PROBLEMAS CON FUNCIONES

EJERCICIO 1

La temperatura T, en grados centígrados, que adquiere una pieza sometida a un proceso viene dada en función del tiempo t, en horas, por la expresión: $T(t) = 40t - 10t^2$, con $0 \leq t \leq 4$

a) Represente gráficamente la función T y determine la temperatura máxima que alcanza la pieza.

b) ¿Qué temperatura tendrá la pieza transcurrida 1 hora? ¿Volverá a tener esa misma temperatura en algún otro instante?

Solución:

a) La función es una parábola con vértice hacía arriba, en el máximo. El vértice se obtiene en la solución de T´(t) = 0.

$T'(t) = 40 - 20t = 0 \Rightarrow t = 2$. La temperatura máxima será $T(2) = 40 \cdot 2 - 10 \cdot 22 = 40$º C.

Otros puntos de la gráfica de esta función son: (0, 0); (1, 30); (3, 30) y (4, 0). Uniendo esos puntos, obtenemos la gráfica.

b) Para t = 1, como ya hemos dicho, T(1) = 30. Los instantes en los que la temperatura vale 30 son las soluciones de la ecuación: $T(t) = 40t - 10t\ 2 = 30 \Rightarrow 10t\ 2 - 40t + 30 = 0 \Rightarrow t\ 2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow$ En los instantes t = 1 y t = 3 la temperatura será de 30º C.

EJERCICIO 2

Se espera que, en los próximos diez años, las ganancias (en millones de euros) de una empresa, vengan dadas por la función $P(t)=-2t^2+20t+5$

a) Determinar cuando las ganancias serán iguales a 5 millones de euros.

b) Determinar en qué años decrecerán las ganancias. ¿Cuándo son máximas?

Solución:

a) Debe ser $P(t) = 5 \Rightarrow t = 0$, $t = 10$. La solución t = 0 carece de sentido. Por tanto, a los 10 años la empresa gana 5 millones.

b) Derivando: $P'(t)=-4t+20$. Esta derivada se anula cuando t = 5.

Si $t < 5$, $P'(t) > 0 \Rightarrow P(t)$ es creciente.

Si $t > 5$, $P'(t) < 0 \Rightarrow P(t)$ es decreciente

Si crece para valores de $t < 5$ y decrece para $t > 5$, en t = 5 se da el máximo de P(t). Dicho máximo es P(5) = 55 millones.

EJERCICIO 3

La demanda de un bien en función de su precio viene dada por $D(p)=(30p+10)/p$

a) Demostrar que al aumentar el precio disminuye la demanda.

b) Suponiendo que el precio aumenta indefinidamente, decir qué ocurrirá con la demanda.

c) Escribir los ingresos de una empresa en función del precio suponiendo que dicha empresa es la única que produce este bien.

d) Calcular el precio para que la empresa del apartado anterior maximice sus beneficios sabiendo que los costes vienen dados por $C(p)=p^2/4$.

Solución:

a) Hacemos la derivada: $D'(p)=-10/p^2$. Como $D'(p) < 0$ para todo p, la función de demanda es decreciente.

b) Hacemos el límite cuando $p \rightarrow \infty$, que es 30. La demanda tiende a 30.

c) La función de ingresos es: $I(p)=p \cdot D(p)=30p+10$

d) La función beneficios es: $B(p) = I(p)-C(p)=30p+10- p^2/4$. B(p) alcanza el máximo cuando $B'(p) =0$ y $B''(p) < 0$: esto se cumple en p=60.

EJERCICIO 4

Los beneficios, en cientos de miles de euros, estimados para una empresa durante los próximos 5 años, vienen dados por la función:

$b(t)=(t^2-6)/(t+4)$,$0 \leq t \leq 5$ siendo t el tiempo en años.

a) ¿Cuándo la empresa deja de tener pérdidas?
b) ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que los beneficios sean iguales a 125000 euros?
c) ¿Para qué valores la derivada de la función beneficio es positiva? Justificar la respuesta.
Solución:
a) En el momento de comenzar la empresa tiene pérdidas: $b(0) = -6/4$. Dejará de tener pérdidas cuando $b(t) = 0 \Rightarrow t=2,75$. Esto es, en junio del tercer año.
b) Debe cumplirse que $b(t)=1,250 \Rightarrow t = 4$ (la solución negativa no tiene sentido) Así pues, tienen que pasar 4 años.
c) $b'(t) > 0$ si $t^2 + 8t + 6 > 0$, que se cumple cuando $t > (-8+\sqrt{40})/2$; por tanto, en todo su dominio. Esto significa que la función de beneficios es siempre creciente.

EJERCICIO 5
El propietario de un edificio tiene alquilados los 52 pisos del mismo a 266 euros al mes cada uno. Por cada 7 euros que aumente el alquiler de cada piso pierde un inquilino y, por tanto, queda el correspondiente piso sin alquilar.
a) ¿Cuál es el alquiler que más beneficios producirá al propietario?
b) ¿Cuál es la cantidad máxima que puede recibir el propietario por el alquiler de los pisos?
Solución:
a) Si x es el número de aumentos de 7 euros cada uno, los ingresos por alquiler serán:
$I(x) = (52 - x) \cdot (266 + 7x) = 13822 + 98x - 7x^2$
Para que I(x) sea máximo: $I'(x) = 0$, $I''(x) < 0$. $I'(x) = 98 - 14x = 0$ Þ $x = 7$ Como $I''(x) = -14$, para ese valor se tiene el máximo de I(x). El alquiler será: $266 + 7 \cdot 7 = 315$ euros; y se alquilan 45 pisos.
b) $I(45) = 45 \cdot 315 = 14175$ €.

EJERCICIO 6
Una empresa de transporte estima que sus ganancias (en miles de euros) durante los próximos años seguirán la fórmula $g(t)=(64000+5000t)/ (5t+5)$, en donde la variable t representa el tiempo en años medido a partir del presente.
a) Hallar las ganancias correspondientes a los años primero y quinto.
b) Determinar si las ganancias aumentan o disminuyen con el paso del tiempo. Razonar la respuesta.
c) ¿Se estabilizan las ganancias cuando t crece? ¿Hacia qué valor? Razonar la respuesta.
Solución:
a) Año primero: $g(1) =6900$. Año quinto: $g(5)=2966,67$
b) Hallamos la derivada de g(t): $g'(t)=-295000/(5t+5)^2$ Como la derivada siempre es negativa, la función de ganancias es decreciente siempre. Las ganancias decrecen con el paso del tiempo.
c) Se hace el límite cuando $t \to \infty$. La ganancia se estabiliza en 1 000000 (1000 millares) de euros anuales.

EJERCICIO 7
Una agencia de viajes organiza una excursión. El precio del viaje es de 10.000 pta si reúne 30 o menos personas. Si supera los 30 excursionistas hace una rebaja de 100 pta. a cada uno de los viajeros.
a) Halla la función que da el precio de la excursión dependiendo del número de personas. Represéntala gráficamente.
b) Calcula la función que da el ingreso total que obtiene la agencia en función del número de viajeros. Represéntala gráficamente.
Solución:
NOTA: Interpretamos que la rebaja de 100 pta a cada viajero es por cada viajero más. Esto es, si van 32 viajeros se rebajan 200 pta a cada uno.

$$p(x)=\begin{cases} 10000 & cuando\ x\leqslant 30 \\ 10000-100(x+30) & cuando\ x>30 \end{cases}$$

b) Los ingresos se calculan multiplicando el número de excursionistas por el precio que paga cada uno de ellos.

$$i(x)=\begin{cases} 10000\text{x} & cuando\ x\leqslant 30 \\ 13000\text{x}-100\text{x}^2 & cuando\ x>30 \end{cases}$$

EJERCICIO 8

El precio de un artículo (en miles de pesetas) que ha estado 10 años en el mercado, se expresa en función del tiempo t (en años) según la siguiente función:

$$i(t)=\begin{cases} 3\text{t}^2+4 & cuando\ 0\leqslant t\leqslant 30 \\ 21-\frac{5\text{t}}{2} & cuando\ x>30 \end{cases}$$

Se pide:

a) Representar la función de precio en el intervalo dado.

b) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función precio.

c) ¿Cuál fue el precio máximo que alcanzó el artículo? ¿Cuándo?

Solución:

Representándola gráficamente podemos concluir que:

b) Es creciente si $0 \le t < 2$. Es decreciente si $2 < t < 8$.

c) Su máximo es16.000 pta y lo alcanza en $t = 2$.

EJERCICIO 9

Las pérdidas o ganancias de una empresa, expresadas en centenas de miles de euros cuando han transcurrido t años, sigue la función:

$$f(t)=\frac{2\text{t}-4}{t+2}$$

a) Determinar el año en que la empresa deja de tener pérdidas.

b) ¿Es creciente la ganancia? ¿En qué año la ganancia supera los 100000 euros?

c) ¿Existe límite para la ganancia? En caso afirmativo, ¿cuál es ese límite?

Solución:

a) Deja de tener pérdidas cuando $f(t) = 0 \Rightarrow t = 2 \rightarrow$ a partir del segundo año.

b) $f'(t) > 0$ para cualquier valor de t $\Rightarrow$ la ganancia siempre es creciente. Para una ganancia superior a 100000 euros, $f(t) > 1 \Rightarrow 2t - 4 > t + 2 \Rightarrow t > 6 \rightarrow$ a partir del sexto año.

c) Como el límite cuando $t \rightarrow \infty$ es 2, la ganancia tiene un límite, que es de 200000 euros.

EJERCICIO 10

Las conclusiones de un estudio establecen que el número de individuos de una determinada población de una especie protegida vendrá dado, durante los próximos años, por la función

$f(t)=\dfrac{15000\text{t}+10000}{2\text{t}+2}$ siendo t el número de años transcurridos.

Se pide:

a) Tamaño actual de la población.

b) ¿Cómo evoluciona el tamaño de la población entre los años 4 y 9?

c) Si esta función fuese válida indefinidamente, ¿se estabilizaría el tamaño de la población? Justifica la respuesta.

Solución:

a) En el momento actual, $t = 0$. Luego, $f(0) = 5000$.

b) $f(4) = 7000$ y $f(9) = 7250$. En esos 5 años la población crece en 250 individuos. Su tasa de variación media es: TVM[4,9]=50. Crece a un ritmo medio de 50 individuos por año.

c) El límite cunado $t \to \infty$ es 7500. Se estabiliza en 7500 individuos.