Introducción Vectores

1. Magnitudes escalares y vectoriales

- **<u>Escalares:</u> quedan perfectamente definidas con una cantidad (número) y una unidad**

Ejemplo: el tiempo ⇒ 3 s; la masa ⇒ 8 kg.

- **<u>Vectoriales (vectores):</u> Se caracterizan por:**

<u>Módulo:</u> (cantidad y unidad). Se representa por la longitud del vector. Es la parte escalar.

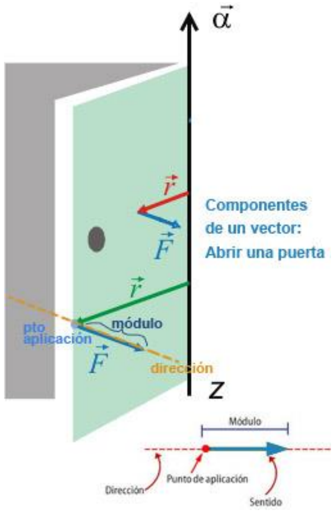
<u>Dirección:</u> es la recta que contiene el vector.

<u>Sentido:</u> indicado por la punta de la flecha.

<u>Punto de aplicación:</u> origen de la flecha.

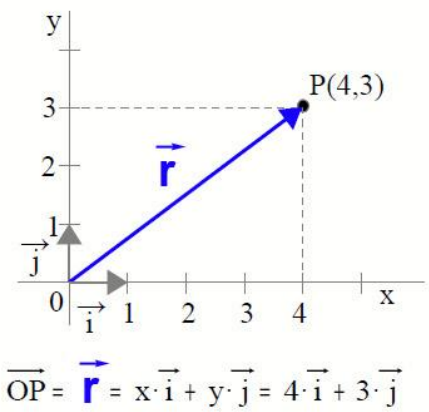
Ejemplo: la posición, velocidad, fuerza...*

<u>Ejercicio</u> :Indica en el ejemplo del coche de la figura el módulo, dirección, sentido y punto de aplicación



Fíjate en las componentes del vector cuando abrimos la puerta ejerciendo una fuerza F a una distancia r (en rojo) cerca del eje de giro, o a una distancia r (en verde) lejos del eje de giro.

2. Vectores en el plano

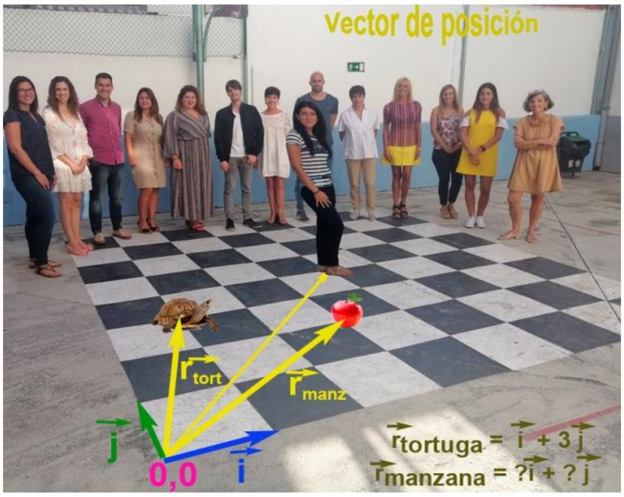


Se representan con una flecha encima de la letra que utilizada para dicha magnitud.

Se suelen expresar en forma cartesiana en donde a_x, a_y son sus componentes cartesianas,

$\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ son los ***vectores unitarios***, su módulo vale **1**.

$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath}$ En la figura $\vec{r}$ sería: $\vec{r} = 4\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$



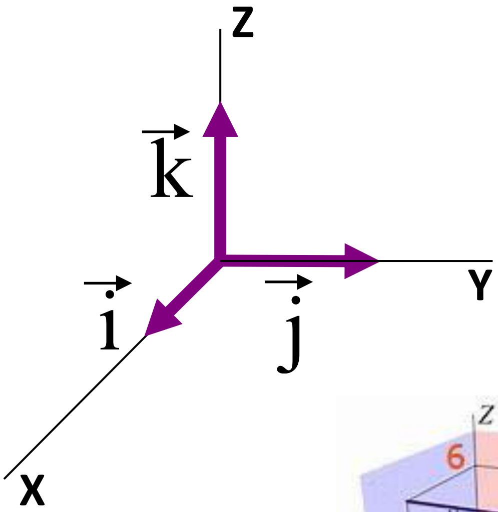
Como en el ejemplo anterior la posición (vector) de un objeto en el plano viene dada por el vector $\vec{r}$ que se denomina **vector de posición**.

Obtén en la figura el vector de posición de la tortuga y de la manzana:

$$\vec{r}_{tortuga} =$$

$$\vec{r}_{manzana} =$$

3. Vectores en el espacio

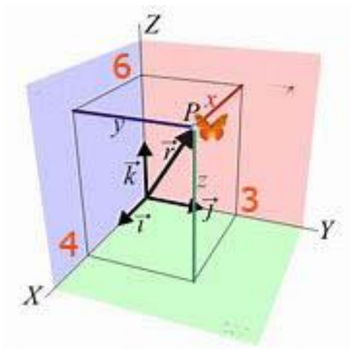


Sobre cada eje se toma como unidad de medida los vectores unitarios, módulo igual a uno.

$\vec{\imath}$ sobre el eje X

$\vec{\jmath}$ sobre el eje X

$\vec{k}$ sobre el eje X

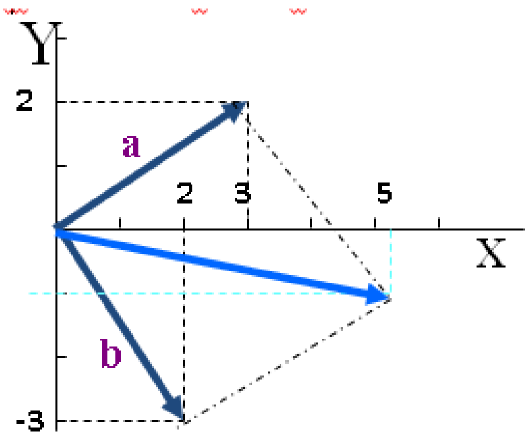


Indica mirando la imagen las componentes del vector posición $\vec{r}$ de la mariposa:

$\vec{r}$ mariposa =

4. Suma de vectores

- Sean dos vectores: **a** = $a_x \cdot$ **i** + $a_y \cdot$ **j** + $a_z \cdot$ **k**
  y **b** = $b_x \cdot$ **i** + $b_y \cdot$ **j** + $b_z \cdot$ **k**
- El vector suma vendrá dado por:
  a + **b** = $(a_x + b_x) \cdot$ **i** + $(a_y + b_y) \cdot$ **j** + $(a_z + b_z) \cdot$ **k**



__**Ejemplo**__**:** Sean

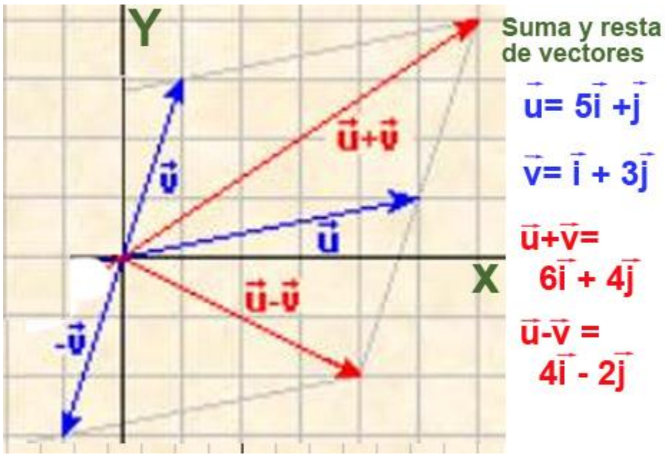
a = 3 **i** + 2 **j**
b = 2 **i** – 3 **j**

a + **b** = (3+2) **i** + (2 –3) **j** = 5 **i** – **j**

5. Resta de vectores

Sean dos vectores: $\mathbf{a} = a_x \cdot \mathbf{i} + a_y \cdot \mathbf{j} + a_z \cdot \mathbf{k}$

y $\mathbf{b} = b_x \cdot \mathbf{i} + b_y \cdot \mathbf{j} + b_z \cdot \mathbf{k}$



El **vector resta** vendrá dado por:

$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_x - b_x) \cdot \mathbf{i} + (a_y - b_y) \cdot \mathbf{j} + (a_z - b_z) \cdot \mathbf{k}$

<u>Ejemplo</u>: Sean

$\left.\begin{array}{l} \mathbf{u} = 5\,\mathbf{i} + \mathbf{j} \\ \mathbf{b} = \mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} \end{array}\right\}$

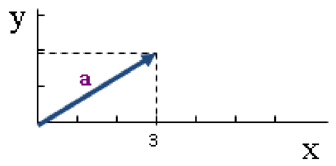
$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (5-1)\,\mathbf{i} + (1-3)\,\mathbf{j} = 4\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j}$

6. Cálculo del módulo de un vector

- Sean un vector: $\mathbf{a} = a_x \cdot \mathbf{i} + a_y \cdot \mathbf{j} + a_z \cdot \mathbf{k}$
- El módulo de **a**, que se representa como $|\mathbf{a}|$ se calcula aplicando el teorema de Pitágoras:
- $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

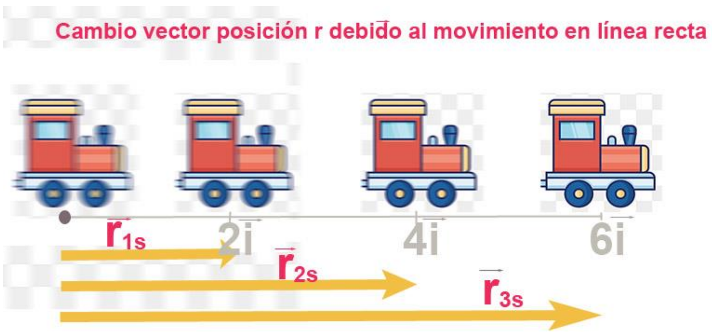
<u>Ejemplo</u>: En el vector : $\mathbf{a} = 3\ \mathbf{i} + 2\ \mathbf{j}$

- $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{3^2 + (2)^2 + 0^2} = \sqrt{13}$



7. Vector de posición y movimiento

- Un objeto se encuentra en movimiento si cambia su posición respecto al sistema de referencia.
- Los sistemas de referencia tienen uno (x), dos (x,y) o tres ejes (x,y,z), perpendiculares entre sí, según trabajemos en una recta, plano, o el espacio.



Fíjate en la figura, el vector de posición cambia con el tiempo t, es decir, tenemos un vector de posición que depende del tiempo **r(t)**.

En este caso será: $\vec{r}\,(t) = 2\,t\,\vec{\imath}$

¡ Compruébalo! ¿Dónde estará el tren a los 14 s?

- La ecuación anterior $\vec{r}\,(t) =$x(t) · $\vec{\imath}$ + y(t) · $\vec{\jmath}$ +z(t) · $\vec{k}$ se llama ecuación de movimiento y proporciona la posición de un objeto respecto al tiempo.

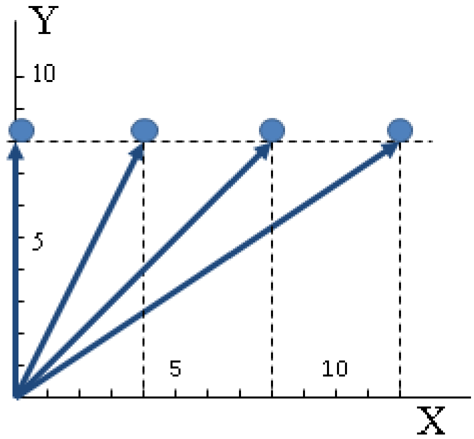
- **Ejemplo:** **r**(t) = [2t · **i** + (1–t) · **j** + (3t^2+4) · **k**] m . Halla dónde estará el móvil al cabo de 1 s y dónde estará al cabo de 2 s. *[negrita indica flecha encima de la letra]*

  Vemos que está expresada en S.I. la unidad será el m.

  r(1 s) = [2.1 · **i** + (1–1) · **j** + (3.1^2+4) · **k**] m= 2 **i** + 17 **k** ; **ídem** **r**(2 s) = 4 **i** + **j** + 16 **k**

Ejercicio: Sea el movimiento definido por la siguiente ecuación **r** = 2t **i** + 8**j** en unidades del S.I. Dibujar los vectores posición en los instantes 0, 2, 4 y 6 segundos.

t (s)	**r** (m)
0	8 **j** (0,8)
2	4 **i** + 8 **j** (4,8)
4	8 **i** + 8 **j** (8,8)
6	12 **i** + 8 **j** (12,8)



8. Ecuaciones paramétricas y trayectoria. Ecuación trayectoria

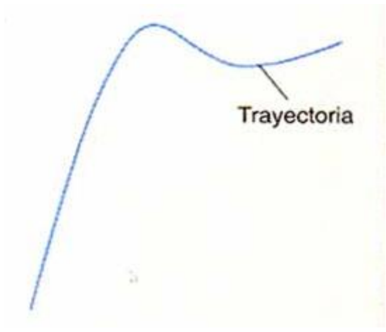
Son las ecuaciones que relacionan cada componente cartesiana con el tiempo.

x = f(t); y = g(t); z = h(t)

Son ecuaciones escalares (no vectores).

Ejemplo: En el vector: **r**(t) = 2t·**i** + (1–t) ·**j** + (3t^2+4)·**k** m
las ecuaciones paramétricas serían:

$$x = 2t \quad ; \quad y = 1 - t \quad ; \quad z = 3t^2 + 4$$



Trayectoria: Es la línea que sigue el movimiento.

- Los diferentes puntos de dicha línea se obtienen dando valores a "t" en la ecuación del movimiento (paramétricas).

En este ejemplo damos valores al tiempo y dibujamos los puntos: t= 1s **(2,0,7)** ; t=2s **(4,-1,16)**..etc

- La **ecuación de la trayectoria** se obtiene despejando el parámetro (tiempo) en una ecuación y sustituyendo el valor en la otra. Es una ecuación escalar . Veamos un ejemplo:

Ejercicio: **Determina el valor del vector posición del vector : $\mathbf{r}(t) = [3t \cdot \mathbf{i} + (2t^2 - 6) \cdot \mathbf{j}]$ m en los instantes de tiempo t = 0, 2, 4, 6 s y calcula el módulo de dichos vectores y la ecuación de la trayectoria.**

t (s)	r(t) (m)	|r(t)| (m)
0	$-6\,\mathbf{j}$	$\sqrt{(-6)^2} = 6{,}00$
2	$6\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}$	$\sqrt{6^2 + 2^2} = 6{,}32$
4	$12\,\mathbf{i} + 26\,\mathbf{j}$	$\sqrt{12^2 + 26^2} = 28{,}64$
6	$18\,\mathbf{i} + 66\,\mathbf{j}$	$\sqrt{18^2 + 66^2} = 68{,}41$

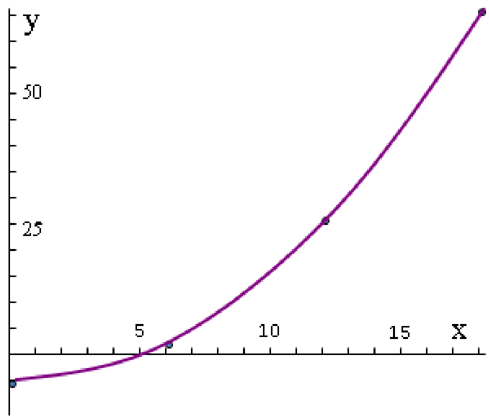
- Despejando "t" de $x = 3t \Rightarrow t = x/3$, y sustituyendo en $y = 2t^2 - 6$ queda:

  $y = 2(x/3)^2 - 6$; $\boxed{y = 2x^2/9 - 6}$

Ahora vamos a representar gráficamente la ecuación de la trayectoria : $y = \frac{2x^2}{9} - 6$

Damos valores cualesquiera a **x** $\rightarrow$ **y** .

x	0	6	12			
y	-6	2	26			



En este caso el móvil describe una trayectoria parabólica

Ejercicio: Dado $\mathbf{r}(t) = 2t\cdot\mathbf{i} + (t^3 - 10)\cdot\mathbf{j}$ m . Calcula la posición del móvil en los instantes t= 0,2,4,6 segundos y la ecuación de la trayectoria. Dibújala.