueda situado en la periferia y en otro punto a 10 cm del centro. d) la aceleración centrípeta de los puntos de la periferia de la rueda. e) Ángulo en 37 s recorrido y vueltas.



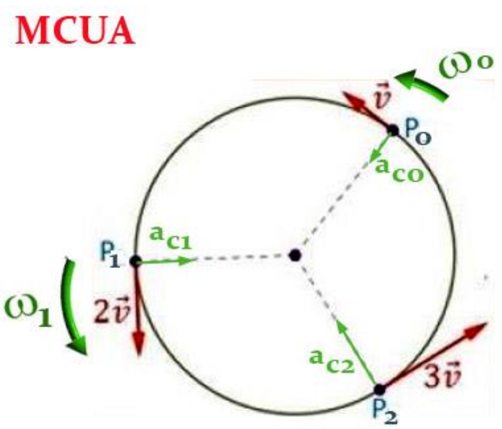
a) $\mathbf{f} = 45\frac{\text{rev}}{\text{min}}.\frac{1\text{ min}}{60\text{ s}} = 0{,}75\frac{\text{rev}}{\text{s}}\text{ o Hz}$ → **T**= 1/f = 1/0,75= 1,33 s

b) $\boldsymbol{\omega} = 45\frac{\text{rev}}{\text{min}}.\frac{2\pi\text{ rad}}{1\text{ rev}}.\frac{1\text{ min}}{60\text{ s}} = 4{,}71\text{ rad/s}$

c) Imagen: v en un punto P_1 periferia (R= 20 cm) será : $v_1 = \omega$.R= 4,71. 0,2 m= 0,94 m/s
v en un punto P_2 (R= 10 cm) será : $v_2 = \omega$.r= 4,71. 0,1 m= 0,47 m/s

d) $\mathbf{a_c}$= v^2/R= $0{,}94^2$/0,2= 4,4 m/s^2 ; e) $\boldsymbol{\varphi_{37s}}$=ω.t= 4,71.37= 174,3 rad ; 174,3 rad. $\frac{1\text{ rev}}{2\pi\text{ rad}} = 27{,}7$ vuelt

7.2. Movimiento circular uniformemente acelerado (MCUA)



Se trata de un movimiento circular en el que el móvil varía de velocidad (lineal y angular) de forma uniforme con el tiempo.

En la figura el móvil en P_o tiene inicialmente una velocidad angular ω_o, al cabo de un tiempo en P_1 su velocidad aumenta pasando su velocidad angular a tomar un valor ω_1. Denominamos ***aceleración angular*** α al cambio de la velocidad angular con el tiempo: $\alpha = \frac{\omega - \omega_o}{t}$ $\left(\frac{\text{rad}}{s^2}\right)$

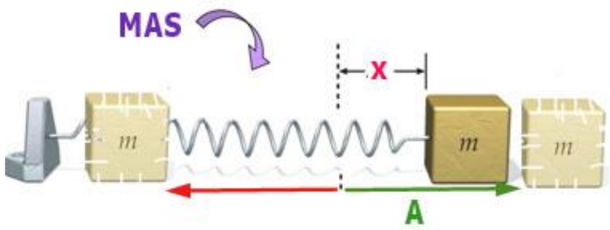
Las fórmulas del MCUA al tratarse de un mov. uniformemente acelerado son análogas a las del MRUA:

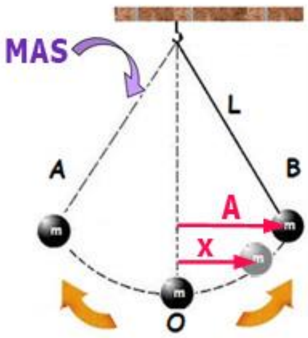
Lineal uniformemente acelerado	Angular uniformemente acelerado
$v = v_o + a.t$	$\omega = \omega_o + \alpha.t$
$s = v_o.t + \frac{a.t^2}{2}$	$\varphi = \omega_o.t + \frac{\alpha.t^2}{2}$
$v^2 = v_o^2 + 2as$	$\omega^2 = \omega_o^2 + 2\alpha\varphi$

Ejercicio 21. Una rueda R=30 cm que giraba a 3 rad/s en 5 s pasa a girar a 24 rad/s. Halla: a) α . b) ángulo total. c) ¿Cuál sería la velocidad periférica lineal inicial y final de la rueda?(Soluc c) 0,9; 7,2 SI)

a) $\alpha = \frac{\omega - \omega_o}{t} = \frac{24-3}{5} = 4{,}2\frac{\text{rad}}{s^2}$; b) $\varphi_{5s} = \omega_o.t + \frac{\alpha.t^2}{2} = 3.5 + \frac{4{,}2.5^2}{2} = 67{,}5$ rad→ 10,7 vueltas

8 - Movimiento Armónico Simple (MAS)





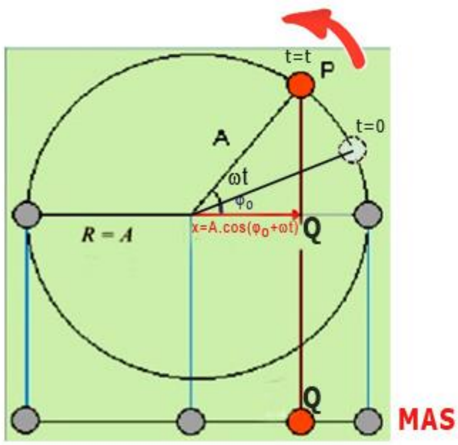
Los movimientos periódicos de "ida y vuelta" a ambos lados de una posición de equilibrio se llaman ***oscilatorios*** o vibratorios. El objeto oscila entre dos posiciones extremas sin pérdida de energía suponiendo que no existe rozamiento.

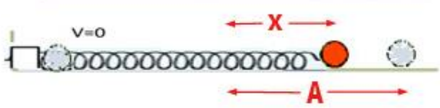
Oscilación completa- es el movimiento realizado durante un período, es decir, una ida y una vuelta.

Amplitud- es la distancia entre la posición de equilibrio y un extremo. Es el máximo desplazamiento en una vibración y se recorre en un tiempo t= T/4.

Ejemplos: Fíjate en la ***figura*** estiramos una masa que cuelga o está ***sujeta a un resorte*** y soltamos realizará –si no hay rozamiento sobre la mesa- en un movimiento de vaivén en torno a una posición de equilibrio. La distancia **x** en un momento dado de la posición de equilibrio se llama **elongación**. Otro ejemplo es el de una masa que pende de un hilo, el ***péndulo simple***. Separamos la masa m de la posición de equilibrio O hasta una posición A y soltamos se inicia un movimiento de vaivén en torno a la posición de equilibrio.

8.1. Ecuación del MAS





De los movimientos vibratorios que hay en la naturaleza los más importantes son los armónicos simples (MAS) que se expresan a través de la función seno o coseno como los 2 que acabas de ver.

El MAS se puede considerar como la proyección de un MCU del mismo período sobre el diámetro. (ver figura)

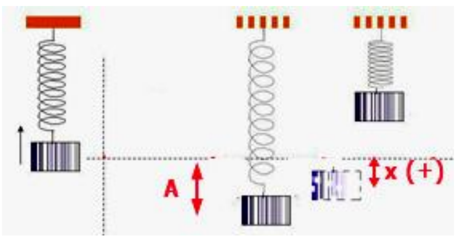
- inicio t=0 (ángulo φ_o en radianes es la ***fase inicial***)
- al cabo de tiempo t= t (ángulo $\varphi_o + \omega t$) punto **P**

Ecuación de la posición del MAS proyección punto **Q** :

$\boxed{x = A \cos(\omega t + \varphi_o)}$ **A-** *amplitud* **; x-***elongación* **; ω-***pulsación*

*ω es la velocidad angular del MCU al que corresponde ese MAS, por lo tanto: $\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

(ver: https://www.youtube.com/watch?time_continue=42&v=QzcA6TfrxFU)

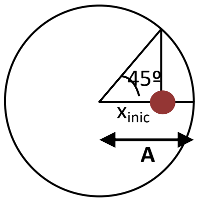


Ejercicio 22. De un muelle cuelga un peso (ver figura). Se estira 10 cm hacia abajo y comienza un movimiento vibratorio cuyo período es de 2 segundos. Se pide: a) fase inicial, amplitud en cm, frecuencia y pulsación. b) Ecuación de la posición del MAS (considera positivo por abajo de la posición de equilibrio. c) posición del peso a los 0,3 s y a los 1,2 s. (Soluc: φ_o=0, A=10 cm; f= 0,5 Hz o s^{-1} ; $\omega=\pi$ rad/s ; b) x= 10.cos πt ; c) 5,88 cm ; -8,09 cm)

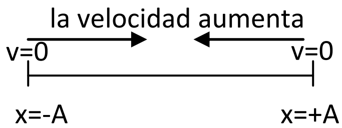
Ejercicio 23. ¿Cuánto vale la fase inicial del ejercicio 2 si iniciamos cronómetro t=0 cuando pasa por el punto de equilibrio subiendo?

Ejercicio 24. Un oscilador armónico tarda 8 segundos en realizar 20 vibraciones completas. ¿Qué frecuencia angular posee? (Soluc: 5 π rad/s)

Ejercicio 25. Escribe la ecuación de un oscilador sabiendo que se mueve entre dos puntos distantes entre sí 10 cm y que tiene una frecuencia de 20 Hz, con una fase inicial de 45º.



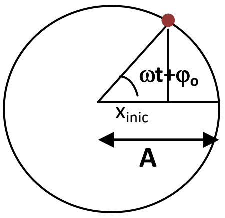
8.2. Velocidad y aceleración del MAS



Recordaras que la velocidad es la derivada del espacio respecto al tiempo: $v = \frac{dx}{dt}$.

Nota: [d f1 (f2)) = d(f2). df1(f2) donde f1= función 1 ; f2= función 2 además d(sen x) = cos x ; d(cos x)= -sen x]

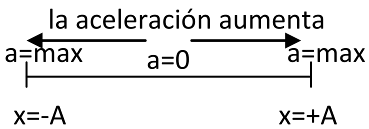
$$\mathbf{v} = \frac{d(\mathrm{A.cos}\,(\omega t + \varphi o\,)}{dt} = \mathrm{A}.\frac{d(\cos\,(\omega t + \varphi o\,)}{dt} = \mathrm{A}.\,\omega.-\mathrm{sen}(\omega t\; + \;\varphi o\,) = -\mathbf{A\omega sen}\big(\boldsymbol{\omega t}\; + \;\boldsymbol{\varphi_o}\,\big)$$



En los extremos : (ωt + φ_o) = 0 y π rad $\Rightarrow$ sen0 = senπ= 0 $\Rightarrow$ **v=0**

En el centro *:* (ωt + φ_o) = π/2 y 3π/2 rad $\Rightarrow$ senπ/2 = sen3π/2 = 1 $\Rightarrow$ **v= Aω**= Máx.

Recordaras que la aceleración es la derivada de la velocidad respecto al tiempo: $a = \frac{dv}{dt}$.



$$\mathbf{a} = \frac{d(-\mathrm{A}.\,\omega.\,\mathrm{sen}\;(\omega t\; + \;\varphi o\,)}{dt} = -\mathrm{A}.\,\omega\;\frac{d(\mathrm{sen}(\omega t\; + \;\varphi o\,)}{dt}$$
$$= \;-\mathrm{A}.\,\omega.\,\omega.\cos(\omega t\; + \;\varphi o\,) = -\mathbf{A\omega^2 cos}\big(\boldsymbol{\omega t}\; + \;\boldsymbol{\varphi_o}\,\big) \qquad = -\boldsymbol{\omega^2}.\,\mathbf{x}$$

Ejercicio 26. La ecuación de un MAS es: x = 12 cos 3 t (cm ; segundos). Hallar: a) El período.b) la posición a los 0,3 segundos. b) la velocidad a los 0,3 segundos y la velocidad máxima. c) la aceleración a los 0,3 s y la aceleración máxima.

a) x= A.cos (ωt + φ_o)$\Rightarrow$ ω=3 ; φ_o=0 **;** $\quad \boldsymbol{\omega} = \frac{\varphi}{t} = \frac{\mathbf{2\pi}}{\boldsymbol{T}} \rightarrow \boldsymbol{T} = \frac{\mathbf{2\pi}}{\boldsymbol{\omega}} = \frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{3}} = \mathbf{2,09\ s}$

b) **x** $_{\mathbf{0,3s}}$= 12 cos 3 t =12 cos 3 .0,3 = **7,46 cm**

c) **v** $_{\mathbf{0,3s}}$= -Aω.sen (ωt + φ_o) = - 12.3.sen (3.0,3 + 0) = **-28,20 cm/s** ; $\mathbf{v_{max}}$= Aω=12.3= **36 cm/s**

d) **a** $_{\mathbf{0,3s}}$= -Aω^2.cos (ωt + φ_o) = - 12.9.cos (3.0,3 + 0) = **-67,13 cm/s^2** ; $\mathbf{a_{max}}$= Aω^2=12.9= **108 cm/s^2**

También **a** $_{\mathbf{0,3s}}$=- ω^2.$x_{\mathbf{0,3s}}$ = - 9.7,46=-67,13 cm/s ;